

UNIVERSITÉ PARIS XI

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Présenté par

Gaëtan CHENEVIER

Représentations galoisiennes automorphes et conséquences arithmétiques des conjectures de Langlands et Arthur

Soutenu le 29 Mars 2013

Jury

Laurent CLOZEL
Michael HARRIS
Guy HENNIART
Jean LANNES
Jean-Pierre SERRE
Jacques TILOUINE

Université Paris XI
Université Paris VII
(Rapporteur) Université Paris XI
Université Paris VII
Collège de France
(Rapporteur) Université Paris XIII

Autre rapporteur : Richard TAYLOR, Institute for Advanced Studies, Princeton.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	v
Chapitre 1. La fougère infinie des représentations galoisiennes et applications	1
1. Représentations galoisiennes automorphes	1
2. Interlude : variétés de caractères et analogues p -adiques	12
3. La fougère infinie et la densité des points modulaires	20
4. Analogues locaux cristallins	46
Chapitre 2. Quelques conséquences des conjectures de Langlands et Arthur	51
1. Corps de nombres à ramification prescrite : le lemme de Dehn arithmétique.	51
2. Voisins de Kneser des réseaux de Niemeier et formes automorphes pour $O(24)$	60
3. Motifs de conducteurs 1 et quelques problèmes associés	80
4. Quelques cas des conjectures de Bloch-Kato	95
Bibliographie	101

Remerciements

Je remercie chaleureusement Michael Harris de m'avoir initié à la théorie des formes automorphes, et de m'avoir généreusement fait partagé, tout au long de ces dix dernières années, ses idées stimulantes et sa vision unique sur ce magnifique sujet. Je pense également à ma longue et enrichissante collaboration avec Joël Bellaïche, notamment à nos innombrables discussions sur les conjectures de Langlands et Arthur : merci Joël !

Je voudrais exprimer ma sincère gratitude à Guy Henniart, Richard Taylor et Jacques Tilouine qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail, et ce malgré les délais contraignants qui leurs étaient imposés. Je remercie tout particulièrement Guy Henniart d'avoir accepté avec enthousiasme d'être le coordinateur de cette habilitation, et aussi pour ses encouragements. Je suis également très honoré que Laurent Clozel, Michael Harris, Jean Lannes et Jean-Pierre Serre aient accepté de faire partie de mon jury.

C'est avec grand plaisir que je remercie mes collaborateurs Teodor Banica, Joël Bellaïche, Laurent Berger, Julien Bichon, Laurent Clozel, Michael Harris, Chandrashekhara Khare, Jean Lannes, Michael Larsen, et David Renard, pour les joies que j'ai eues à travailler avec eux et pour ce qu'ils ont rendu possible. Je suis particulièrement redevable à Laurent Clozel et Jean Lannes de ce qu'ils m'ont appris. Merci aussi aux autres, qui ont régulièrement répondu à mes questions, ou avec qui j'ai eu des discussions mathématiques inspirantes ; je pense notamment à Ahmed Abbes, Nicolas Bergeron, Christophe Breuil, Emmanuel Breuillard, Kevin Buzzard, Pierre Colmez, Christophe Cornut, Jean-François Dat, Matthew Emerton, Laurent Fargues, Jean-Pierre Labesse, Vincent Lafforgue, Julien Marché, Barry Mazur, Colette Moeglin, Fabrice Orgogozo, et Claudio Procesi.

Un survol de ce mémoire suffit pour se rendre compte de toute l'importance dans ma recherche, parfois même dépendance, des travaux de nombreux mathématiciens. Il serait maladroit ici de tenter de les énumérer tous, mais leurs apparitions au fil du texte rendra, je l'espère, claire au lecteur, toute l'admiration que j'ai pour leur travail.

Depuis ma thèse, j'ai eu la chance de bénéficier des ambiances chaleureuses et motivantes de l'équipe de géométrie arithmétique du L.A.G.A., de l'I.H.É.S. et du C.M.L.S. J'adresse un grand merci à tous mes collègues ou ex-collègues de ces institutions. Merci aussi à tous ceux ayant rendu techniquement possible cette soutenance !

Merci enfin à tous mes amis que j'ai plaisir à saluer ici. Ma pensée la plus chère va à Valeria et Julia : merci pour tout le bonheur que vous m'apportez.

Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter des résultats en mathématiques que j'ai obtenus depuis ma thèse, en vue de l'obtention d'une habilitation à diriger des recherches. Mes travaux portent principalement sur l'étude des représentations du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q} et sur divers problèmes arithmétiques qui leurs sont attachés de manière plus ou moins cachée. Ils sont presque tous inspirés des conjectures de R. P. Langlands, ou des raffinements de ces dernières proposés par J. Arthur.

Le texte est organisé en deux parties, qui bien que profondément reliées peuvent être lues de manière indépendante. La première traite des représentations galoisiennes "automorphes", c'est-à-dire qui sont attachées aux représentations automorphes cuspidales de $GL(n)$, et de leurs déformations. Ma contribution principale à ce thème est la construction et l'étude de la fougère infinie, un certain sous-ensemble aux allures fractales de la variété des caractères p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. J'en ai obtenu plusieurs applications :

- Construction de représentations galoisiennes automorphes en poids peu réguliers.
- Détermination de l'alternative symplectique/orthogonale pour les représentations galoisiennes automorphes essentiellement autoduales sur les corps totalement réels. Détermination du "signe" des représentations galoisiennes automorphes polarisées sur les corps CM.
- Étude de l'adhérence Zariski des représentations galoisiennes automorphes dans la variété des caractères p -adique et analogues locaux cristallins.

Le second versant de mes recherches, exposé dans la seconde partie, a été porté par la volonté de comprendre ce que disent les conjectures d'Arthur-Langlands sur les objets les plus familiers de la théorie des nombres.

En effet, les progrès récents en théorie des formes automorphes à plusieurs variables établissent une partie de ces conjectures, et donnent du corps à ce rêve imaginé par Langlands. Je pense notamment à la démonstration par M. Harris et R. Taylor, puis G. Henniart, de la conjecture de Langlands locale, celle par G. Laumon, B.C. Ngô et J.-L. Waldspurger du lemme fondamental de Langlands, ou encore la classification par Arthur du spectre discret automorphe des groupes classiques. Malgré l'incroyable complexité des démonstrations, ces énoncés sont fascinants par leur extrême beauté, et d'une certaine façon, par leur simplicité. Ils forment aussi un outil nouveau formidable pour l'arithméticien. La fraîche démonstration de la conjecture de Sato-Tate en est une illustration frappante.

Dans ce texte, je vais exposer quelques autres applications plus modestes de cet outil que j'ai découvertes dans mes recherches, souvent guidé par mon attrait pour les objets "peu ramifiés" en théorie des nombres :

- Construction de corps de nombres à ramification prescrite, structure du groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de \mathbb{Q} non ramifiée hors d'un ensemble fini de nombres premiers fixés.
- Énumération des voisins de Kneser des réseaux unimodulaires pairs en rang ≤ 24 . Applications aux conjectures de Harder et de Nebe-Venkov.
- Énumération conjecturale des motifs purs sur \mathbb{Q} de conducteur 1 (réguliers, polarisés) en petit rang, calculs de dimensions d'espaces de formes automorphes pour les petits groupes réductifs sur \mathbb{Z} .
- Construction par voie automorphe d'extensions galoisiennes prévues par les conjectures de Bloch et Kato.

BONNE LECTURE !

TRAVAUX PRÉSENTÉS

Je vais présenter dans ce mémoire les résultats des articles publiés ou à paraître [1] à [13] suivants, ainsi que ceux des prépublications [A] à [D]. Ils sont disponibles sur mon site internet <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/>. Je renvoie à la bibliographie générale pour la liste complète de mes publications.

[13] *Construction of automorphic Galois representations II*, avec M. Harris, à paraître à Cambridge Journal of Math. 1 (2013).

[12] *Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p* , à paraître à Math. Annalen.

[11] *On the infinite fern of Galois representations of unitary type*, Ann. Sci. É.N.S. 44, 963-1019 (2011).

[10] *The sign of Galois representations attached to automorphic forms for unitary groups*, avec J. Bellaïche, Compositio Math. 147, 1337-1352 (2011).

[9] *The p -adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudorepresentations over arbitrary rings*, à paraître aux *Proceedings of the LMS Durham Symposium, Automorphic forms and Galois representations* (2011).

[8] *On the vanishing of some non semisimple orbital integrals*, avec D. Renard, Expo. Math. 28, 276-289 (2010).

[7] *Families of Galois representations and Selmer groups*, avec J. Bellaïche, Astérisque 324, Soc. Math. France (2009), 331 pages.

[6] *Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales*, avec L. Clozel, Journal of the A.M.S. 22, 467-519 (2009).

[5] *Quelques courbes de Hecke se plongent dans l'espace de Colmez*, Journal of Number Theory 128, 2430-2449 (2008).

[4] *On number fields with given ramification*, Compositio Math. 143, 1359-1373 (2007).

[3] *Lissité de la courbe de Hecke de $GL(2)$ aux points Eisenstein critiques*, avec J. Bellaïche, Journal Inst. Math. Jussieu 5 (2006).

[2] *Formes non tempérées pour $U(3)$ et conjectures de Bloch-Kato*, avec J. Bellaïche, Ann. Sci. É.N.S. 37, 611-662 (2004).

[1] *Familles p -adiques de formes automorphes pour $GL(n)$* , Journal für die reine und angewandte Mathematik 570, 143-217 (2004).

[D] *Level one algebraic cuspforms of classical groups of small ranks*, avec D. Renard, prépublication (2012).

[C] *Kneser neighbours and orthogonal Galois representations in dimensions 16 and 24*, avec J. Lannes, Algebraic Number Theory, Oberwolfach Report 31 (2011).

[B] *Sur la variété des caractères p -adique du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p* , prépublication (2009).

[A] *Une application des variétés de Hecke des groupes unitaires*, article pour le tome 2 du projet de livre dirigé par Michael Harris, prépublication (2009).

CHAPITRE 1

La fougère infinie des représentations galoisiennes et applications

1. Représentations galoisiennes automorphes

1.1. Notations. Soit ℓ un nombre premier et soit $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique¹ du corps \mathbb{Q}_ℓ des nombres ℓ -adiques. Nous allons dans ce chapitre considérer des représentations continues

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

où F est soit un corps de nombres, soit un corps local, de groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Comme tout groupe de Galois absolu, ce dernier n'est bien défini que si l'on fixe une clôture algébrique \overline{F} de F , sinon il ne l'est qu'à automorphismes intérieurs près. Cette ambiguïté n'aura cependant jamais d'incidence car seules ses classes de conjugaison d'éléments, ou encore les classes d'isomorphie de ses représentations, nous intéresseront.

On rappelle que si v est une place d'un corps de nombres F , de complétion associée F_v , on dispose d'une classe de conjugaison canonique de morphismes de groupes

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \rightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$$

continus et injectifs, dont les images sont les *sous-groupes de décomposition en v* de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Si ρ est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, on notera $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$, ou simplement ρ_v , la composée de ρ par un tel homomorphisme. La représentation ρ_v est bien définie à isomorphisme près.

Nous ferons dans ce texte un usage constant de la paramétrisation de Langlands des représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ quand F est un corps local (i.e. pour nous $F \simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou une extension finie de \mathbb{Q}_p). Pour un tel corps F , on désignera par W_F le groupe de Weil de F [TAT79] et par W'_F son groupe de Weil-Deligne. Rappelons que $W'_F = W_F \times \mathrm{SU}(2)$ si F est non archimédien et $W'_F = W_F$ sinon. Ce sont des groupes topologiques localement compacts. Si π est une représentation complexe admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, il lui est associé de manière naturelle un paramètre de Langlands, c'est-à-dire une représentation semisimple continue

$$L(\pi) : W'_F \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Cette paramétrisation est due à Langlands [LAN73B] quand F est archimédien, à Harris-Taylor [HT01] et Henniart [HEN00] sinon. Mieux, l'application $\pi \mapsto L(\pi)$ induit une bijection entre classes d'isomorphie de représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ et classes d'isomorphie de représentations complexes semisimples continues de dimension n de W'_F .

¹On désignera généralement par \overline{k} une clôture algébrique du corps k .

Le cas à la fois le plus simple et le plus utile de cette correspondance est celui où F est non archimédien et π est non ramifiée, c'est-à-dire possédant des invariants non-triviaux sous $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, où \mathcal{O}_F désigne l'anneau des entiers de F . Ces représentations correspondent alors aux paramètres, aussi dit non-ramifiés, qui se factorisent par le quotient canonique $W'_F \rightarrow \mathbb{Z}$ envoyant sur 1 tout relèvement du Frobenius géométrique du corps résiduel de F . Ces paramètres sont donc uniquement déterminés par l'image de 1, qui est un élément semisimple quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On retrouve ainsi la paramétrisation de Satake [SAT63] des représentations non ramifiées de $\mathrm{GL}_n(F)$ par les classes de conjugaison semisimples dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, dans l'esprit de Langlands [LAN67], [LAN70].

Lorsque F est non archimédien, les représentations complexes continues de dimension n de W'_F sont en bijection naturelle avec les représentations dites de Weil-Deligne de F , dans lesquelles l'action du $\mathrm{SU}(2)$ est remplacée par un opérateur nilpotent ("monodromie"), et pour lesquelles nous renvoyons à [TAT79]. Les représentations de Weil-Deligne ont un sens à coefficients dans n'importe quel corps. Lorsque ce coefficient est $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et que ℓ n'est pas la caractéristique du corps résiduel de F , le théorème de monodromie ℓ -adique de Grothendieck met en bijection naturelle représentations continues $W_F \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et représentations de Weil-Deligne de F qui sont de dimension n et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (voir *loc.cit.*).

1.2. Quelques conjectures du folklore. Je rappelle dans ce paragraphe quelques conjectures du folklore reliant représentations galoisiennes et représentations automorphes.

Soit F un corps de nombres et soit π une représentation automorphe cuspidale de GL_n sur F . On dira que la représentation π est *algébrique* si pour tout plongement complexe $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$, de place archimédienne sous-jacente v , le paramètre de Langlands de π_v restreint à $W_{\overline{F}_v}$, identifié via σ à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$, est une somme directe de caractères

$$z \mapsto z^{p_{i,\sigma}} \overline{z}^{q_{i,\sigma}}$$

avec $p_{i,\sigma}, q_{i,\sigma} \in \mathbb{Z}$ et $i = 1, \dots, n$. Sous cette simple hypothèse, on conjecture depuis Weil, Eichler, Shimura, Serre et Langlands que les composantes locales aux places finies de π sont définies sur le sous-corps $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ des nombres algébriques. Admettant cela, on conjecture de plus que pour tout plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ il existe une représentation continue irréductible

$$\rho_{\pi,\iota} : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

satisfaisant la condition suivante :

- (C1) *Pour toute place finie v de F ne divisant pas ℓ et telle que π_v est non ramifiée, la représentation $(\rho_{\pi,\iota})|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ est non ramifiée et le polynôme caractéristique de $\rho_{\pi,\iota}(\mathrm{Frob}_v)$ coïncide avec l'image par ι du polynôme caractéristique du paramètre de Satake de π_v .*

La notation Frob_v désigne ici un relèvement quelconque du Frobenius géométrique d'un groupe de décomposition en v de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Observons que d'après le théorème de Cebotarev et la théorie des caractères des représentations linéaires, toute représentation semisimple $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ satisfaisant (C1) est nécessairement unique à isomorphisme près.

