Représentations galoisiennes automorphes et conséquences arithmétiques des conjectures de Langlands et Arthur

Gaëtan Chenevier

chenevier@math.polytechnique.fr

29 mars 2013

Plan

Le groupe $G_{\mathbb{Q},S}$

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$

S ensemble fini de nombres premiers

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$

S ensemble fini de nombres premiers

$\mathbb{Q}_S \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ extension algébrique maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée hors de S

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$

S ensemble fini de nombres premiers

$\mathbb{Q}_S \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ extension algébrique maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée hors de S

$$\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}) = \pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - S)$$

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$

S ensemble fini de nombres premiers

$\mathbb{Q}_S \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ extension algébrique maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée hors de S

$$\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}) = \pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - S)$$

Exemple : (Grothendieck) $X \subset \mathbb{P}^n$ projective lisse sur $\mathbb{Q}$,

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$

S ensemble fini de nombres premiers

$\mathbb{Q}_S \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ extension algébrique maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée hors de S

$$\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}) = \pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - S)$$

Exemple : (Grothendieck) $X \subset \mathbb{P}^n$ projective lisse sur $\mathbb{Q}$,

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \curvearrowright H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$

S ensemble fini de nombres premiers

$\mathbb{Q}_S \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ extension algébrique maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée hors de S

$$\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}) = \pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - S)$$

Exemple : (Grothendieck) $X \subset \mathbb{P}^n$ projective lisse sur $\mathbb{Q}$,

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \curvearrowright H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

se factorise par $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$ si X a bonne réduction hors S et $\ell \in S$.

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$

S ensemble fini de nombres premiers

$\mathbb{Q}_S \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ extension algébrique maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée hors de S

$$\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}) = \pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - S)$$

Exemple : (Grothendieck) $X \subset \mathbb{P}^n$ projective lisse sur $\mathbb{Q}$,

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \curvearrowright H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

se factorise par $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$ si X a bonne réduction hors S et $\ell \in S$.

$\forall p \notin S$, $|X(\mathbb{F}_p)| = \sum_i (-1)^i \mathrm{Trace}(\mathrm{Frob}_p, H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$.

Groupes de décomposition en $p \in S$

Groupes de décomposition en $p \in S$

Structure de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$ mystérieuse.

Groupes de décomposition en $p \in S$

Structure de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$ mystérieuse.

Classe de conjugaison canonique de morphismes

$$\mu : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$$

Groupes de décomposition en $p \in S$

Structure de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$ mystérieuse.

Classe de conjugaison canonique de morphismes

$$\mu : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$$

Théorème (Ch.-Clozel)

Si $p \in S$ et $|S| \geq 2$ alors μ est injectif.

Groupes de décomposition en $p \in S$

Structure de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$ mystérieuse.

Classe de conjugaison canonique de morphismes

$$\mu : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$$

Théorème (Ch.-Clozel)

Si $p \in S$ et $|S| \geq 2$ alors μ est injectif.

Corollaire : Si $|S| \geq 2$ et $n \geq 1$ il existe un corps de nombres non ramifié hors de S et de degré multiple de n.

Groupes de décomposition en $p \in S$

Structure de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$ mystérieuse.

Classe de conjugaison canonique de morphismes

$$\mu : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$$

Théorème (Ch.-Clozel)

Si $p \in S$ et $|S| \geq 2$ alors μ est injectif.

Corollaire : Si $|S| \geq 2$ et $n \geq 1$ il existe un corps de nombres non ramifié hors de S et de degré multiple de n.

(Questions de J. Milne, R. Greenberg. Cas $S = \{p\}$?)

Cohomologie des variétés de Shimura

Cohomologie des variétés de Shimura

Point de départ : considérer des variétés bien choisies ayant bonne réduction hors de $\{p, \ell\}$ et mauvaise réduction controlée en p.

Cohomologie des variétés de Shimura

Point de départ : considérer des variétés bien choisies ayant bonne réduction hors de $\{p, \ell\}$ et mauvaise réduction controlée en p.

- Courbes modulaires $\mathbb{H}^*/\Gamma_1(p^n)$ (Igusa, Langlands, Deligne, Rapoport, Carayol, Katz-Mazur).

Cohomologie des variétés de Shimura

Point de départ : considérer des variétés bien choisies ayant bonne réduction hors de $\{p, \ell\}$ et mauvaise réduction controlée en p.