Il convient de signaler que certains auteurs, comme Borel dans [BOR77, §18.2], et suivant Weil, utilisent le terme "de type A_0 " pour "algébrique". Langlands utilise parfois aussi le terme "de type Hodge" [LAN97]. Mentionnons aussi l'article de Clozel [CLO90], qui traite notamment la question du corps de définition des π_v avec v finie sous l'hypothèse que les π_v avec v archimédiens sont de type "cohomologique". Cela le conduit d'ailleurs à appeler algébrique un π tel que $\pi \otimes |\det(\cdot)|^{\frac{n-1}{2}}$ l'est au sens ci-dessus. Nous renvoyons à l'article récent de Buzzard et Gee [BG11] pour des clarifications sur les différentes notions d'algébricité.

Supposant l'existence (et donc unicité) de $\rho_{\pi,\iota}$ satisfaisant (C1) acquise, on dispose aussi d'un supplément conjectural précisant cette représentation à toutes les places, qu'il sera commode dans la discussion qui suit de découper en trois énoncés.

(C2) *Pour toute place finie v de F ne divisant pas ℓ , la représentation de Weil-Deligne Frobenius-semisimplifiée associée à $\rho_{\pi,\iota}|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ est l'image par ι de la représentation de Weil-Deligne définie par $L(\pi_v)$.*

(C3) *Pour toute place v de F divisant ℓ , la représentation $(\rho_{\pi,\iota})|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ est de De Rham au sens de Fontaine [PP88], et la représentation de Weil-Deligne Frobenius-semisimplifiée associée à son D_{pst} , est l'image par ι de la représentation de Weil-Deligne définie par $L(\pi_v)$.*

(C4) *Pour toute place réelle v de F , la trace d'une conjugaison complexe en v est de la forme $a_v - b_v$ où $a_v + b_v$ est le nombre de caractères (de dimension 1) de $W_{\mathbb{R}}$ apparaissant dans $L(\pi_v)$, et où a_v est le nombre de ces caractères qui sont de la forme $|\cdot|^{2m}$ ou $\varepsilon|\cdot|^{2m+1}$ avec $m \in \mathbb{Z}$.*

Dans (C4), ε désigne le caractère d'ordre 2 de $W_{\mathbb{R}}$. Pour des raisons d'exhaustivité, mentionnons que l'on conjecture d'après Tate que les représentations de Weil-Deligne associées aux $(\rho_{\pi,\iota})|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ sont déjà Frobenius-semisimples quand ℓ est premier à v . De plus, la description complète de $\rho_{\pi,\iota}$ aux places restantes, i.e. divisant ℓ , est l'objet du *programme de Langlands p -adique* initié par Breuil [BRE10], [COL12]. La description des nombres de Hodge-Tate est en revanche élémentaire. En effet, si v est une telle place, et si $\sigma : F_v \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ est un plongement, alors ι et σ déterminent un plongement $\sigma' : F \rightarrow \mathbb{C}$. Les poids de Hodge-Tate de $(\rho_{\pi,\iota})_v$ associés à σ sont alors les $-p_{i,\sigma'}$, $i = 1, \dots, n$, sous la convention que le poids de Hodge-Tate du caractère cyclotomique est -1 .

Dans cette généralité, l'existence de $\rho_{\pi,\iota}$ satisfaisant (C1) à (C4) n'est connue que pour $n = 1$, par une construction fameuse due à Weil issue de la théorie du corps de classes. Pour $n > 1$, elle a fait l'objet de très nombreux travaux, notamment d'Eichler, Shimura, Igusa, Kuga, Deligne, Rappoport, Serre, Katz, Carayol, Mazur, Wiles, Takeshi Saito, et Faltings dans le cas $n = 2$ et $F = \mathbb{Q}$, auquel cas seule l'éventualité où $L(\pi_{\infty})$ est purement scalaire échappe encore à notre compréhension ("formes de Maass algébriques"). L'action galoisienne sur la cohomologie ℓ -adique des courbes modulaires, et plus généralement des courbes de Shimura, joue ici un rôle fondamental dans la construction des $\rho_{\pi,\iota}$. Toutes les généralisations qui ont suivi de ces travaux ont consisté en une étude de

²Strictement, il aurait fallu écrire "associé à la restriction de $(\rho_{\pi,\iota})|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ à $W_{F_v} \subset \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$...

plus en plus fine de l'action galoisienne sur la cohomologie des variétés de Shimura de dimension supérieure, qui s'est avérée notablement plus difficile d'une part pour des raisons géométriques, mais aussi pour les questions de L -indistinguabilité (Langlands, Kottwitz [KOT88]).

Sans doute faut-il mentionner, avant d'entrer dans la discussion de ces généralisations, que la conjecture ci-dessus admet une réciproque non moins fabuleuse (et tout aussi conjecturale), due à Fontaine et Mazur ([FM95]) : les représentations $\rho_{\pi,\iota}$ ainsi obtenues sont exactement les représentations irréductibles continues $\text{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui sont non ramifiées hors d'un ensemble fini de places, et dont la restriction aux groupes de décompositions aux places v divisant ℓ est de De Rham au sens de Fontaine. Là encore, cette conjecture n'est connue en toute généralité qu'en dimension 1 [FM95]. En dimension 2 et pour $F = \mathbb{Q}$, elle est corroborée par la démonstration de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil (Wiles [WIL95], Taylor-Wiles [TW95], Breuil-Conrad-Diamond-Taylor [BCDT]), et elle est maintenant démontrée dans de nombreux cas (Khare-Wintberger [KW09], Kisin [KIS09], Emerton [EME11]).

1.3. Cas des représentations régulières polarisées. Une représentation automorphe cuspidale algébrique π de GL_n sur F est dite *régulière*, si pour toute place archimédienne v de F , les entiers $p_{i,\sigma}$, $i = 1, \dots, n$, définis plus haut sont distincts. Nous dirons aussi que π est *polarisée* si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- Soit F est un corps totalement réel et $\pi^\vee \otimes \chi$ est isomorphe à π , où $\chi = \prod_v \chi_v$ est un caractère de Hecke de F tel que le signe $\chi_v(-1)$ est indépendant³ de la place réelle v de F .
- Soit F est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel F^+ (i.e. F est un corps CM) et $\pi^\vee \otimes |\cdot|^{1-n}$ est isomorphe à π^c , où c est le générateur de $\text{Gal}(F/F^+)$ et où π^c désigne le conjugué extérieur de π par c .

THÉOREME 1.4. *Soit π une représentation automorphe cuspidale algébrique, régulière et polarisée⁴ de GL_n sur F . Alors pour tout plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ il existe une unique représentation semisimple $\rho_{\pi,\iota}$ satisfaisant (C1), (C2) et (C3).*

Ce théorème est la synthèse de travaux de nombreux mathématiciens dont je vais tâcher de citer correctement les contributions dans ce qui suit. J'ai eu la chance, en grande partie offerte par mon directeur de thèse M. Harris, de participer à cet édifice, bien que de manière infime, par mon travail [CHE09A] et mon article avec Harris [CH09], que je décrirai brièvement. Il faut rajouter que le théorème ci-dessus repose aussi de manière fondamentale sur les travaux d'autres auteurs non directement associés à son énoncé, je pense notamment à Deligne, Grothendieck, Kottwitz, Langlands, Laumon, Ngô et Walsdpurger.

³Nous verrons plus loin que cette condition est conjecturalement automatique. C'est évident si n est impair car χ^n est le carré du caractère central de π , et donc $\chi_v(-1) = 1$ pour tout v . La notation $\pi \otimes \chi$ désigne abusivement $\pi \otimes \chi \circ \det$.

⁴Signalons que l'on trouve dans la littérature les acronymes RAESDC (cas totalement réel) et RASDC (cas CM) pour les représentations de l'énoncé.

Quand $n \leq 3$, l'existence de $\rho_{\pi, \iota}$ satisfaisant (C1) et partiellement (C2) est due à Blasius et Rogawski, dans le cadre du projet collectif sur la cohomologie des surfaces de Picard [LR92]. La classification endoscopique, par Rogawski, des représentations automorphes des groupes unitaires à trois variables joue un rôle très important dans ce travail [ROG90]. Quand $n = 2$, Blasius et Rogawski doivent rajouter une hypothèse de régularité supplémentaire sur π aux places archimédiennes, qui ne sera enlevée que plus tard par Wiles puis Taylor par un argument de congruences.

Pour n général, si π est de carré intégrable modulo le centre à au moins une place finie, l'existence de $\rho_{\pi, \iota}$ satisfaisant (C1) est due à Harris et Taylor [HT01] (voir aussi le complément de Taylor [TAY04] dans le cas totalement réel). Elle est découpée dans la cohomologie ℓ -adique des "variétés de Shimura simples" au sens de Kottwitz, qui sont des quotients arithmétiques cocompacts de la boule unité hermitienne $\sum_{i=1}^{n-1} |z_i|^2 < 1$ dans \mathbb{C}^{n-1} par certains réseaux de $\mathrm{PU}(n-1, 1)$. Ces travaux généralisent des constructions antérieures dans des cas partiels dues à Clozel [CLO91] (qui constituaient les premiers cas non triviaux connus en dimension générale), basées notamment sur des travaux de Kottwitz [KOT92]. Harris et Taylor démontrent en même temps la correspondance de Langlands locale, ainsi que (C2) à semisimplification près, affaiblissement supprimé plus tard par Taylor et Yoshida [TY07].

La construction de $\rho_{\pi, \iota}$ sans l'hypothèse de "carré intégrabilité à au moins une place finie", souvent gênante dans les applications arithmétiques, par exemple dans les problèmes de constructions d'extensions galoisiennes à la Ribet [RIB76], était notamment l'objet du projet de livre [GRFA11] initié par M. Harris. Il a fait aussi l'objet de travaux indépendants de Shin [SHI11] et de Morel [MOR10]. Ces travaux ont notamment été permis par la démonstration du lemme fondamentale de Langlands par Laumon-Ngô [LN08], Ngô [NGO10], et Waldspurger [WAL97], [WAL06], qui rend inconditionnelle la stabilisation de la formule des traces pour les groupes unitaires. En effet, c'est une étape nécessaire pour relier le calcul du nombre de points dans les corps fini des variétés de Shimura "unitaires" et les paramètres de Satake des formes automorphes mises en jeu (Langlands, Kottwitz).

D'une part, on savait depuis les travaux de Blasius-Rogawski ("patching lemma") et Harris-Taylor que l'on peut ramener le cas général du Théorème 1.4 au cas CM par changements de bases quadratiques (Arthur-Clozel). Harris et Labesse ont même observé que l'on peut se ramener, dans le cas CM, à la situation où F/F^+ est non ramifiée à toutes les places finies et décomposée aux places finies où π est ramifiée, hypothèse simplificatrice notamment pratique pour les questions de descente et de changement de base [LAB11] entre groupes unitaires et groupes linéaires. Dans ce cas, le théorème est dû indépendamment à Shin [SHI11] et à Clozel-Harris-Labesse [CHL11A], [CHL11B], en toute généralité quand n est impair, et sous une hypothèse parasite quand n est pair, de manière analogue au cas $n \leq 3$.

Clozel, Harris et Labesse demandent que pour tout $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$ on ait $|p_{i, \sigma} - p_{j, \sigma}| \geq 2$ si $i \neq j$, et pour Shin il est même suffisant d'imposer cette condition à une seule place archimédienne. Il serait trop long d'expliquer ici en détail la raison de l'apparition de cette condition dans le cas n pair. En deux mots, cela vient de l'obstruction au principe

de Hasse pour les groupes unitaires à un nombre pair de variables et des contraintes données par la formule de multiplicité à la Labesse-Langlands pour le transfert tempéré de $U(n) \times U(1)$ vers $U(n+1)$. On verra par ailleurs de multiples analogues de ces contraintes dans ce mémoire quand il sera question de mes travaux avec Lannes et avec Renard.

Ma contribution principale est d'avoir donné avec Harris dans [CH09] un argument permettant de déduire des cas précédents le cas général, i.e. de construire $\rho_{\pi,\ell}$ satisfaisant (C1), ainsi que (C2) à semisimplification près quand n est pair⁵, sans autres hypothèses que celles de l'énoncé. La propriété (C2) a été par la suite vérifiée en toute généralité par Caraiani [CAR12A]. Ce cas n pair "sans hypothèse de régularité supplémentaire" présentait un certain intérêt à l'époque, car c'était un ingrédient manquant important pour faire marcher la démonstration de la conjecture de Sato-Tate ([HSBT10],[CHT08],[TAY08]) dans le cas des courbes elliptiques sur \mathbb{Q} de j -invariant dans \mathbb{Z} . Une raison simple est que les Sym^{2k+1} des courbes elliptiques ne satisfont aucune des conditions de régularité ci-dessus.

Dans l'article avec Harris, nous commençons par nous ramener, en faisant des changements de base cycliques adéquats [AC89] et via une généralisation du "patching Lemma" de Blasius-Rogawski dû à Harris et Sorensen [SOR09], au cas où π admet des vecteurs invariants par un sous-groupe d'Iwahori en toutes les places de F divisant ℓ , chacune de ces places étant de plus décomposée sur F^+ . Sous cette hypothèse, nous utilisons alors un argument de déformation ℓ -adique pour trouver des congruences avec des représentations π' satisfaisant les mêmes hypothèses que π mais suffisamment régulières aux places archimédiennes. J'avais construit de telles congruences dans ma thèse [CHE04] (à la demande de Harris !) à ceci près que mon corps de base F était choisi quadratique imaginaire pour simplifier.

Dans l'article [CHE09A], j'ai repris ce travail en m'affranchissant de cette hypothèse sur F , une tâche d'ordre essentiellement technique. Les démonstrations passent par une descente au groupe unitaire à n variables relativement à F/F^+ qui est compact à toutes les places réelles et quasi-déployé aux places finies (cela existe si $[F^+ : \mathbb{Q}]$ est pair, ce que l'on peut toujours supposer). Les congruences cherchées sont alors conséquences triviales de ma construction des variétés de Hecke dans ce contexte, i.e. de la fougère infinie, sur laquelle je reviendrai en détail au §3.15. La propriété (C2) à semisimplification près s'obtient par un argument simple, découvert dans [CHE09A], basé sur la construction d'un pseudo-caractère universel de W_E dans le centre de Bernstein de $GL_n(E)$ quand E est un corps p -adique. L'inégalité susmentionnée concernant la monodromie découle d'observations simples sur les familles de représentations au sens des traces faites dans mon livre avec Bellaïche [BC09].

Dans tous les cas où la construction de $\rho_{\pi,\ell}$ est faite par voie géométrique, on obtient "gratuitement" une version affaiblie de (C3) sur $\rho_{\pi,\ell}$ comme conséquence des théorèmes

⁵Dans ce cas on a tout de même une majoration de la taille de la monodromie. Ainsi que nous l'avons observé avec J. Bellaïche dans notre livre [BC09], c'est d'ailleurs tout ce dont on a besoin pour les applications aux constructions d'extensions galoisiennes à la Ribet [RIB76], ou pour les démonstrations à la Wiles de la conjecture principale d'Iwasawa [WIL90].

de comparaisons en géométrie arithmétique, notamment la propriété d'être de De Rham ainsi que le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin dans le cas non ramifié. Une des innovations de mon article [CHE09A] est d'avoir compris comment préserver la propriété (C3) dans l'argument de déformation. En effet, il est bien connu que les représentations galoisiennes construites par limites dans des familles p -adiques comme celles apparaissant dans la fougère infinie ne sont pas en général de De Rham, loin s'en faut, même quand elles sont de Hodge-Tate. Mon astuce est de dédoubler tout d'abord par changement de base quadratique réel de F^+ toutes les places de F^+ divisant ℓ , puis de procéder par un argument de déformations en fixant les poids attachés à toutes les places archimédiennes sauf une⁶. Je conclus par les travaux de Berger-Colmez [BEC08] sur les familles analytiques de représentations "à poids de Hodge-Tate fixés", dont le lieu de De Rham est un fermé analytique comme le démontrent ces auteurs. Je note d'ailleurs qu'il est important dans cet argument d'utiliser les travaux de Shin [SHI11] (qui ne nécessite que de la régularité à une place archimédienne) plutôt que ceux de [CHL11B].

La propriété (C3) a ensuite été démontrée en toute généralité par Barnet-Lamb, Gee, Geraghty et Taylor [BLGGT12, I & II] et Caraiani [CAR12B]. Mentionnons que l'irréductibilité de $\rho_{\pi,\iota}$ n'est pas connue en général, sauf si $n \leq 3$ dans le cas CM (Ribet, Blasius-Rogaswki), et si $n \leq 5$ dans le cas totalement réel par Calegari et Gee [CG11]. Des travaux récents de Taylor et Patrikis montrent qu'en général elle vaut pour un ensemble de densité 1 de "choix de ι " (cela n'a de sens que si l'on fait intervenir un corps de coefficients de π).

Peut-être paradoxalement, la propriété (C4) concernant la représentation $\rho_{\pi,\iota}$ a été également résistante. Ce n'est pas étonnant si l'on se rappelle que quand F est totalement réel, la représentation $\rho_{\pi,\iota}$ est construite par réduction au cas CM, c'est-à-dire par recollement à partir de ses restrictions aux $\text{Gal}(\overline{F}/E)$ où E/F est totalement imaginaire quadratique : la seule perte d'information concerne les places archimédiennes. Avant de donner un énoncé sur (C4) je voudrais discuter d'une autre propriété cachée mais très utile de la représentation $\rho_{\pi,\iota}$.

1.5. L'alternative symplectique-orthogonale. Soit F un corps de nombres totalement réel. Supposons que π est une représentation automorphe cuspidale de GL_n sur F qui est algébrique, régulière et polarisée. Pour chaque $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ on dispose donc d'une représentation $\rho_{\pi,\iota}$ comme dans le Théorème 1.4. Soit χ un caractère de Hecke de F tel que $\pi^\vee \otimes \chi \simeq \pi$ et tel que le signe

$$\chi_\infty(-1) := \chi_v(-1)$$

ne dépende pas de la place archimédienne v . L'algébricité de π entraîne alors celle de χ , et l'on dispose donc d'un caractère galoisien associé $\chi_\iota := \rho_{\chi,\iota}$. La condition $\pi \simeq \pi^\vee \otimes \chi$ se traduit alors, via la propriété (C1), en l'existence d'un accouplement non dégénéré et $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ -équivariant

$$\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota} \longrightarrow \chi_\iota$$

⁶C. Skinner m'a informé qu'il avait eu indépendamment une idée similaire

Si $\rho_{\pi,\iota}$ est irréductible, ce qui est conjecturé, un tel accouplement est unique à un scalaire près. La question qui nous intéresse ici est de déterminer à quelle condition cet accouplement est symétrique ou alterné.

Le théorème suivant est démontré dans mon article [BC11], qui est un travail en commun avec Joël Bellaïche. Soit $c_v \subset \text{Gal}(\overline{F}/F)$ la classe de conjugaison formée des conjugaisons complexes de F en la place archimédienne v . L'indépendance de $\chi_v(-1)$ en une telle v entraîne que le signe $\chi_\iota(c) := \chi_\iota(c_v)$ ne dépend pas non plus de v . On prendra garde que $\chi_\iota(c)$ ne coïncide pas nécessairement avec $\chi_\infty(-1)$ (voir plus bas).

THÉOREME 1.6. *Si n est pair, et si $\chi_\iota(c) = -1$, alors il existe un accouplement non-dégénéré, $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ -équivariant, $\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota} \longrightarrow \chi_\iota$, qui est alterné. Dans tous les autres cas, il existe un tel accouplement qui est symétrique.*

Autrement dit, la représentation $\rho_{\pi,\iota}$ peut être conjugué à une représentation à valeurs dans $\text{GSp}(n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans le premier cas, dans $\text{GO}(n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans le second, pour le caractère de similitude χ_ι . Rappelons qu'il est important de préciser le caractère de similitudes dans ce genre de situation, car une représentation donnée peut être symplectique pour un certain caractère de similitudes, orthogonale pour un autre. L'exemple le plus évident est celui de la représentation tautologique du groupe $\text{O}(2, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, qui est symplectique pour le caractère déterminant et orthogonale pour le caractère trivial.

Je voudrais préciser que ce résultat n'est pas vide en dimension n impaire, car l'irréductibilité de $\rho_{\pi,\iota}$ n'est pas connue. En retour, c'est même un ingrédient important pour démontrer cette irréductibilité quand $n \leq 5$ dans les travaux de Calegari et Gee [CG11].

Regardons de plus près la condition $\chi_\iota(c) = -1$. Le corps F étant totalement réel, rappelons que χ s'écrit de manière unique sous la forme $\chi = |\cdot|^w \psi$ où $w \in \mathbb{Z}$ et ψ est un caractère de Hecke d'image finie de F (raffinement classique dû à Chevalley du théorème des unités de Dirichlet). Par la construction de Weil, on a l'identité

$$\chi_\iota = \omega_\ell^w \cdot \iota(\psi) \circ \text{rec}$$

où ω_ℓ désigne le caractère cyclotomique ℓ -adique de F , $\iota(\psi)$ est simplement le composé de ι par ψ (ce qui a un sens car $\text{Im}(\psi) \subset \overline{\mathbb{Q}}$), et rec est l'isomorphisme de réciprocity de la théorie du corps de classes globale. De $\psi(-1) = \chi_\infty(-1)$ on déduit l'identité

$$(1) \quad \chi_\iota(c) = (-1)^w \chi_\infty(-1).$$

Je propose maintenant d'expliquer en quoi le Théorème 1.6 est attendu du point de vue des conjectures de Langlands. En effet, Langlands associe à π une représentation irréductible $\rho : \mathcal{L}_F \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ de son groupe conjectural \mathcal{L}_F , telle que pour toute place v de F la restriction de ρ à l'homomorphisme structural $W'_{F_v} \rightarrow \mathcal{L}_F$ est isomorphe à $L(\pi_v)$. Le caractère χ peut être vu comme un caractère de $\mathcal{L}_F^{\text{ab}} = F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$. L'hypothèse $\pi \simeq \pi^\vee \otimes \chi$ se traduit en une hypothèse de type $\rho \simeq \rho^\vee \otimes \chi$ par la propriété de Cebotarev de \mathcal{L}_F . Il existe donc un unique accouplement "global" \mathcal{L}_F -équivariant non dégénéré $\rho \otimes \rho \rightarrow \chi$. Il est donc nécessairement symétrique si n est impair, on suppose donc n pair.

Cet accouplement global induit en une place archimédienne donnée v un accouplement non-dégénéré $L(\pi_v) \otimes L(\pi_v) \rightarrow \chi_v$. Comme π est algébrique régulière, $L(\pi_v)$ est sans

multiplicité et somme directe de représentations de la forme

$$I_{p,q} = \text{Ind}_{\mathbb{W}_{\mathbb{C}}}^{\mathbb{W}_{\mathbb{R}}} z^p \bar{z}^q.$$

Le lemme de pureté de Clozel [CLO90] entraîne d'ailleurs que l'entier $p + q$ est le même pour tous les constituants $I_{p,q}$. Il est même indépendant de v : c'est l'entier w défini plus haut par la relation $\pi^{\vee} \otimes \chi \simeq \pi$. Par multiplicité 1, on en déduit que l'accouplement global induit sur chaque facteur $I_{p,q}$ de $L(\pi_v)$ un accouplement non dégénéré de facteur de similitude χ_v . Observons que le type symétrique/alterné de cet accouplement est fixé indépendamment de v par l'accouplement global. Mais un tel accouplement sur $I_{p,q}$ est nécessairement symétrique si $\chi_v(-1) = 1$, alterné sinon. En effet, si $\varepsilon_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ et $x = |\cdot|_{\varepsilon_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}}$ désignent respectivement les caractères d'ordre 2 et identité de $\mathbb{W}_{\mathbb{R}}^{\text{ab}} = \mathbb{R}^*$, alors

$$\det(I_{p,q}) \otimes \chi_v^{-1} = \varepsilon_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} x^w \chi_v^{-1},$$

par la formule du déterminant d'une induite, qui vaut donc 1 (cas "alterné") si et seulement si $\chi_v(-1) = (-1)^{w+1}$.

On en déduit tout d'abord que tous les $\chi_v(-1)$ doivent nécessairement avoir même signe, autrement dit : l'hypothèse sur le signe des $\chi_v(-1)$ apparaissant dans la définition de π découle conjecturalement des autres hypothèses. Cette observation répond d'ailleurs à mon sens aux questions sur ce sujet soulevées dans [CHT08, §4.3]. On déduit enfin de la formule (1) que l'alternative symplectique-orthogonale de la représentation ρ doit satisfaire exactement la même dichotomie que dans le Théorème 1.6. Je laisse au lecteur le plaisir de se convaincre que ρ et $\rho_{\pi,\iota}$ doivent satisfaire la même alternative. Il pourra par exemple considérer le cas particulier où π est discrète à une place finie. On notera tout de même que l'argument ci-dessus n'admet bien sûr pas d'analogue direct si l'on remplace \mathcal{L}_F par $\text{Gal}(\bar{F}/F)$.

Nous déduisons en fait le Théorème 1.6 d'un théorème analogue dans le cas *CM*. Supposons donc maintenant que F est un corps *CM* et que π est une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière polarisée de GL_n sur F . En particulier, on dispose d'un accouplement non-dégénéré et $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -équivariant

$$\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota}^c \longrightarrow \omega_{\ell}^{1-n}.$$

Concrètement, c'est une forme bilinéaire non-dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur l'espace V de $\rho_{\pi,\iota}$ telle que pour tout $x, y \in V$ et tout $g \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ on ait la relation

$$\langle \rho_{\pi,\iota}(g)x, \rho_{\pi,\iota}(\tilde{c}g\tilde{c}^{-1})y \rangle = \omega_{\ell}(g)^{1-n} \langle x, y \rangle.$$

Dans cette formule, $\tilde{c} \in \text{Gal}(\bar{F}/F^+)$ désigne une conjugaison complexe fixée, qui est donc un élément de carré 1 et d'image $c \in \text{Gal}(F/F^+)$. Là encore, si $\rho_{\pi,\iota}$ est irréductible un tel accouplement est unique à un scalaire près, et donc soit symétrique, soit alterné. Le résultat principal de [BC11] est le résultat suivant.

THÉOREME 1.7. *Soit π une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière et polarisée de GL_n sur le corps de nombres F supposé *CM*. Il existe un accouplement symétrique, non-dégénéré, et $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -équivariant, $\rho_{\pi,\iota} \otimes \rho_{\pi,\iota}^c \longrightarrow \omega_{\ell}^{1-n}$.*

Des cas très particuliers de ce théorème avaient été démontré par Clozel-Harris-Taylor dans [CHT08], comme conséquences de leurs théorèmes de type $R = T$; ces auteurs ont notamment vu l'importance de cette propriété de symétrie dans les questions de déformations. Nous la retrouverons au §3.10.

Observons que $\rho_{\pi,\ell}$ est sans multiplicité comme on le voit sur ses poids de Hodge-Tate (régularité). Il suit que sur chaque facteur irréductible r de $\rho_{\pi,\ell}$ tel que $r^\vee \otimes \omega_\ell^{1-n} \simeq r^c$, l'unique accouplement du type ci-dessus qui est non dégénéré est symétrique. (Dans la terminologie de notre article nous disons aussi que $\rho_{\pi,\ell}$ est de signe $+1$.)

Le fait que le Théorème 1.7 entraîne le Théorème 1.6, bien que peut-être contre-intuitif, est sans difficulté. Le seul point non-trivial est d'observer, suivant [CHT08, §4], que si π est comme dans le Théorème 1.6, alors le changement de base de π à une extension quadratique CM convenable de F admet une torsion par un caractère de Hecke qui est polarisée au sens CM : c'est de toutes façons ainsi que $\rho_{\pi,\ell}$ est construite par recollement dans le cas totalement réel.

On pourrait vérifier comme plus haut que le formalisme de Langlands suggère également le théorème ci-dessus. Une telle étude montrerait qu'à cause de l'hypothèse sur π_∞ , le paramètre de Langlands global d'un π comme dans l'énoncé du théorème est toujours le changement de base d'un paramètre global, discret aux places archimédiennes, du groupe unitaire quasi-déployé à n variables associé à F/F^+ (voir par exemple [BC09, A.11.7]). C'est d'ailleurs un fait important dans notre démonstration que la functorialité associée à ce cas est en fait connue, du moins sous des hypothèses supplémentaires auxquelles on peut toujours se ramener, par les travaux de Labesse [LAB11]. Ceci étant dit, le théorème ci-dessus peut alors être vu comme un cas particulier de la conjecture de "parité" de Gross [GRO08].

Terminons, enfin!, par une brève discussion de notre démonstration du théorème. L'idée est de se ramener par des congruences, plus précisément des familles ℓ -adiques, à démontrer le résultat dans le cas particulier où n est impair et $\rho_{\pi,\ell}$ est irréductible... auquel cas il est évident! On vérifie en effet d'abord que l'alternative symétrique/alternée est constante dans une famille ℓ -adique de représentations $\rho : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ satisfaisant toutes $\rho^\vee \otimes \omega_\ell^{1-n} \simeq \rho$, dès lors que la base de cette famille est un affinoïde connexe.