- Courbes modulaires $\mathbb{H}^*/\Gamma_1(p^n)$ (Igusa, Langlands, Deligne, Rapoport, Carayol, Katz-Mazur). Insuffisantes.

Cohomologie des variétés de Shimura

Point de départ : considérer des variétés bien choisies ayant bonne réduction hors de $\{p, \ell\}$ et mauvaise réduction controlée en p.

- Courbes modulaires $\mathbb{H}^*/\Gamma_1(p^n)$ (Igusa, Langlands, Deligne, Rapoport, Carayol, Katz-Mazur). Insuffisantes.
- Quotients de $\{(z_i) \in \mathbb{C}^n, \sum_i |z_i|^2 < 1\}$ par des réseaux cocompacts bien choisis de $\mathrm{SU}(n,1)$.

Cohomologie des variétés de Shimura

Point de départ : considérer des variétés bien choisies ayant bonne réduction hors de $\{p, \ell\}$ et mauvaise réduction controlée en p.

- Courbes modulaires $\mathbb{H}^*/\Gamma_1(p^n)$ (Igusa, Langlands, Deligne, Rapoport, Carayol, Katz-Mazur). Insuffisantes.
- Quotients de $\{(z_i) \in \mathbb{C}^n, \sum_i |z_i|^2 < 1\}$ par des réseaux cocompacts bien choisis de $\mathrm{SU}(n, 1)$. Définis sur des corps CM auxilliaires (Shimura).

Cohomologie des variétés de Shimura

Point de départ : considérer des variétés bien choisies ayant bonne réduction hors de $\{p, \ell\}$ et mauvaise réduction controlée en p.

- Courbes modulaires $\mathbb{H}^*/\Gamma_1(p^n)$ (Igusa, Langlands, Deligne, Rapoport, Carayol, Katz-Mazur). Insuffisantes.
- Quotients de $\{(z_i) \in \mathbb{C}^n, \sum_i |z_i|^2 < 1\}$ par des réseaux cocompacts bien choisis de $\mathrm{SU}(n, 1)$. Définis sur des corps CM auxilliaires (Shimura).
- Action galoisienne sur leur cohomologie ℓ-adique décrite en terme de formes automorphes pour $\mathrm{GL}(n + 1)$ (Langlands, Kottwitz, Clozel, Harris-Taylor,...).

Représentations galoisiennes automorphes

Représentations galoisiennes automorphes

Soit π automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ telle que :

Représentations galoisiennes automorphes

Soit π automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ telle que :

(i) (polarisation) $\pi \simeq \pi^\vee \otimes \chi$ pour un certain caractère de Hecke χ de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^*$,

Représentations galoisiennes automorphes

Soit π automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ telle que :

(i) (polarisation) $\pi \simeq \pi^\vee \otimes \chi$ pour un certain caractère de Hecke χ de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^*$,

(ii) (algébricité) le caractère infinitésimal de π_∞, vu dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, a des valeurs propres distinctes et dans $\mathbb{Z}$ (les "poids de π").

Représentations galoisiennes automorphes

Soit π automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ telle que :

(i) (polarisation) $\pi \simeq \pi^\vee \otimes \chi$ pour un certain caractère de Hecke χ de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*$,

(ii) (algébricité) le caractère infinitésimal de π_∞, vu dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, a des valeurs propres distinctes et dans $\mathbb{Z}$ (les "poids de π").

Soient ℓ un nombre premier, $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et $S \supset \{\ell\} \cup \mathrm{Ram}(\pi)$.

Représentations galoisiennes automorphes

Soit π automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ telle que :

(i) (polarisation) $\pi \simeq \pi^\vee \otimes \chi$ pour un certain caractère de Hecke χ de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^*$,

(ii) (algébricité) le caractère infinitésimal de π_∞, vu dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, a des valeurs propres distinctes et dans $\mathbb{Z}$ (les "poids de π").

Soient ℓ un nombre premier, $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et $S \supset \{\ell\} \cup \mathrm{Ram}(\pi)$.

Théorème

Il existe une unique représentation continue semisimple

$$\rho_{\pi,\iota} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

telle que pour tout $p \notin S$, $\rho_{\pi,\iota}(\mathrm{Frob}_p)^{\mathrm{ss}}$ et π_p se correspondent par la correspondance de Satake et ι.