Pour des raisons techniques, on se ramène par changement de base résoluble bien choisi au cas où F/F^+ est non ramifiée à toutes les places finie, $[F^+ : \mathbb{Q}]$ est pair, π est non ramifiée aux places non décomposées au dessus de F , et où π admet des invariants par un sous-groupe d'Iwahori à toutes les places divisant ℓ . On désigne par $U(n)$ le groupe unitaire à n variables sur F associé à F/F^+ qui est quasi-déployé à toutes les places finies et compact aux places archimédiennes.

Si n est impair, on commence par descendre π en une représentation automorphe π_0 de $U(n)$. C'est possible par les travaux de Labesse [LAB11]. Ensuite, nous utilisons la fougère infinie pour ce groupe unitaire, et généralisons une observation déjà vue dans ma thèse en dimension 3 [BC04, §9.1] : en se déplaçant dans cette fougère, on peut connecter $\rho_{\pi,\ell} = \rho_{\pi_0,\ell}$ à un $\rho_{\pi',\ell}$ qui est de plus irréductible restreinte à toutes les places divisant

ℓ . Il suffit pour cela de se déplacer intelligemment de sorte à prescrire suffisamment les pentes des Frobenius cristallins des $D_{\text{cris}}((\rho_{\pi',\iota})_v)$ pour v divisant ℓ : cet argument sera expliqué au §3.21. Le résultat est alors évident pour $\rho_{\pi',\iota}$ et on conclut.

Dans le cas n pair, on utilise un transfert endoscopique tempéré du type ${}^L\text{U}(n) \times {}^L\text{U}(1) \rightarrow {}^L\text{U}(n+1)$ pour se ramener à la dimension $n+1$ impaire et procéder comme précédemment : on déforme cette fois-ci irréductiblement $\rho_{\pi,\iota} \oplus \nu_\iota$ pour un caractère de Hecke algébrique ν de F bien choisi. Il y a une obstruction à l'existence de tels transferts en général provenant de la formule de multiplicité à la Labesse-Langlands, démontrée dans ce cadre par Clozel, Harris et Labesse dans [CHL11B]. Il faut qu'aux places archimédiennes v de F les poids de ν_v et de π_v soient entrelacés dans certains ordres. Cela n'a pas d'importance pour notre démonstration car nous pouvons choisir ν et modifier au préalable à loisir les poids de π quitte à se déplacer d'abord un peu dans la fougère infinie de $U(n)$.

Je voudrais mentionner qu'une stratégie plus géométrique pour démontrer le Théorème 1.7 consisterait à utiliser l'accouplement de Poincaré sur l'espace de cohomologie dans lequel $\rho_{\pi,\iota}$ est construite. On se heurte cependant notamment à la difficulté que la conjugaison complexe n'agit pas naturellement sur cet espace, car la variété sous-jacente n'est que définie sur F . Une manière de contourner ce problème a été proposée par Taylor dans [TAY12]. Il serait intéressant de savoir si cette méthode permet de re-démontrer le théorème ci-dessus. Pour terminer, je voudrais discuter comme promis la condition (C4).

THÉOREME 1.8. [TAY12], [TAI12] *Supposons F totalement réel et soient π et ι comme dans le Théorème 1.4. Si n est pair et si $\chi_\iota(c) = 1$, on suppose de plus que $\chi_\infty(-1) = 1$. Alors $\rho_{\pi,\iota}$ satisfait (C4).*

Ce théorème est dû à Taylor [TAY12] dans le cas particulier où n est impair et où $\rho_{\pi,\iota}$ est irréductible. Le résultat de Taylor a ensuite été étendu au cadre général ci-dessus par mon étudiant Olivier Taïbi dans [TAI12]. La stratégie de Taïbi est de se ramener par des congruences au résultat de Taylor, un peu à la manière de la démonstration ci-dessus. De nouvelles difficultés apparaissent cependant, qui sont inhérentes aux propriétés de la fougère infinie pour les groupes classiques. Notamment, ainsi que l'a observé Taïbi, il n'est plus tout-à-fait possible de déformer irréductiblement tout $\rho_{\pi,\iota}$ dans la fougère infinie de $\text{Sp}(n-1)$ quand n est impair. Ses démonstrations utilisent au final de manière astucieuse des groupes classiques annexes et plusieurs cas de functorialité démontrés dans les travaux récents d'Arthur [ART11].

2. Interlude : variétés de caractères et analogues p -adiques

2.1. Résumé et perspectives. Avant d'aborder mes travaux sur la fougère infinie, il me semble opportun de faire quelques rappels sur les familles de représentations d'un groupe général et sur la notion de variété de caractères. J'exposerai notamment des résultats de mon article [CHE08B] dans lequel je définis une notion de variété de caractères paramétrant les représentations continues p -adiques d'un groupe profini donné. Cela fournira un cadre agréable, à défaut d'être indispensable, pour l'étude des familles de représentations galoisiennes et de la fougère infinie, dans les parties suivantes. Il ouvre aussi des questions intéressantes qui me semblent inexplorées. Afin de justifier que l'objet que je définis est bien un analogue de la variété des caractères usuelle pour les groupes discrets, je commencerai par des rappels sur ces dernières.

Je profiterai également de l'occasion pour exposer des résultats, obtenus en collaboration avec Joël Bellaïche dans notre livre [BC09, Ch. 1], concernant l'étude générale des variétés de caractères au voisinage des points paramétrant des représentations réductibles sans multiplicités. C'est un sujet certainement classique, au moins depuis [LM85], sur lequel la littérature semble assez vaste. Je ne suis malheureusement pas compétent pour faire l'historique et la synthèse de ces travaux (voir par exemple [SIK12] pour de nombreuses références sur des points de vue différents du notre). Notre motivation initiale, issue de la théorie des nombres, était de généraliser en dimension supérieure la méthode initiée par Ribet [RIB76] pour construire des extensions entre représentations galoisiennes, et aussi de comprendre les limites de cette méthode ; je renvoie au rapport récent de Mazur [MAZ11] à ce sujet. Nos résultats jouent par exemple un rôle technique important dans le théorème principal de notre livre (voir §4 Ch. 2) ; ils devraient s'appliquer aussi à des questions analogues concernant les groupes discrets, par exemple dans l'analogie entre noeuds et nombres premiers, que l'on rediscutera au §1 Ch. 2.

2.2. Préliminaire : un point de vue modulaire sur les variétés de caractères.

Soit G un groupe. Si A est un anneau commutatif unitaire, une famille de représentations de G de dimension d et à valeurs dans A (ou encore *paramétrée par* $\text{Spec}(A)$), est traditionnellement un homomorphisme de groupes $G \rightarrow \text{GL}_d(A)$. Notons

$$\text{Hom}(G, \text{GL}_d)$$

le foncteur $A \mapsto \text{Hom}(G, \text{GL}_d(A))$, des anneaux commutatifs unitaires vers les ensembles, paramétrant les familles de représentations de dimension d de G . Ce foncteur est évidemment représentable ("matrices génériques"), par un anneau $R_d(G)$ qui est même de type fini sur \mathbb{Z} si le groupe G est de type fini, ce que l'on supposera désormais pour simplifier.

Pour de nombreuses questions, il est souvent plus naturel, et parfois même obligatoire, de considérer des représentations à isomorphisme près, i.e. modulo l'action naturelle de GL_d par conjugaison sur $\text{Hom}(G, \text{GL}_d)$. Cependant, il est bien connu que le foncteur

$$A \rightarrow \text{Hom}(G, \text{GL}_d(A))/\text{GL}_d(A)$$

n'est pas en général représentable, en considérant par exemple des représentations non définies sur leur corps des traces (mais il y a pire !). On se restreint désormais aux anneaux

A qui sont des k -algèbres (commutatives unitaires) où k est un corps de caractéristique 0. L'approche traditionnelle est alors de définir la variété des k -caractères de dimension d de G à la Mumford, comme étant le quotient GIT de $\text{Hom}(G, \text{GL}_d)$ par GL_d ([LM85]). On la notera $\text{Car}_d(G)$. C'est par définition le k -schéma affine de k -algèbre

$$k[\text{Car}_d(G)] := R_d(G)^{\text{GL}_d(k)} \subset R_d(G).$$

Il est alors non trivial mais connu depuis M. Artin [ART69], voir aussi [PRO74], que les points de $\text{Car}_d(G)$ dans une extension algébriquement close L de k paramètrent exactement les classes d'isomorphie de représentations semisimples $G \rightarrow \text{GL}_d(L)$. La terminologie "variété des caractères" vient alors du fait classique que ces classes d'isomorphismes sont uniquement déterminées par leurs caractères (i.e. leurs fonctions traces), car k est de caractéristique nulle.

Cependant, cette description ne s'étend pas en général aux points à valeurs dans une k -algèbre quelconque, ce qui complique sensiblement l'étude de $\text{Car}_d(G)$. D'un point de vue naïf, c'est simplement le passage au quotient (ou aux invariants sur les fonctions) qui fait perdre cette interprétation modulaire. C'est particulièrement embarrassant pour les questions infinitésimales, comme les calculs d'espaces tangents (de Zariski).⁷

Il se trouve que l'on peut contourner ces problèmes en utilisant les travaux de Procesi sur les invariants de similitudes simultanés d'une famille de matrices dans M_d [PRO76]. Procesi démontre en effet que ces invariants sont d'une part engendrés par les traces en les monômes en ces matrices, et d'autre part que les relations entre ces traces se déduisent toutes de l'identité de Cayley-Hamilton, faits bien connus dans le cas d'une seule matrice. Cette dernière identité joue alors un rôle combinatoire central dans ces questions, car elle conduit comme nous allons le rappeler à une théorie des invariants explicite.

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}_d(A)$ une représentation et soit $T = \text{Trace} \circ \rho : G \rightarrow A$. On sait depuis Frobenius [FRO96, p. 50, formule (21)] que T satisfait l'identité suivante⁸ :

$$(2) \quad \forall g_1, g_2, \dots, g_d, g_{d+1} \in G, \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}} \varepsilon(\sigma) T^\sigma(g_1, g_2, \dots, g_{d+1}) = 0.$$

Explications : si $n \geq 1$ est un entier, et si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a posé $T^\sigma(g_1, g_2, \dots, g_n) = T(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_r})$ si σ est le cycle $(i_1 i_2 \dots i_r)$, et en général $T^\sigma = \prod T^{c_i}$ si $\sigma = c_1 \dots c_s$ est la décomposition en cycles de σ . Ainsi que Procesi l'a remarqué [PRO76], cette identité peut également être vue comme la polarisation totale de l'identité de Cayley-Hamilton, vue sous la forme $\text{Trace}(\chi_M(M)N) = 0$ où $M, N \in M_d(A)$ et χ_M est le polynôme caractéristique de M . Cela a conduit Taylor [TAY91] à considérer des fonctions générales $T : G \rightarrow A$ telles que $T(1) = d$, $T(gh) = T(hg)$ pour tout $g, h \in G$, et satisfaisant l'identité (2). Ces fonctions ont été depuis largement utilisées en théorie des nombres

⁷Traditionnellement, on s'en sort toutefois sur l'ouvert Zariski de $\text{Car}_d(G)$ paramétrant les représentations absolument irréductibles, sur lequel on dispose d'une interprétation modulaire en terme de représentations dans des algèbres d'Azumaya, voir par exemple [PRO97].

⁸Si $M = A^d$, cela vient d'une part de ce que $\Lambda_A^{d+1} M = 0$, et d'autre part de ce que si $g_1, \dots, g_n \in \text{GL}_A(M)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la trace de $(g_1, \dots, g_n)\sigma$ sur $M^{\otimes_A n}$ coïncide avec $T^\sigma(g_1, \dots, g_n)$ (Kostant).

sous le nom de *pseudo-représentations*,⁹ ou *pseudo-caractères*, de dimension d , et nous adopterons cette dernière terminologie, héritée de Rouquier [ROU96].

Désignons par $\text{PCar}_d(G)(A)$ l'ensemble des pseudo-caractères de dimension d de G à valeurs dans A . Il est évident que $A \mapsto \text{PCar}_d(G)(A)$ définit un foncteur $\text{PCar}_d(G)$ des k -algèbres commutatives vers les ensembles, et que ce foncteur est représentable, par une k -algèbre que nous noterons $k[\text{PCar}_d(G)]$. L'observation de Frobenius montre que la trace fournit un morphisme de foncteurs $\text{Hom}(G, \text{GL}_d)/\text{GL}_d \rightarrow \text{PCar}_d(G)$. Il se trouve que ce morphisme induit un isomorphisme $\text{Car}_d(G) \xrightarrow{\sim} \text{PCar}_d(G)$. C'est en effet une conséquence immédiate des résultats de Procesi [PRO76], [PRO87], je redonne l'argument ci-dessous par manque de référence adéquate. Je rappelle que k est un corps de caractéristique nulle.

PROPOSITION 2.3. *La trace de la représentation universelle $G \rightarrow \text{GL}_d(R_d(G))$ induit un isomorphisme de k -algèbres*

$$k[\text{PCar}_d(G)] \xrightarrow{\sim} k[\text{Car}_d(G)].$$

Autrement dit, $\text{PCar}_d(G)$ est canoniquement le foncteur des points de $\text{Car}_d(G)$.

Preuve — Soit $\rho^{\text{univ}} : G \rightarrow \text{GL}_d(R_d(G))$ la représentation universelle et $T^{\text{univ}} : G \rightarrow k[\text{PCar}_d(G)]$ le pseudo-caractère universel. Il est évident que $\text{Trace} \circ \rho^{\text{univ}}(G) \subset k[\text{Car}_d(G)]$. Le résultat de Frobenius suscité fournit donc un morphisme canonique $f : k[\text{PCar}_d(G)] \rightarrow k[\text{Car}_d(G)]$ envoyant $T^{\text{univ}}(g)$, pour $g \in G$, sur $\text{Tr} \circ \rho^{\text{univ}}(g)$. Ce morphisme est surjectif si G est un groupe libre de type fini par [PRO76], il le reste donc pour G de type fini quelconque par r eductivit e linéaire de GL_d sur k . Autrement dit la k -algèbre $k[\text{Car}_d(G)]$ est engendrée par les $\text{Trace}(\rho^{\text{univ}}(g))$, $g \in G$ (l'assertion analogue pour $k[\text{PCar}_d(G)]$ et les $T^{\text{univ}}(g)$ est évidente).

Réciproquement, d'après [PRO87] appliqu e à l'une quelconque des algèbres de Cayley-Hamilton associées à T^{univ} (voir la note 10 ci-après ou [BC09, §1.2]), il existe un morphisme injectif de k -algèbres $f' : k[\text{PCar}_d(G)] \rightarrow B$ et une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}_d(B)$ tels que $\text{Tr} \circ \rho = f' \circ T^{\text{univ}}$. On en déduit un k -morphisme $f'' : R_d(G) \rightarrow B$ tel que $\rho = f'' \circ \rho^{\text{univ}}$. La dernière assertion du paragraphe précédent assure que $f''(k[\text{Car}_d(G)]) \subset f'(k[\text{PCar}_d(G)])$. L'injectivité de f' montre que $(f')^{-1} \circ f'' : k[\text{Car}_d(G)] \rightarrow k[\text{PCar}_d(G)]$ est bien défini. Il envoie par construction $\text{Tr} \circ \rho^{\text{univ}}(g)$ sur $T^{\text{univ}}(g)$: c'est donc un inverse de f . \square

Je voudrais mentionner que si l'on ne s'intéresse qu'à des représentations de dimension 2 et de déterminant 1, la notion adaptée de pseudo-caractère est simplement une fonction $T : G \rightarrow A$ telle que $T(1) = 2$ et telle que pour tout $g, h \in G$, $T(gh) = T(hg)$ et

$$T(gh) + T(gh^{-1}) = T(g)T(h).$$

⁹Le premier à avoir introduit cette terminologie et vu son utilité, en dimension 2 et sous une forme légèrement différente, est Wiles dans [WIL88].

Cette identité de traces est omniprésente dans la littérature sur les variétés de caractères à valeurs dans SL_2 , comme par exemple dans [CS83] (voir aussi l'exposition par Goldman [GOL04] sur la détermination par Fricke et Vogt de $\text{Car}_{\mathbb{Q}}(F_2)$ (fin XIXème), F_g désignant le groupe libre à g générateurs). Toutefois, sauf erreur de ma part, ces auteurs ne me semblent pas aller jusqu'à affirmer que dans ce cas la variété des caractères est simplement l'espace de modules fin de ces fonctions (ce qui est vrai). Cette propriété me semble néanmoins intéressante. Par exemple, elle permet de voir immédiatement que l'espace tangent de Zariski en la représentation triviale est l'espace des fonctions $t : G \rightarrow k$ telles que $\forall g, h \in G, t(gh) = t(hg)$ et $t(gh) + t(gh^{-1}) = 2(t(h) + t(g))$ ("identité du parallélogramme"), ce qui a des conséquences amusantes pour lesquelles je renvoie à ma note [CHE09B].

Pour revenir au cas général, il suit par ailleurs de ce que l'on a dit que si k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, les pseudo-caractères $G \rightarrow k$ de dimension d sont exactement les traces des (classes d'isomorphie de) représentations semisimples $G \rightarrow k$. Cela avait originalement été observé par Taylor dans [TAY91] par une approche similaire à celle ci-dessus. Rouquier a par la suite obtenu dans [ROU96] une démonstration assez directe de ce résultat (dans l'esprit de [PRO74]), qu'il a même étendue au cas des corps k algébriquement clos tels que $d!$ est inversible dans k . La morale de cette affaire est que nous aurions directement pu définir la variété des k -caractères de dimension d de G comme étant le k -schéma affine $\text{PCar}_d(G)$. C'est ce point de vue que nous allons généraliser dans le cas profini.

Pour conclure ce paragraphe de généralités sur les variétés des caractères, je voudrais mentionner quelques résultats généraux que j'ai obtenus avec Bellaïche dans [BC09, Ch. 1] (voir aussi [BC05], [BC06]). Notre objectif était d'étudier $\text{Car}_d(G)$ au voisinage d'un point $x \in \text{Car}_d(G)$ paramétrant une représentation semisimple $\rho_x : G \rightarrow \text{GL}_d(\bar{k})$ éventuellement réductible mais sans multiplicités, i.e. $\rho_x \simeq \bigoplus_{i=1}^s r_i$ avec les r_i irréductibles et $r_i \not\simeq r_j$ si $i \neq j$. Notre travail comprend :

- (i) Une étude schématique des différents lieux de réductibilité du pseudo-caractère universel au voisinage du point x (équations, propriétés locales des morphismes naturels $\prod_i \text{Car}_{d_i}(G) \rightarrow \text{Car}_d(G)$ où $d = \sum_i d_i$).
- (ii) Une étude des liens entre les $\text{Ext}_{k[G]}(r_i, r_j)$ et la géométrie en x de $\text{Car}_d(G)$ et des lieux de réductibilité ci-dessus.
- (iii) Des critères pour qu'un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Car}_d(G)$ d'image contenant x soit la trace d'une représentation $G \rightarrow \text{GL}_d(A)$, du moins après restriction à un voisinage étale assez petit de x . Par exemple, nous montrons qu'il suffit que $\text{Car}_d(G)$ soit lisse, ou même simplement hensélisé strict factoriel, en x .

Je renvoie à [BC09] pour plus de détails sur ces sujets, qu'il serait trop long de développer ici. Ils reposent de manière importante sur un théorème de structure concernant l'algèbre de Cayley-Hamilton universelle $\mathcal{R}^{\text{univ}}$ sur $\text{Car}_d(G)$.¹⁰ Nous démontrons en effet

¹⁰Soit $T : G \rightarrow A$ un pseudo-caractère de dimension d , que l'on prolonge A -linéairement en $T : A[G] \rightarrow A$. Les relations de Newton permettent de former, pour tout $x \in A[G]$, un polynôme "caractéristique" abstrait $P_{x,T} = X^d - T(x)X^{d-1} + \frac{T(x)^2 - T(x^2)}{2}X^{d-2} + \dots \in A[X]$. On considère alors la

que si \mathcal{O}_x désigne le hensélisé strict de l'anneau local de $\text{Car}_d(G)$ en x , alors

$$\mathcal{R}^{\text{univ}} \otimes_{k[\text{Car}_d(G)]} \mathcal{O}_x$$

est une \mathcal{O}_x -algèbre de matrices généralisée de type $(\dim r_1, \dots, \dim r_s)$. C'est une classe d'algèbres à traces que nous avons introduite et étudiée dans [BC09, Ch. 1]. Dans le cas particulier où ρ_x est irréductible, cette algèbre est simplement isomorphe à $M_d(\mathcal{O}_x)$, un résultat déjà démontré par Nyssen [NYS96], Rouquier [ROU96] et Procesi [PRO97]. Si

$$\text{Car}_d(G)^{\text{irr}} \subset \text{Car}_d(G)$$

désigne l'ouvert Zariski constitué des points x tels que ρ_x est irréductible, la restriction de $\mathcal{R}^{\text{univ}}$ à $\text{Car}_d(G)^{\text{irr}}$ est donc une algèbre d'Azumaya de rang d^2 . Mentionnons pour finir que nos résultats permettent par exemple de dévisser de manière simple l'espace tangent de $\text{Car}_d(G)$ en un point x tel que ρ_x est sans multiplicité [BEL12A] (quand ρ_x est irréductible, il est bien connu que cet espace est isomorphe à $H^1(G, \text{Ad}(\rho_x))$ [LM85]).

2.4. La variété des caractères p -adique. On suppose maintenant que G est un groupe profini et l'on fixe un nombre premier p ainsi qu'un entier $d \geq 1$. On s'intéresse dans ce cas aux homomorphismes continus $G \rightarrow \text{GL}_d(A)$ où A est une \mathbb{Q}_p -algèbre de Banach affinoïde au sens de Tate [TAT71], auxquels on pensera comme à des familles analytiques de représentations continues $G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}_p})$ paramétrées par l'espace analytique affinoïde $\text{Max}(A)$. On considèrera plus généralement des espaces analytiques sur \mathbb{Q}_p au sens de Tate [BGR83]. Si X est un tel espace, on désignera par $\mathcal{O}(X)$ la \mathbb{Q}_p -algèbre des fonctions analytiques globales de X . C'est un \mathbb{Q}_p -espace de Fréchet pour la topologie de la convergence uniforme sur les ouverts affinoïdes.

On suppose que G vérifie la propriété suivante : pour tout sous-groupe ouvert $H \subset G$, il n'y a qu'un nombre fini d'homomorphismes continus $H \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Cette condition est par exemple satisfaite si G possède un sous-groupe dense de type fini. On considère alors le foncteur $\text{Car}_d^p(G)$, des espaces analytiques sur \mathbb{Q}_p vers les ensembles, associant à X l'ensemble des pseudo-caractères $G \rightarrow \mathcal{O}(X)$ qui sont de dimension d et continus (en tant que fonction). Je démontre dans [CHE08B] le résultat suivant.

PROPOSITION 2.5. *Le foncteur $\text{Car}_d^p(G)$ est représentable.*

C'est l'espace analytique représentant $\text{Car}_d^p(G)$ que j'appelle la variété des caractères p -adique de G en dimension d . Je vais brièvement expliquer ses propriétés principales ainsi que sa construction.

Je dois commencer par un rappel classique sur la notion de *représentation résiduelle*. Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p et soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{L})$ une représentation semisimple

A -algèbre $\mathcal{R}(T)$ quotient de l'algèbre du groupe $A[G]$ par l'idéal bilatère engendré par les $P_{g,T}(g) \in A[G]$ pour tout $g \in G$. L'identité (2) assure que T se factorise par $\mathcal{R}(T)$ et que tout $x \in \mathcal{R}(T)$ satisfait l'identité de Cayley-Hamilton $P_{x,T}(x) = 0$. Le couple $(\mathcal{R}(T), T)$ est donc une algèbre de Cayley-Hamilton au sens de Procesi [PRO87]. On dispose alors tautologiquement d'une représentation $G \rightarrow \mathcal{R}(T)^*$ "de trace" T . La formation de $(\mathcal{R}(T), T)$ commute à tout changement de base $A \rightarrow B$. Si $A = k[\text{Car}_d(G)]$ et $T = T^{\text{univ}}$, on pose $\mathcal{R}^{\text{univ}} = \mathcal{R}(T)$. Je renvoie à [PRO87], [DCPRR05] et [BC09, Ch. 1] pour la théorie des algèbres de Cayley-Hamilton.

telle que $\text{Trace}(\rho(G)) \subset L$. Alors ρ est continue si et seulement si $\text{Trace} \circ \rho$ l'est, auquel cas les polynômes caractéristiques $\det(t - \rho(g))$, $g \in G$, sont à coefficients dans l'anneau des entiers \mathcal{O}_L de L . Si $k_L = \mathcal{O}_L/\pi_L$ désigne le corps fini résiduel de \mathcal{O}_L , on peut alors associer à ρ une unique représentation semisimple continue

$$\bar{\rho} : G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{k_L}),$$

dite représentation résiduelle de ρ , telle que $\det(t - \bar{\rho}(g)) \equiv \det(t - \rho(g))$ modulo l'idéal maximal de \mathcal{O}_L . L'unicité est une observation classique de Brauer-Nesbitt, et pour l'existence on raisonne traditionnellement en se plaçant d'abord dans une extension finie L'/L sur laquelle ρ est définie, et on définit ensuite $\bar{\rho}$ en semisimplifiant la réduction modulo $\pi_{L'}$ d'un $\mathcal{O}_{L'}$ -réseau stable par G . Soit \mathcal{I} l'ensemble des orbites de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ agissant sur l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations semisimples et continues $G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{\mathbb{F}_p})$ (action sur les coefficients). La représentation $\bar{\rho}$ définit en particulier un élément de \mathcal{I} .

Si X est un espace analytique, si $T \in \text{Car}_d^p(G)(X)$, et si $x \in X$ est de corps résiduel $k(x)$ (une extension finie de \mathbb{Q}_p), on désignera par

$$\rho_x : G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{k(x)})$$

la représentation semisimple continue, unique à isomorphisme près, de trace la composée $T : G \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow k(x)$ (§2.2). On commence par observer que l'application $x \mapsto \bar{\rho}_x$, $X \mapsto \mathcal{I}$, est constante sur les composantes connexes de X (en particulier, ne prend qu'un nombre fini de valeurs si X est affinoïde). Il suit que $\text{Car}_d^p(G)$ est "réunion disjointe" des sous-foncteurs $\text{Car}_d^p(G)[r]$, $r \in \mathcal{I}$, paramétrant les T dont toutes les représentations résiduelles associées définissent le même élément de \mathcal{I} . On démontre ensuite la représentabilité de $\text{Car}_d^p(G)[r]$ en l'identifiant à la fibre générique au sens de Berthelot [BER96] d'une certaine \mathbb{Z}_p -algèbre locale noethérienne complète $R(r)$.

Si $p > d$, on définit $R(r)$ comme l'anneau de déformation universel du pseudo-caractère continu $\text{Trace}(r) : G \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ (bien défini modulo action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ à l'arrivée). Il est bien noethérien sous notre hypothèse sur G par les résultats de Taylor [TAY91]. Il ne reste alors qu'à vérifier que la fibre générique de $R(r)$ représente bien $\text{Car}_d^p(G)[r]$, ce qui est un exercice sans difficulté, notamment compte tenu de l'interprétation générale de ce type de fibres donnée dans [DJO95]. Mentionnons que quand r est irréductible, on s'en sort même quelque soit p en considérant plutôt pour $R(r)$ l'anneau de déformation universel de la représentation continue r au sens de Mazur [MAZ87], anneau par ailleurs isomorphe à l'anneau considéré précédemment si $p > d$ [ROU96].

Le cas $p \leq d$ et r quelconque est plus vache, et occupe en fait la majeure partie de mon article [CHE08B]. Dans ce cas, et généralement quand $d!$ n'est pas inversible dans A , la théorie des pseudo-caractères $G \rightarrow A$ est plus pathologique, car l'identité (2) n'entraîne pas l'identité de Cayley-Hamilton. Cela m'a conduit à considérer une variante multiplicative de la théorie des pseudo-caractères qui a des bonnes propriétés sur \mathbb{Z} , que j'appelle les *lois-déterminants*. Ces lois sont déjà essentiellement présentes sous forme de "normes" dans les travaux pionniers de Procesi [PRO74]. La définition que je propose, basée sur

la notion de loi polynomiale multiplicative au sens de Roby ([ROB63], [ROB80]), est la suivante.

DEFINITION 2.6. *Soient A un anneau commutatif unitaire, H un groupe, et $d \geq 1$ un entier. Une loi-déterminant sur H , de dimension d et à valeurs dans A , est une loi polynomiale $D : \mathbb{Z}[H] \rightarrow A$ qui est multiplicative, homogène de degré d , et telle que $D(1) = 1$.*

Le cas typique de telle loi est la composée d'un homomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[H] \rightarrow M_d(A)$ par $\det : M_d(A) \rightarrow A$. En général, une loi-déterminant peut être vue comme la donnée d'une collection de d fonctions $H \rightarrow A$, "les coefficients du polynôme caractéristique", satisfaisant un ensemble d'identités polynomiales en général assez complexes, dont l'identité d'Amitsur sur le déterminant d'une somme [AMI80], [RS87]. En¹¹ dimension 2, il s'agit simplement de couples (t, d) de fonctions $H \rightarrow A$ telles que $d : H \rightarrow A^*$ est un homomorphisme de groupes et $t : H \rightarrow A$ satisfait $t(1) = 2$ et pour tout $g, h \in H$, $t(hg) = t(h)t(g)$ et $d(g)t(g^{-1}h) = t(g)t(h) - t(gh)$.