(suite)

De plus, $\rho_{\pi,\iota|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est de de Rham si $p = \ell$, de semisimplifiée isomorphe au correspondant de Langlands de π_p si $p \neq \ell$.

(suite)

De plus, $\rho_{\pi,\iota|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est de de Rham si $p = \ell$, de semisimplifiée isomorphe au correspondant de Langlands de π_p si $p \neq \ell$.

- Travaux de nombreux auteurs : Eichler, Shimura, Deligne, Serre, Carayol, Langlands, Kottwitz, Clozel, Harris, Taylor, Laumon, Ngô, Waldspurger, Labesse, Shin,... + ϵ !

(suite)

De plus, $\rho_{\pi,\iota|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est de de Rham si $p = \ell$, de semisimplifiée isomorphe au correspondant de Langlands de π_p si $p \neq \ell$.

- Travaux de nombreux auteurs : Eichler, Shimura, Deligne, Serre, Carayol, Langlands, Kottwitz, Clozel, Harris, Taylor, Laumon, Ngô, Waldspurger, Labesse, Shin,... + ϵ !
- Ma contribution (Ch.-Harris) : "cas restants" où n est pair et tous les poids sont consécutifs.

(suite)

De plus, $\rho_{\pi,\iota|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est de de Rham si $p=\ell$, de semisimplifiée isomorphe au correspondant de Langlands de π_p si $p \neq \ell$.

- Travaux de nombreux auteurs : Eichler, Shimura, Deligne, Serre, Carayol, Langlands, Kottwitz, Clozel, Harris, Taylor, Laumon, Ngô, Waldspurger, Labesse, Shin,... $+\,\epsilon$!
- Ma contribution (Ch.-Harris) : "cas restants" où n est pair et tous les poids sont consécutifs. Argument de congruences après réduction au cas CM, utilisant mes travaux sur la "fougère infinie".

Digression : l'alternative symplectique-orthogonale

Digression : l'alternative symplectique-orthogonale

Théorème (Bellaïche-Ch.)

Si n est pair et $\chi_\iota(c_\infty) = -1$ (resp. sinon), il existe un accouplement $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$-équivariant, non-dégénéré, et alterné (resp. symétrique) $\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota} \rightarrow \chi_\iota$.

Digression : l'alternative symplectique-orthogonale

Théorème (Bellaïche-Ch.)

Si n est pair et $\chi_\iota(c_\infty) = -1$ (resp. sinon), il existe un accouplement $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$-équivariant, non-dégénéré, et alterné (resp. symétrique) $\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota} \to \chi_\iota$.

- On démontre d'abord un analogue "CM" (conjecturé par Gross et Clozel-Harris-Taylor).

Digression : l'alternative symplectique-orthogonale

Théorème (Bellaïche-Ch.)

Si n est pair et $\chi_\iota(c_\infty) = -1$ (resp. sinon), il existe un accouplement $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$-équivariant, non-dégénéré, et alterné (resp. symétrique) $\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota} \rightarrow \chi_\iota$.

- On démontre d'abord un analogue "CM" (conjecturé par Gross et Clozel-Harris-Taylor).
- Cet analogue est réduit à un cas évident (n impair, représentation irréductible) par argument de congruence (fougère infinie).

Digression : l'alternative symplectique-orthogonale

Théorème (Bellaïche-Ch.)

Si n est pair et $\chi_\iota(c_\infty) = -1$ (resp. sinon), il existe un accouplement $\mathrm{G}_{\mathbb{Q},S}$-équivariant, non-dégénéré, et alterné (resp. symétrique) $\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota} \to \chi_\iota$.

- On démontre d'abord un analogue "CM" (conjecturé par Gross et Clozel-Harris-Taylor).
- Cet analogue est réduit à un cas évident (n impair, représentation irréductible) par argument de congruence (fougère infinie).
- Utilise de manière importante des cas de fonctorialité de Langlands (changement de base (Labesse), $U(n) \times U(1) \to U(n+1)$ (Clozel-Harris-Labesse)).

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$,

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$, $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $g \neq 1$.

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$, $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $g \neq 1$.

1. $\exists r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ irréductible, $r(g) \neq 1$.

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$, $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $g \neq 1$.

1. $\exists r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ irréductible, $r(g) \neq 1$.
2. $r \leftrightarrow \pi(r)$ supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (Langlands local : Harris-Taylor, Henniart).

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$, $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $g \neq 1$.

1. $\exists r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ irréductible, $r(g) \neq 1$.
2. $r \leftrightarrow \pi(r)$ supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (Langlands local : Harris-Taylor, Henniart).
3. On cherche π algébrique polarisée non ramifiée hors de S telle que $\pi_p \simeq \pi(r)$, la considération de $\rho_{\pi,\iota}$ conclurait.

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$, $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $g \neq 1$.

1. $\exists r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ irréductible, $r(g) \neq 1$.
2. $r \leftrightarrow \pi(r)$ supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (Langlands local : Harris-Taylor, Henniart).
3. On cherche π algébrique polarisée non ramifiée hors de S telle que $\pi_p \simeq \pi(r)$, la considération de $\rho_{\pi,\iota}$ conclurait.
4. Problème : obstructions sur r (polarisation, alternative symplectique-orthogonale).

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$, $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $g \neq 1$.

1. $\exists r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ irréductible, $r(g) \neq 1$.
2. $r \leftrightarrow \pi(r)$ supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (Langlands local : Harris-Taylor, Henniart).
3. On cherche π algébrique polarisée non ramifiée hors de S telle que $\pi_p \simeq \pi(r)$, la considération de $\rho_{\pi,\iota}$ concluerait.
4. Problème : obstructions sur r (polarisation, alternative symplectique-orthogonale).
5. On construit $\pi \simeq \pi^\vee|\cdot|$ algébrique de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, non ramifiée hors de S, via la formule des traces (tordue) d'Arthur, telle que $\mathrm{L}(\pi_p) \simeq r|\cdot|^s \oplus r^\vee|\cdot|^{1-s}$, pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Esquisse de preuve de l'injectivité de μ

$S = \{p, \ell\}$ avec $\ell \neq p$, $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $g \neq 1$.

1. $\exists r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ irréductible, $r(g) \neq 1$.
2. $r \leftrightarrow \pi(r)$ supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (Langlands local : Harris-Taylor, Henniart).
3. On cherche π algébrique polarisée non ramifiée hors de S telle que $\pi_p \simeq \pi(r)$, la considération de $\rho_{\pi,\iota}$ concluerait.
4. Problème : obstructions sur r (polarisation, alternative symplectique-orthogonale).
5. On construit $\pi \simeq \pi^\vee|\cdot|$ algébrique de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, non ramifiée hors de S, via la formule des traces (tordue) d'Arthur, telle que $\mathrm{L}(\pi_p) \simeq r|\cdot|^s \oplus r^\vee|\cdot|^{1-s}$, pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Représentations automorphes de conducteur 1

Représentations automorphes de conducteur 1

Problème : Déterminer le nombre

$$N(k_1, \cdots, k_n)$$

des π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ algébriques polarisées telles que π_p non ramifiée pour tout p, de poids $k_1 > \cdots > k_n$.

Représentations automorphes de conducteur 1

Problème : Déterminer le nombre

$$N(k_1, \cdots, k_n)$$

des π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ algébriques polarisées telles que π_p non ramifiée pour tout p, de poids $k_1 > \cdots > k_n$.

Exemple : $N(k-1, 0) = \dim S_k(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$.

Représentations automorphes de conducteur 1

Problème : Déterminer le nombre

$$N(k_1, \cdots, k_n)$$

des π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ algébriques polarisées telles que π_p non ramifiée pour tout p, de poids $k_1 > \cdots > k_n$.

Exemple : $N(k-1, 0) = \dim S_k(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$.

- $N(k_1, \cdots, k_n) < \infty$ (Harish-Chandra).

Représentations automorphes de conducteur 1

Problème : Déterminer le nombre

$$N(k_1, \cdots, k_n)$$

des π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ algébriques polarisées telles que π_p non ramifiée pour tout p, de poids $k_1 > \cdots > k_n$.

Exemple : $N(k-1, 0) = \dim S_k(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$.

- $N(k_1, \cdots, k_n) < \infty$ (Harish-Chandra).
- Problème équivalent au décompte conjectural des $\mathbb{Q}$-motifs purs polarisés, réguliers, de conducteur 1 en fonction de leurs poids de Hodge (Langlands).

Représentations automorphes de conducteur 1

Problème : Déterminer le nombre

$$N(k_1, \cdots, k_n)$$

des π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ algébriques polarisées telles que π_p non ramifiée pour tout p, de poids $k_1 > \cdots > k_n$.