Le foncteur associant à un anneau commutatif A l'ensemble des lois-déterminants sur H , de dimension d et à valeurs dans A , est trivialement représentable.¹² Des résultats importants de Donkin [DON92], Haboush, Seshadri [SES77], Vaccarino ([VAC04], [VAC08], [VAC09]), et Zubkov [ZUB99], assurent que cet anneau universel est de type fini sur \mathbb{Z} si H est un groupe de type fini. Je renvoie à mon article [CHE08B] pour plusieurs critères assurant qu'une loi-déterminant $\mathbb{Z}[H] \rightarrow A$ est le déterminant d'une représentation $\mathbb{Z}[H] \rightarrow M_d(A)$; c'est par exemple vrai si A est un corps algébriquement clos (sans hypothèse de caractéristique).

Pour revenir à la question de la représentabilité de $\text{Car}_d^p(G)[r]$ quand $p \leq d$, on définit cette fois-ci $R(r)$ comme l'anneau de déformation universel de la loi-déterminant continue $\det \circ r : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. C'est un anneau noethérien par les remarques précédentes, et on vérifie que sa fibre générique au sens de Berthelot est bien $\text{Car}_d^p(G)[r]$.

Il suit de cette longue discussion que si $X_d = \text{Car}_d^p(G)$ désigne la variété des caractères p -adique de G en dimension d , alors X_d est réunion disjointe admissible de sous-espaces ouverts fermés $X_d(r)$ indexés par les représentations résiduelles $r \in \mathcal{I}$. Chaque $X_d(r)$ est de plus isomorphe à un fermé dans la boule unité ouverte d'une certaine dimension, dont l'idéal de définition est engendré par un nombre fini d'éléments de $R(r)$. Si $x \in X_d$, on notera en général

$$\rho_x : G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{k(x)})$$

l'unique représentation semisimple continue dont la trace est définie par x . Si $X_d^{\text{irr}} \subset X_d$ désigne l'ensemble des x tels que ρ_x est irréductible, il n'est pas difficile de vérifier que X_d^{irr} est un ouvert Zariski de X_d . Une propriété intéressante de X_d^{irr} est qu'il représente le foncteur associant à un affinoïde $Y = \text{Max}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (S, ρ) tels que S est une A -algèbre d'Azumaya de rang d^2 et $\rho : G \rightarrow S^*$ est un homomorphisme continu dont la trace réduite induit un morphisme $Y \rightarrow X_d^{\text{irr}}$.

¹¹Voir ma note [CHE12] pour une discussion élémentaire de cette théorie en dimension 2.

¹²Les travaux de Roby démontrent même qu'il est représenté par l'abélianisé de l'anneau des invariants $(\mathbb{Z}[H]^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$, la loi-déterminant universelle étant simplement $x \mapsto x^{\otimes d}$.

En guise d'exemple, je propose de clore cette section par le théorème suivant, qui est le résultat principal de ma note [CHE09B]. Sa démonstration, par récurrence sur la dimension d , utilise notamment les résultats de Tate sur la cohomologie des représentations p -adiques de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, des techniques de déformations à la Mazur [MAZ87], ainsi que la plupart des idées introduites dans cette partie.

THÉOREME 2.7. *Soit X_d la variété des caractères p -adique, en dimension d , du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ d'une extension finie F de \mathbb{Q}_p .*

- (i) X_d est équidimensionnelle de dimension $[F : \mathbb{Q}_p]d^2 + 1$.
- (ii) L'ouvert Zariski X_d^{irr} est dense dans X_d .
- (iii) Si $d \neq 2$ ou si $F \neq \mathbb{Q}_p$, X_d^{irr} coïncide exactement avec le lieu régulier de X_d .
- (iv) Quand $F = \mathbb{Q}_p$, le lieu singulier de X_2 est celui paramétrant les torsions par un caractère de $1 \oplus \omega$ où ω est le caractère cyclotomique.

On aimerait avoir plus d'outils pour étudier les variétés de caractères p -adique en général. On voudrait aussi en savoir un peu plus sur les $X_d(r)$ dans le contexte de l'énoncé ci-dessus. Hormis le cas $d = 1$, le seul cas vraiment facile est celui où r est irréductible et satisfait $r \not\cong r \otimes \omega$ où ω est le caractère cyclotomique modulo p (condition automatique si $p - 1$ ne divise pas d quand $F = \mathbb{Q}_p$). Dans ce cas, les résultats de Tate et Mazur montrent que $X_d(r)$ est simplement une boule ouverte.¹³ Même dans le cas particulier $K = \mathbb{Q}_p$ et $d = 2$, je ne connais pas $X_2(r)$ dans tous les cas, notamment quand $p = 2$ et r est la représentation triviale. Pour des résultats, un peu éparpillés, sur ces thèmes, voir aussi [KIS09], [KIS10], [PAS08], [CHE09B] et [BOE10].

¹³Plus exactement, c'est la restriction à \mathbb{Q}_p d'une boule ouverte définie sur l'extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p de corps résiduel le corps de définition de r .

3. La fougère infinie et la densité des points modulaires

3.1. Le lieu géométrique des variétés de caractères p -adique du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q} . Soient p un nombre premier, S un ensemble fini de nombres premiers contenant p , et soit $G_{\mathbb{Q},S}$ le groupe Galois d'une extension algébrique maximale de \mathbb{Q} non ramifiée hors de S (et de l'infini). On fixe un entier $d \geq 1$ et on considère la variété des caractères p -adique X_d de $G_{\mathbb{Q},S}$ en dimension d (§2.4). La structure même de X_d est très loin d'être comprise en général, et nous n'aurons rien à apporter sur cette question. Cela n'aura pas tellement d'incidence sur les questions qui vont nous intéresser ici. En guise d'exemple, disons simplement que si

$$r : G_{\mathbb{Q},S} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

est une représentation continue irréductible, et disons si $p > 2$, alors $X_d(r)$ est de dimension $\geq 1 + 2i(d - i)$, où $i = \dim \mathrm{Ker}(r(c) - \mathrm{id})$ et $c \in G_{\mathbb{Q},S}$ désigne une conjugaison complexe. Cela suit en effet des propriétés de la cohomologie galoisienne de $G_{\mathbb{Q},S}$ (Poi-tou, Tate [MIL86]) et de la théorie de Mazur [MAZ87]. On dira que r est *régulière* si $H^2(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}(r)) = 0$. Dans ce cas, assez fréquent en pratique, $X_d(r)$ est simplement la K -boule unité ouverte¹⁴ de dimension $1 + 2i(d - i)$, où K est l'extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p dont le corps résiduel est le corps de définition de r .

Soit $x \in X_d$ et soit $\rho_x : G_{F,S} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{k(x)})$ la représentation semisimple continue associée. On dira que le point x est *géométrique* s'il existe une variété projective lisse Y définie sur \mathbb{Q} , et des entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $i \geq 0$, tels que ρ_x est un sous-quotient de

$$H_{\mathrm{et}}^i(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p(m)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{k(x)}.$$

Le sous-ensemble $X_d^{\mathrm{geom}} \subset X_d$ des points géométriques est assez mystérieux, et sujet de nombreux problèmes ouverts. Par exemple, d'après les conjectures du folklore rappelées au §1.2, c'est aussi l'ensemble des x tels que ρ_x est de la forme $\rho_{\pi,\iota}$ pour une représentation automorphe cuspidale algébrique π de GL_d sur F , ou encore tel que ρ_x soit géométrique au sens de Fontaine-Mazur, i.e. simplement de De Rham aux places divisant p .

Il est naturel de se demander si X_d^{geom} possède une quelconque structure particulière en tant que partie de X_d . Observons déjà que X_d^{geom} est un ensemble dénombrable (donc petit), car il en va de même des classes d'isomorphie de variétés projectives sur \mathbb{Q} , il ne contient donc pas de sous-variété de dimension > 0 . La question qui va nous intéresser principalement dans cette partie est la suivante.

QUESTION 3.2. *Que peut-on dire de l'adhérence Zariski de X_d^{geom} dans X_d ?*

Je rappelle que l'adhérence Zariski d'une partie A d'un espace analytique séparé X est le plus petit fermé analytique réduit de X contenant A . Il existe par noethérianité des affinoïdes. On dit notamment que A est Zariski-dense dans X si son adhérence Zariski est la nilréduction de X (voir [CON99]).

¹⁴Nous entendons par là la boule unité ouverte de l'espace affine analytique sur K que l'on voit par restriction comme un espace analytique sur \mathbb{Q}_p . C'est aussi la fibre générique de l'anneau local complet $\mathcal{O}_K[[t_1, \dots, t_n]]$.

C'est un exercice de déterminer X_1 et X_1^{geom} lorsque $d = 1$. Le théorème de Kronecker-Weber montre en effet que X_1 est une réunion disjointe d'espaces analytiques de la forme $Z \times \mathcal{W}$ où Z est fini et où

$$\mathcal{W} = \text{Hom}(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{G}_m)$$

est la variété des caractères p -adique du groupe \mathbb{Z}_p^* en dimension 1. Cet espace \mathcal{W} , parfois appelé *espace des poids* en théorie des formes modulaires p -adiques, joue un rôle fondamental dans ce sujet.¹⁵ Il est isomorphe à $\widehat{\mu} \times \mathcal{B}$ où $\widehat{\mu}$ désigne la variété (finie) des caractères de dimension 1 du sous-groupe de torsion $\mu \subset \mathbb{Z}_p^*$, et $\mathcal{B} = \{t \in \mathbb{A}^1, |t| < 1\}$ est la boule unité ouverte de dimension 1 sur \mathbb{Q}_p , via l'application $\chi \mapsto (\chi|_{\mu(\mathbb{Z}_p^*)}, \chi(1+2p)-1)$.

Les points géométriques de X_1 sont alors ceux dont la composante dans \mathcal{W} est un caractère d'ordre fini fois un caractère de \mathbb{Z}_p^* de la forme $x \mapsto x^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces points sont notamment Zariski-denses dans X_1 , et ce dans un sens très fort : c'est aussi une partie d'accumulation. On dira qu'une partie A d'un espace analytique X s'accumule en $x \in X$ si x admet un système de voisinages ouverts affinoïdes U tels que $A \cap U$ est Zariski-dense dans U ; on dira que A est d'accumulation si elle s'accumule en chacun de ses points.

Le premier résultat intéressant concerne le cas $d = 2$ de la question ci-dessus, il est dû à Gouvêa et Mazur [MAZ97]. En effet, ces auteurs ont mis en évidence une partie de X_2 aux allures de type fractal, qu'ils l'ont appelée la *fougère infinie*. Il est remarquable qu'elle leur ait été suggérée par leur recherche numérique dans [GM92] de familles analytiques de formes modulaires généralisant la construction pionnière de Hida [HID86]. Les observations de Gouvêa-Mazur ont été validées ensuite par la construction de ces familles par Coleman dans [COL96] et [COL97]. Une conséquence notable de la fougère infinie est qu'elle permet de montrer que les points modulaires sont Zariski-denses dans certaines composantes connexes de X_2 .

3.3. La fougère infinie de Gouvêa et Mazur. Nous allons commencer par faire des rappels sur les observations de Gouvêa et Mazur. On suppose désormais $S = \{p\}$ pour simplifier et on fixe un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. Soit $M_k(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$ l'espace des formes modulaires de poids k pour le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. On rappelle que si

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$$

est propre pour tous les opérateurs de Hecke, et normalisée par $a_1 = 1$, on peut lui associer d'après Deligne une représentation continue $\rho_f : G_{\mathbb{Q}, S} \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ telle que le polynôme caractéristique d'un Frobenius géométrique en $\ell \neq p$ soit $X^2 - \iota(a_p)X + p^{k-1}$: c'est un cas très particulier des constructions discutées au §1.2. En particulier une telle forme définit un point $x_f \in X_2$: il est même géométrique d'après Deligne et Scholl [SCH90].

Rappelons comment Coleman associe en général deux germes d'arcs canoniques issus de x_f dans X_2 . On part du polynôme $P_f(X) = X^2 - \iota(a_p)X + p^{k-1}$. Soit α une racine

¹⁵Par définition, ses points dans une \mathbb{Q}_p -algèbre affinoïde A sont simplement les homomorphismes de groupes continus $\mathbb{Z}_p^* \rightarrow A^*$.

de P_f : c'est un entier algébrique¹⁶ dont la valuation p -adique est comprise entre 0 et $k - 1$. Coleman associe au couple (f, α) une sous-courbe (sans point isolé) d'un voisinage ouvert de x_f dans X_2 , dont le germe en x_f est canonique, que l'on notera

$$C_{(f,\alpha)} \subset X_2.$$

Cette courbe a plusieurs propriétés remarquables. D'une part, ses points de la forme $x_{f'}$ y sont Zariski-denses et d'accumulation (ce qui force bien entendu le poids des f' apparaissant à être non borné). D'autre part, si $x_{f'} \in C_{(f,\alpha)}$ alors¹⁷ $P_{f'}$ admet une racine ayant même valuation que α . Quand la valuation de α est nulle, la construction de $C_{(f,\alpha)}$ avec ces propriétés remonte à Hida [HID86], le premier exemple remontant à Serre [SER73] ("famille d'Eisenstein ordinaire").

Nous donnerons quelques indications sur cette construction de Coleman au §3.5. Je voudrais d'abord expliquer comment la fougère infinie de Gouvêa-Mazur en jaillit. Sa définition donnée dans [MAZ97] est simplement la réunion ensembliste de tous les arcs de Coleman

$$\mathcal{F}_{GM} := \bigcup_{(f,\alpha)} C_{(f,\alpha)} \subset X_2.$$

Si l'on part de f , et si P_f admet deux racines α, β de valuations $v(\alpha) \neq v(\beta)$ distinctes, Gouvêa et Mazur observent que l'intersection $C_{(f,\alpha)} \cap C_{(f,\beta)}$ est finie. En effet, il suit de la construction de Coleman que l'on peut supposer que $C_{(f,\alpha)}$ et $C_{(f,\beta)}$ sont deux fermés d'un même voisinage affinoïde de x_f , de sorte que si l'intersection est infinie, elle contient une composante irréductible de cette courbe, et donc une infinité de points de la forme $x_{f'}$. Pour un tel f' , $P_{f'}$ admet alors une racine de valuation $v(\alpha)$ et une autre de valuation $v(\beta) \neq v(\alpha)$... donc f' est de même poids $k = v(\alpha) + v(\beta) + 1$ que la forme f , ce qui contredit l'infinité des f' . Il n'est en fait pas trop difficile de démontrer que $C_{(f,\alpha)}$ et $C_{(f,\beta)}$ sont même transverses en x_f dès que $0 < v(\alpha), v(\beta) < k - 1$ [CHE11].