Exemple : $N(k-1, 0) = \dim S_k(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$.

- $N(k_1, \cdots, k_n) < \infty$ (Harish-Chandra).
- Problème équivalent au décompte conjectural des $\mathbb{Q}$-motifs purs polarisés, réguliers, de conducteur 1 en fonction de leurs poids de Hodge (Langlands). Traduction : si $k_n = 0$ et $\pi \leftrightarrow M$, $h_{p,q}(M) \neq 0 \Leftrightarrow (p, q) = (k_i, k_1 - k_i)$, auquel cas $h_{p,q}(M) = 1$.

Une table en rang ≤ 8

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

- la triviale pour $n = 1$,

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

- la triviale pour $n = 1$,
- 7 pour $n = 2$,

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

- la triviale pour $n = 1$,
- 7 pour $n = 2$,
- $\mathrm{Sym}^2\Delta$ pour $n = 3$,

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

- la triviale pour $n = 1$,
- 7 pour $n = 2$,
- $\mathrm{Sym}^2\Delta$ pour $n = 3$,
- 7 pour $n = 4$ ($k_1 = 19$, 21 ($\times 3$), 23 ($\times 3$)),

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

- la triviale pour $n = 1$,
- 7 pour $n = 2$,
- $\mathrm{Sym}^2\Delta$ pour $n = 3$,
- 7 pour $n = 4$ ($k_1 = 19$, 21 ($\times 3$), 23 ($\times 3$)),
- 7 pour $n = 6$ ($k_1 = 23$),

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

- la triviale pour $n = 1$,
- 7 pour $n = 2$,
- $\mathrm{Sym}^2\Delta$ pour $n = 3$,
- 7 pour $n = 4$ ($k_1 = 19$, 21 ($\times 3$), 23 ($\times 3$)),
- 7 pour $n = 6$ ($k_1 = 23$),
- 1 pour $n = 7$, de poids $(24, 20, 16, 12, 8, 4, 0)$ (type G_2),

Une table en rang ≤ 8

Théorème* (Ch.-Renard)

Explicitation et implémentation sur ordinateur d'une formule pour $N(k_1, \cdots, k_n)$ pour $n \leq 8$.

Exemples : $k_n = 0$ et $k_1 \leq 24$, exactement 26 représentations.

- la triviale pour $n = 1$,
- 7 pour $n = 2$,
- $\mathrm{Sym}^2\Delta$ pour $n = 3$,
- 7 pour $n = 4$ ($k_1 = 19$, 21 ($\times 3$), 23 ($\times 3$)),
- 7 pour $n = 6$ ($k_1 = 23$),
- 1 pour $n = 7$, de poids $(24, 20, 16, 12, 8, 4, 0)$ (type G_2),
- 2 pour $n = 8$ ($k_1 = 24$, types SO_8 et Spin_7).

Principe de la démonstration

Principe de la démonstration

- Outil :

Principe de la démonstration

- Outil : Description du spectre discret automorphe des groupes classiques en terme de celui des $\mathrm{GL}(m)$

Principe de la démonstration

- Outil : Description du spectre discret automorphe des groupes classiques en terme de celui des $\mathrm{GL}(m)$ (travaux récents d'Arthur, reposant sur des travaux de Langlands, Kottwitz, Shelstad, Waldspurger, Ngô...).

Principe de la démonstration

- Outil : Description du spectre discret automorphe des groupes classiques en terme de celui des $\mathrm{GL}(m)$ (travaux récents d'Arthur, reposant sur des travaux de Langlands, Kottwitz, Shelstad, Waldspurger, Ngô...).
- Calcul de dimension d'espaces de formes automorphes pour les $\mathbb{Z}$-formes semisimples de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ avec $n = 7, 8, 9$,

Principe de la démonstration

- Outil : Description du spectre discret automorphe des groupes classiques en terme de celui des $\mathrm{GL}(m)$ (travaux récents d'Arthur, reposant sur des travaux de Langlands, Kottwitz, Shelstad, Waldspurger, Ngô...).
- Calcul de dimension d'espaces de formes automorphes pour les $\mathbb{Z}$-formes semisimples de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ avec $n = 7, 8, 9$, et de formes de Siegel vectorielles pour $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ (Tsushima) et $\mathrm{Sp}(6, \mathbb{Z})$ (Bergström, Faber, Van der Geer).