Observons enfin que si l'hypothèse que P_f admet deux racines de valuations distinctes n'est pas satisfaite, elle le sera de toutes façons pour tous les points de la forme $x_{f'}$ avec f' de poids $k' \neq k$ qui sont dans un arc de Coleman passant par x_f , à cause de la condition $v(P_{f'}(0)) = k' - 1$. La structure fractale de \mathcal{F}_{GM} est alors bien claire, ainsi que le terme de *fougère infinie*! (voir la figure 1 ci-dessous).

Au final, il est alors aisé de voir que l'adhérence Zariski dans X_2 des points de la forme x_f , disons W , a toutes ses composantes irréductibles de dimension au moins 2. Notons $x_{f,m} \in X_2$ le point de représentation galoisienne $\rho_x = \rho_f \otimes \omega^m$, ω étant le caractère cyclotomique p -adique et appelons *modulaire* un tel point. La théorie de Sen [SEN93] montre que W reste dans un fermé partout strict de X_2 , un nombre de Hodge-Tate généralisé y étant constant et égal à 0, le théorème suivant d'en déduit.

¹⁶... en fait, un p -nombre de Weil de poids $k - 1$ (Deligne),

¹⁷Au sens strict, cette propriété ne découle pas immédiatement de la construction de Coleman, il faut y rajouter le résultat principal de [KIS03]. Je l'utiliserai cependant ici pour simplifier l'exposition.

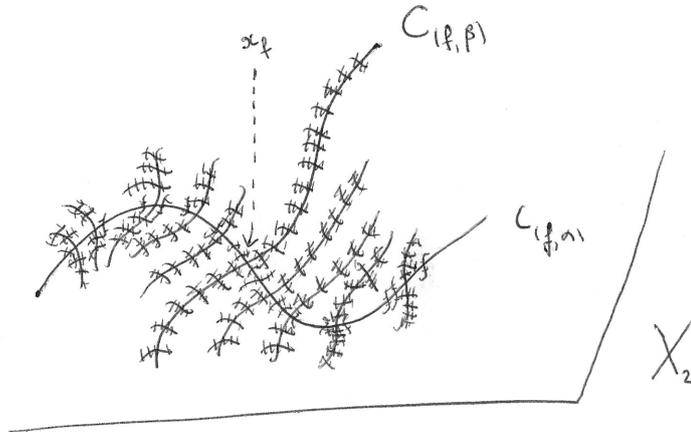


FIG. 1. La fougère infinie de Gouvêa-Mazur

THÉOREME 3.4. (*Gouvêa-Mazur, Coleman*) *L'adhérence Zariski des points modulaires dans X_2 a toutes ses composantes irréductibles de dimension ≥ 3 .*

Si r est irréductible, régulière¹⁸, et de la forme $\overline{\rho}_f$ pour une certaine forme f , auquel cas $X_2(r)$ est une boule de dimension 3, alors les points modulaires sont Zariski-denses et d'accumulation dans $X_2(r)$.

Rappelons que d'après la conjecture de modularité de Serre [SER75] (voir aussi [SER87]), démontrée par Khare et Wintenberger [KW09], l'hypothèse $r \simeq \overline{\rho}_f$ pour un certain f est automatique dès que r est impaire, i.e. $\text{Tr}(r(c)) = 0$. L'argument ci-dessus montre plus généralement que si $F \subset X_2$ est une composante irréductible contenant un point lisse qui est modulaire, alors les points modulaires sont Zariski-denses et d'accumulation dans F . On conjecture que l'ouvert fermé $X_2^{\text{odd}} \subset X_2$ paramétrant les x tels que $\text{Trace}(\rho_x(c)) = 0$ est équi-dimensionnel de dimension 3, et les résultats de Wiles [WIL95] et Taylor-Wiles [TW95] vont dans cette direction. En combinant notamment ces idées, Boeckle a pu montrer que les points modulaires sont Zariski-denses et d'accumulation dans la plupart des composantes connexes de X_2^{odd} . Je renvoie à l'exposé Bourbaki d'Emerton [EME06] pour plus de références sur ces questions.

3.5. Retour sur les travaux de Coleman [COL96],[COL97]. Avant d'aller plus loin, revenons sur l'approche de Coleman pour construire les arcs $C_{(f,\alpha)}$. La forme f engendre un sous-espace de dimension 2 dans l'espace $M_k(\Gamma_0(p))$ des formes modulaires

¹⁸La philosophie des valeurs spéciales de fonctions L suggère que cette régularité est très fréquente. Par exemple, si $\Delta \in M_{12}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$ est la fonction discriminant, alors $\overline{\rho}_\Delta$ est irréductible et régulière dès que $p > 13$ et $p \neq 691$ (Mazur, Weston [WES04]).

pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(p)$ usuel, à savoir $\langle f(\tau), f(p\tau) \rangle$, sur lequel l'opérateur de Hecke U_p d'Atkin-Lehner admet le polynôme caractéristique P_f . Le choix de α correspond donc au choix d'une forme propre f_α pour U_p dans cet espace. Elle est nécessairement propre pour les T_ℓ avec $\ell \neq p$, de même valeurs propres que f . Quand P_f admet deux racines $\alpha \neq \beta$, les formes f_α et f_β sont parfois appelées *formes jumelles* associées à f .

On considère le modèle rationnel usuel de la courbe modulaire $X_0(p)$, et plus exactement son extension des scalaires à \mathbb{Q}_p , que l'on verra comme une courbe analytique p -adique. Cette courbe vient avec un fibré en droites canonique¹⁹ ω . Le choix de ι et le théorème de type GAGA de Kiehl permet de voir $M_k(\Gamma_0(p))$ comme des sections globales de ω^k sur $X_0(p)$. Si $k \in \mathbb{Z}$, on considère alors l'espace M_k^\dagger des sections du faisceau ω^k convergentes sur un voisinage strict d'un certain ouvert affinoïde fixe $Z \subset X_0(p)$. Cet ouvert Z est la composante connexe de la pointe infini dans $X_0(p) \setminus]S[$, où $]S[$ désigne le tube supersingulier, c'est-à-dire l'image inverse par la réduction canonique $X_0(p) \rightarrow X_0(p)_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ de l'ensemble des points paramétrant les courbes elliptiques supersingulières. Bien sûr, $M_k(\Gamma_0(p)) \subset_\iota M_k^\dagger$, mais ce dernier est un espace gigantesque, une réunion croissante de Banach p -adiques ; les éléments de M_k^\dagger sont appelés formes modulaires p -adiques surconvergentes de poids k .

Coleman construit alors un faisceau \mathcal{M} de modules topologiques sur l'espace des poids \mathcal{W} , qui est localement libre dans un certain sens, et dont la spécialisation en tout $k \in \mathbb{Z}$, vu comme un élément de \mathcal{W} par le caractère $x \mapsto x^k$, coïncide avec M_k^\dagger . Un point clef est que les M_k^\dagger , en tant qu'espaces vectoriels topologiques, ne dépendent pas vraiment de k car le fibré ω est trivial sur Z . Coleman vérifie que l'action naturelle sur les M_k^\dagger des opérateurs de Hecke T_ℓ avec $\ell \neq p$, ainsi que l'opérateur d'Atkin-Lehner U_p , s'étend en une action \mathcal{W} -linéaire continue sur \mathcal{M} .

Un point important est que U_p agit comme un opérateur compact sur les M_k^\dagger (Dwork, Katz [KAT73]). Coleman introduit dans [COL97] une notion d'opérateurs compacts en famille et établit une théorie spectrale à la Fredholm pour ces derniers, généralisant [SER62]. Elle s'applique à (U_p, \mathcal{M}) et lui permet de définir notamment une série de Fredholm

$$\det(1 - TU_p | \mathcal{M}) \in \mathcal{O}(\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1) \subset \mathcal{O}(\mathcal{W})[[T]].$$

En étudiant la factorisation de cette série localement au voisinage d'un point de \mathcal{W} , il démontre que toute forme modulaire $f \in M_k^\dagger$ qui est propre pour les T_ℓ , et propre pour U_p de valeur propre non nulle, fait partie d'une famille analytique de formes modulaires p -adiques surconvergentes de poids variant dans un petit voisinage de $k \in \mathcal{W}$, également propres pour les T_ℓ et U_p . Le fait que ces familles contiennent beaucoup de formes modulaires classiques suit alors de son autre travail [COL96] ("critère de classicité de Coleman"). Je renvoie à [COL97] pour la définition exacte de familles de formes modulaires p -adiques. Disons simplement ici que les arcs introduits ci-dessus ne sont que des traductions galoisiennes de ces définitions et constructions.

¹⁹On mettra sous le tapis dans cette discussion les problèmes liés à la torsion dans $\Gamma_0(p)$, qui ne sont pas difficiles à contourner en introduisant des niveaux auxiliaires.

Mentionnons en particulier que si $f \in M_k^\dagger$ est une forme modulaire p -adique surconvergente, disons $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ avec $a_1 = 1$, et si f est propre pour U_p et les T_ℓ avec $\ell \neq p$, les valeurs propres respectives étant alors nécessairement a_p et les a_ℓ , la théorie de Coleman permet d'associer à f une unique représentation semisimple continue $\rho_f : G_{\mathbb{Q},S} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ telle que $\det(X - \rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)) = X^2 - a_\ell X + \ell^{k-1}$ pour tout $\ell \neq p$. Cette représentation est obtenue par un procédé formel d'interpolation p -adique à partir de la construction de Deligne.

3.6. The eigencurve. L'histoire de la fougère infinie ne s'arrête pas tout à fait ici. En effet, quelques années plus tard, Coleman et Mazur ont revisité dans [CM98] les constructions de Coleman et les ont "recollées" sous la forme d'un objet unique tout aussi merveilleux que la fougère infinie qu'ils appellent *the eigencurve*. Sa définition la plus simple est de considérer l'adhérence Zariski

$$\mathcal{C} \subset X_2 \times \mathbb{G}_m$$

des couples de la forme (x_f, α^{-1}) où f parcourt les formes modulaires propres, normalisées, pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, et où $P_f(\alpha) = 0$. Ils démontrent que \mathcal{C} est une courbe équidimensionnelle. C'est un fait absolument remarquable car nous avons vu précisément que l'adhérence Zariski des x_f dans X_2 est de dimension ≥ 2 .

Cette courbe est d'abord construite indépendamment de considérations galoisiennes dans [CM98], où elle apparaît comme étant l'espace des paramètres \mathcal{D} de la famille p -adique universelle de formes surconvergentes propres, de valeur propre inversible pour U_p . Par construction, elle est munie d'un morphisme fini et surjectif

$$\nu : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Z}(U_p)$$

où $\mathcal{Z}(U_p) \subset \mathcal{W} \times \mathbb{G}_m$ est le fermé défini par $\det(1 - TU_p | \mathcal{M}) = 0$ ("hypersurface de Fredholm de U_p "), et donc en particulier d'un morphisme

$$\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$$

obtenu en composant ν par la première projection. Le morphisme κ est plat et localement fini : tout point de \mathcal{D} admet un voisinage ouvert affinoïde V tel que $\kappa(V) \subset \mathcal{W}$ soit un ouvert affinoïde et tel que $\kappa|_V : V \rightarrow \kappa(V)$ soit fini et plat. En revanche, κ est en général de fibres infinies.

Des arguments de Coleman et Mazur démontrent que les points de la courbe \mathcal{D} paramétrant les formes modulaires classiques sont Zariski-denses et d'accumulation. Un argument à la Wiles permet alors de définir un unique pseudo-caractère $G_{\mathbb{Q},S} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{D})$ dont les évaluations en ces points "classiques" sont ceux de Deligne (\mathcal{D} est réduite). Il en résulte un morphisme canonique $\mathcal{D} \rightarrow X_2$. Il n'est pas difficile de voir sur la construction de \mathcal{D} que le morphisme induit $\mathcal{D} \rightarrow X_2 \times \mathbb{G}_m$, le second facteur étant la composée de ν par la projection vers \mathbb{G}_m , est une immersion fermée. On en déduit alors que $\mathcal{D} \simeq \mathcal{C}$ (d'ailleurs cet argument me semble plus simple que celui donné dans [CM98]).

Soit $\mu : \mathcal{C} \rightarrow X_2$ le morphisme déduit de la première projection. L'arc de Coleman $C_{(f,\alpha)}$ apparaît simplement dans ce langage comme l'image par μ d'un voisinage ouvert

affinoïde assez petit de (x_f, α) dans \mathcal{C} . J'appellerai fougère infinie *complète* l'ensemble

$$\mathcal{F} = \mu(\mathcal{C}) \subset X_2.$$

C'est une sorte de prolongement analytique canonique de tous les arcs de Coleman constituant \mathcal{F}_{GM} , et dont la courbe \mathcal{C} est une sorte de dépliage en tous les points doubles de la forme x_f . Cet ensemble admet une définition plus directe : c'est l'ensemble des points $x \in X_2$ tels que ρ_x est la représentation galoisienne associée à une forme modulaire p -adique surconvergente, propre pour les opérateurs de Hecke, de valeur propre non nulle pour U_p (voir [CM98] pour une définition, ici nécessaire, de telles formes de poids non seulement dans \mathbb{Z} mais dans \mathcal{W}).

Malheureusement, très peu de choses sont connues sur la géométrie globale de \mathcal{C} . Coleman et Mazur conjecturent qu'elle n'admet qu'un nombre fini de composantes irréductibles, ce qui serait assez formidable : cela signifierait qu'en prolongeant analytiquement un seul arc de Coleman bien choisi dans X_2 on pourrait parcourir de manière Zariski-dense une composante irréductible donnée de X_2 ! À ma connaissance, on ne connaît aucun exemple de ce phénomène.

3.7. Quelques contributions sur la structure de la courbe de Coleman-Mazur. Je voudrais terminer cette discussion sur la courbe \mathcal{C} de Coleman-Mazur en mentionnant quelques résultats (assez modestes !) que j'ai obtenus sur sa structure. Le premier, un travail en collaboration avec J. Bellaïche [BC06], concerne les points *Eisenstein critiques*. Ce sont les points $e_k = (x_f, \alpha^{-1})$ où f est la série d'Eisenstein de poids $k \geq 4$ pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et $\alpha = p^{k-1}$. Nous nous sommes notamment intéressés à ces points car nous avons crû un temps que l'étude de la représentation galoisienne portée par leurs voisinages dans \mathcal{C} permettrait de démontrer la non-nullité de la fonction zêta p -adique de Kubota-Leopold aux entiers impairs positifs, un fameux problème ouvert dans l'esprit de la conjecture de Leopoldt. Nous avons finalement montré plutôt le résultat suivant.