Principe de la démonstration

- Outil : Description du spectre discret automorphe des groupes classiques en terme de celui des $\mathrm{GL}(m)$ (travaux récents d'Arthur, reposant sur des travaux de Langlands, Kottwitz, Shelstad, Waldspurger, Ngô...).
- Calcul de dimension d'espaces de formes automorphes pour les $\mathbb{Z}$-formes semisimples de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ avec $n = 7, 8, 9$, et de formes de Siegel vectorielles pour $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ (Tsushima) et $\mathrm{Sp}(6, \mathbb{Z})$ (Bergström, Faber, Van der Geer).
- Explicitation de la formule de multiplicité d'Arthur : expression de ces dimensions en fonction d'une collection de $N(-)$. Inversion par récurrence sur n.

Une motivation : formes quadratiques entières

Une motivation : formes quadratiques entières

On considère les réseaux entiers euclidiens pairs de déterminant 1 ou 2 dans $\mathbb{R}^n$

Une motivation : formes quadratiques entières

On considère les réseaux entiers euclidiens pairs de déterminant 1 ou 2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$).

Une motivation : formes quadratiques entières

On considère les réseaux entiers euclidiens pairs de déterminant 1 ou 2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$).

Classifiés à isométries près en rang $n \leq 25$ (Mordell, Witt, Kneser, Niemeier, Borcherds).

Une motivation : formes quadratiques entières

On considère les réseaux entiers euclidiens pairs de déterminant 1 ou 2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$).

Classifiés à isométries près en rang $n \leq 25$ (Mordell, Witt, Kneser, Niemeier, Borcherds).

Problème : Collection mystérieuse de représentations automorphes π de $\mathrm{SO}(n)$ de conducteur 1, telles que $\pi_\infty = 1$, à déterminer.

Une motivation : formes quadratiques entières

On considère les réseaux entiers euclidiens pairs de déterminant 1 ou 2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$).

Classifiés à isométries près en rang $n \leq 25$ (Mordell, Witt, Kneser, Niemeier, Borcherds).

Problème : Collection mystérieuse de représentations automorphes π de $\mathrm{SO}(n)$ de conducteur 1, telles que $\pi_\infty = 1$, à déterminer.

- Travaux avec Lannes : $n \leq 24$. Applications au dénombrement des p-voisins de Kneser des 24 réseaux de Niemeier.

Une motivation : formes quadratiques entières

On considère les réseaux entiers euclidiens pairs de déterminant 1 ou 2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$).

Classifiés à isométries près en rang $n \leq 25$ (Mordell, Witt, Kneser, Niemeier, Borcherds).

Problème : Collection mystérieuse de représentations automorphes π de $\mathrm{SO}(n)$ de conducteur 1, telles que $\pi_\infty = 1$, à déterminer.

- Travaux avec Lannes : $n \leq 24$. Applications au dénombrement des p-voisins de Kneser des 24 réseaux de Niemeier.

Cas $p = 2$ dû à Niemeier, Borcherds, Nebe-Venkov. Cas particuliers dûs à Ikeda, Borcherds-Freitag-Weissauer.

25 représentations de $\mathrm{SO}(24)$ de conducteur 1

25 représentations de SO(24) de conducteur 1

$$[1] \oplus [23]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus [21]$$
$$\Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17]$$
$$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15]$$
$$\Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13]$$
$$\Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11]$$
$$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$$
$$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta[2] \oplus [9]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta[2] \oplus [9]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9]$$
$$\Delta_{15}[8] \oplus [1] \oplus [7]$$
$$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [7]$$
$$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [7]$$
$$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta[6] \oplus [5]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta[2] \oplus [5]$$
$$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta[8] \oplus [1] \oplus [3]$$
$$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [3]$$
$$\mathrm{Sym}^2\Delta \oplus \Delta[10] \oplus [1]$$
$$\Delta[12] \ (\times 2)$$

- $n = 25$ (121 représentations) : les 23 représentations π telles que $k_1 \leq 23$ ci-dessus interviennent et suffisent !

- $n = 25$ (121 représentations) : les 23 représentations π telles que $k_1 \leq 23$ ci-dessus interviennent et suffisent !
- $n = 31, 32$: plus d'un milliard d'éléments... classifiables ?

- $n = 25$ (121 représentations) : les 23 représentations π telles que $k_1 \leq 23$ ci-dessus interviennent et suffisent !
- $n = 31, 32$: plus d'un milliard d'éléments... classifiables ?