THÉOREME 3.8. *La courbe \mathcal{C} est lisse en e_k pour tout $k \geq 4$. De plus, le morphisme κ est étale en e_k si et seulement si $\zeta_p(k-1) \neq 0$ où ζ_p désigne la fonction zêta p -adique de Kubota-Leopold.*

Le second résultat que je voudrais mentionner concerne l'étude de \mathcal{C} pour des petites valeurs de p (je rappelle que je travaille encore sous l'hypothèse $S = \{p\}$, i.e. que le "niveau modéré est 1"). Au moins quand $p = 2$, certains ouverts explicites de \mathcal{C} ont été mis en évidences par plusieurs auteurs, dont Emerton, Smithline, Buzzard, Kilford, Jacobs, Calegari et Loeffler. Je renvoie à [BuC05] et [BuK05] pour des références sur ce sujet. Buzzard et Kilford déterminent notamment complètement \mathcal{C} pour $p = 2$ au dessus du complémentaire d'un certain disque fermé de \mathcal{W} . Ces auteurs procèdent en général par calculs explicites de l'action de la correspondance de Hecke U_2 sur certaines régions de $X_0(2)$. Buzzard et Calegari démontrent aussi que le morphisme κ est propre quand $p = 2$ [BuC06] (voir aussi [CAL08]).

Ma contribution est un peu différente. Tout d'abord, j'ai démontré dans [CHE08B] que pour $p = 2$ alors X_2^{odd} est la boule unité ouverte de dimension 3 sur \mathbb{Q}_2 . Cela suit du fait, dû à Tate [TAT93], que la seule représentation résiduelle dans ce cas est la triviale,

et des méthodes que j'ai déjà introduites au §2.4. C'était d'ailleurs initialement dans ce but que j'avais commencé à m'intéresser aux lois-déterminants.

J'ai aussi observé, toujours pour $p = 2$, que la seule composante irréductible F de \mathcal{C} telle que $\kappa|_F : F \rightarrow \mathcal{W}$ soit finie est la composante Eisenstein ordinaire. C'est l'occasion ici de donner l'argument, qui est très simple (mais non publié). Soit $F \subset \mathcal{C}$ une telle composante, et soit $f \in \mathcal{O}(F)$ la fonction analytique associée à U_2 , i.e. l'inverse du paramètre de \mathbb{G}_m restreint à \mathcal{C} . Soit $g = \text{Norme}_{F/\mathcal{W}}(f) \in \mathcal{O}(\mathcal{W})$. C'est une fonction qui ne s'annule pas sur \mathcal{W} et qui est partout bornée par 1, car f l'est sur F , c'est donc un élément inversible de $\mathbb{Z}_2[[\mathbb{Z}_2^*]][1/2]$. En particulier, sa valuation est constante sur \mathcal{W} . Mais il suit de [BuK05] que $v(g(w))$ tends vers 0 quand w s'approche du bord de \mathcal{W} : l'élément g est donc de valuation constante égale à 0. Il suit que $v(f(x)) = 0$ pour tout $x \in F$, i.e. F est inclus dans le lieu ordinaire, Q.E.D. Si l'on combine cet argument à la propriété de κ démontrée par Buzzard et Calegari, il semblerait²⁰ que le seul facteur irréductible polynomial de $\det(1 - TU_2|\mathcal{M})$ soit $1 - T$, les autres facteurs irréductibles étant alors de degré infini.

Enfin, ma dernière contribution est inspirée par les travaux de Colmez [COL08] et [COL10B]. Je considère l'éclaté de $\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m$ en tous les points *spéciaux*, i.e. de la forme (k, λ^{-1}) où $k \geq 2$ est un entier pair et $\lambda^2 = p^{k-2}$. Les points x de \mathcal{C} tels que $\nu(x) = (k, \lambda^{-1})$ est spécial sont exactement ceux paramétrant les formes modulaires propres $M_k(\Gamma_0(p))$ qui sont nouvelles en p au sens d'Artkin-Lehner, i.e. non de la forme f_α avec $f \in M_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ et $P_f(\alpha) = 0$. Désignons par $\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$ le transformé strict de l'hypersurface de Fredholm $\mathcal{Z}(U_p)$ dans cet éclaté. Le résultat suivant est le théorème principal de mon article [CHE08A].

THÉOREME 3.9. *Pour $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, le morphisme structural $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Z}(U_p)$ se relève en un isomorphisme $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$.*

Ces valeurs de p sont celles telles que $X_1(p)$ est de genre nul. Ces p étant également réguliers au sens de Kummer, cela entraîne que les ρ_f sont uniquement déterminées par leurs restrictions à un groupe de décomposition en p , une propriété que m'avait déjà fait observer Emerton pour $p = 2$. La démonstration consiste ensuite à comprendre pourquoi $\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$ contient toute l'information nécessaire pour paramétrer ces représentations locales. Je le démontre en utilisant de manière essentielle les propriétés "triangulines" (y compris au sens infinitésimal) des représentations galoisiennes portées par \mathcal{C} , sur lesquelles je reviendrai un peu plus loin.

3.10. Généralisations en dimension supérieure. Il me semble peu probable qu'en dimension $d \geq 3$, X_d^{geom} soit Zariski-dense dans des composantes connexes de X_d sur lesquelles la trace des conjugaisons complexes vaut ± 1 (qui sont de dimension ≥ 5). Il serait intéressant de le démontrer. Un indicateur de cela est la difficulté à construire des représentations automorphes algébriques π de GL_d sur \mathbb{Q} quand $d \geq 3$ car

²⁰Je parle ici au conditionnel car la notion de propriété employée par ces auteurs semble un peu plus restrictive que celle dont on a besoin ici pour conclure, et je n'ai pas vérifié que leurs arguments s'étendent.

leurs composantes archimédiennes π_∞ ne sont pas discrètes restreintes à $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$.²¹ En revanche, il est bien connu qu'il existe pléthore de représentations π comme plus haut qui sont polarisées au sens du §1.3 : je renvoie par exemple au §1 Ch. 2 où ce problème sera d'ailleurs étudié en détail. Cela vient au fond de ce que les composantes archimédiennes des représentations autoduales algébriques régulières sont discrètes dans le dual unitaire autodual de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$.

Ceci suggère de se restreindre en dimension $d \geq 3$ au fermé de X_d constitué des x paramétrant les représentations polarisées, i.e. tels que $\rho_x^* \simeq \rho_x \otimes \chi_x$ pour un certain caractère χ_x . Pour des raisons techniques ce n'est pas l'approche que j'ai suivie. En effet, le cadre automorphe naturel pour travailler avec ce type de représentations est celui des groupes classiques SO et Sp , mais on ne disposait pas des travaux récents d'Arthur au moment où j'ai commencé à étudier ces questions (ces travaux sont nécessaires pour relier représentations automorphes de ces groupes classiques et des GL_m , $m \geq 1$, et donc par exemple pour leur associer des représentations galoisiennes). J'ai plutôt étudié la contribution à X_d des représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes cuspidales algébriques régulières et polarisées dans le cas CM (cf. §1.3). Une autre bonne raison de se focaliser sur ce cas est que les démonstrations dont j'ai parlées au §1 utilisent aussi de manière essentielle les propriétés de la fougère infinie dans ce contexte.

Fixons un corps de nombres F qui est CM, extension quadratique totalement imaginaire du corps totalement réel F^+ , et fixons $c \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F^+)$ une conjugaison complexe. La notation S désignera désormais un ensemble fini de places finies de F^+ contenant les places au dessus de p et les places ramifiées dans F . Soit $G_{F,S}$ le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de F non ramifiée hors de S . Considérons la variété des caractères p -adique Y_d de $G_{F,S}$ en dimension d . Nous allons nous intéresser principalement à des représentations $\rho : G_{F,S} \rightarrow \mathrm{GL}_d(A)$, A étant disons une \mathbb{Z}_p -algèbre, telles que $\rho^* \simeq \rho^c \otimes \omega^{d-1}$, où ω désigne le caractère cyclotomique p -adique. Une telle représentation sera dite *de type unitaire*.²² De même, un pseudo-caractère $G_{F,S} \rightarrow A$ sera dit de type unitaire si $T(g^{-1}) = T(cgc^{-1})\omega(g)^{d-1}$ pour tout $g \in G_{F,S}$. On considère

$$Y_d^\perp \subset Y_d$$

le fermé de Y_d paramétrant les pseudo-caractères de type unitaire. En particulier, un point $x \in Y_d$ est dans Y_d^\perp si et seulement si ρ_x est de type unitaire. Bien entendu, l'induction fournissant un morphisme naturel de $Y_d \rightarrow X_{d[F:\mathbb{Q}]}$ (pour des ensembles S convenables des deux côtés), étudier Y_d c'est aussi un peu étudier X_d . Nous allons nous focaliser sur Y_d^\perp .

DEFINITION 3.11. *On dira qu'un point $x \in Y_d^\perp$ est automorphe s'il existe une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière polarisée π de GL_d sur F , et un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{k(x)}$, tels que :*

²¹Ash et Pollack ont même avancé dans [AP08] l'hypothèse qu'en conducteur 1 et pour $d = 3$, toutes ces représentations seraient à torsion près des carré symétriques de formes modulaires pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

²²On peut justifier cette terminologie en reliant les représentations de type unitaire de $G_{F,S}$ avec les morphismes de $G_{F^+,S}$ dans un groupe algébrique non connexe qui apparaît comme le dual de Langlands algébrique du groupe unitaire quasi-déployé, à d variables, associé à F/F^+ : voir [CHT08] et [BG11].

- (i) π_v est non ramifiée si $v|p$ ou si v n'est pas au-dessus de S ,
- (ii) $\rho_x \simeq \rho_{\pi, \iota}$.

La conjecture optimiste suivante me semble néanmoins raisonnable. Une représentation semisimple $r : G_{F,S} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_p)$ sera dite automorphe si elle est de la forme $\overline{\rho_x}$ avec $x \in Y_d^\perp$ automorphe. On pose $Y_d^\perp(r) := Y_d(r) \cap Y_d^\perp$.

CONJECTURE 3.12. *Les points automorphes sont Zariski-denses et d'accumulation dans $Y_d^\perp(r)$ pour toute représentation résiduelle automorphe r .*

On pourrait sans doute supprimer la donnée du r dans l'énoncé ci-dessus, via une généralisation convenable de la conjecture de Serre, à condition de se restreindre aux composantes irréductibles de Y_d^\perp paramétrant des représentations satisfaisant une condition de "signe" convenable dans l'esprit du Théorème 1.7.

Le théorème suivant, résultat principal de mon article [CHE11], est un premier pas en direction de la conjecture ci-dessus. Cet article contient aussi un énoncé similaire concernant les formes modulaires de Hilbert, que je ne détaillerai pas ici.

THÉOREME 3.13. *On suppose $d \leq 3$ et que F est totalement décomposé en p . Alors l'adhérence Zariski des points automorphes dans Y_d^\perp a toutes ses composantes irréductibles de dimension $\geq [F^+ : \mathbb{Q}] \frac{d(d+1)}{2}$.*

Je rappelle que pour $d = 3$, les ρ_x avec $x \in Y_3^\perp$ automorphe apparaissent dans la cohomologie étale p -adique de puissances de la variété abélienne universelle sur les surfaces de Picard associées à F (ils sont même géométriques par construction si $[F^+ : \mathbb{Q}] > 1$), voir le §1 et [LR92].

Mon but dans les paragraphes qui suivent est de donner des indications sur la démonstration de ce théorème. Je veux mentionner auparavant que $[F^+ : \mathbb{Q}] \frac{d(d+1)}{2}$ est également la dimension probable des $Y_d^\perp(r)$ avec r automorphe. Les premiers indicateurs de ce fait remontent à [CHT08]. L'ingrédient crucial pour le comprendre est le Théorème 1.7. Partons pour simplifier d'une représentation irréductible continue $r : G_{F,S} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_p)$ de type unitaire. De même que la théorie des déformations usuelle de r est gouvernée par la représentation $\mathrm{ad}(r)$ [MAZ87], celle des déformations de r qui sont de type unitaire est gouvernée par une certaine représentation que je noterai ici

$$\mathrm{ad}^+(r)$$

du groupe de Galois $G_{F^+,S}$ (le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de F^+ non ramifiée hors de S).

Elle a les propriétés suivantes. D'une part, si V désigne l'espace de r alors l'espace sous-jacent à $\mathrm{ad}^+(r)$ est $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V)$, et la restriction à $G_{F,S}$ de $\mathrm{ad}^+(r)$ est simplement $\mathrm{ad}(r)$. D'autre part, si \langle, \rangle est un $G_{F,S}$ -accouplement non-dégénéré $V \otimes V^c \rightarrow \omega^{1-d}$, alors l'élément c agit dans $\mathrm{ad}^+(r)$ comme l'opposé de l'adjonction par rapport à cet accouplement. Si $p \neq 2$, et si cet accouplement est symétrique, ce qui est notamment le

cas pour les r automorphes d'après le Théorème 1.7, on constate que

$$\dim(\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p} V)^{\mathrm{ad}^+(r)(c)=-\mathrm{id}} = \frac{d(d+1)}{2}$$

(au lieu de $\frac{d(d-1)}{2}$ dans le cas alterné). Si $H^2(G_{F^+,S}, \mathrm{ad}^+(r)) = 0$, le foncteur des déformations continues de type unitaire de r est formellement lisse²³ et d'espace tangent de dimension²⁴ $[F^+ : \mathbb{Q}] \dim(\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p} V)^{\mathrm{ad}^+(r)(c)=-\mathrm{id}}$, et en particulier $Y_d(r)$ est une boule ouverte de cette dimension.

COROLLAIRE 3.14. *Supposons $p > 2$ et que $r : G_{F,S} \rightarrow \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est irréductible, automorphe, telle que $H^2(G_{F^+,S}, \mathrm{ad}^+(r)) = 0$. Alors les points automorphes sont Zariski-denses et d'accumulation dans $Y_3^\perp(r)$, qui est une boule ouverte de dimension $6[F^+ : \mathbb{Q}]$.*

Voici un exemple concret d'application pour lequel je renvoie à l'appendice de [CHE11]. Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q} de conducteur N , soit F un corps quadratique imaginaire, et soit S l'ensemble des nombres premiers divisant $2pN$. La représentation $r = (\mathrm{Sym}^2 E[p])_{|G_{F,S}}^*$ est bien de type unitaire, elle est même automorphe d'après Wiles et ses continueurs [BCDT], Gelbart-Jacquet [GJ78], et Arthur-Clozel [AC89]. C'est un exercice de vérifier que

$$\mathrm{ad}^+(r) = \varepsilon_{F/\mathbb{Q}} \oplus r \otimes \omega \oplus (\mathrm{Sym}^4 E[p])^* \otimes \varepsilon_{F/\mathbb{Q}} \omega^2$$

où $\varepsilon_{F/\mathbb{Q}}$ est le caractère d'ordre 2 de $G_{\mathbb{Q},S}$ défini par F/\mathbb{Q} . J'ai pu vérifier *loc. cit.* que si $p = 5$ et $F = \mathbb{Q}(i)$, et si la classe d'isogénie de E est du type

$$17A, 21A, 37B, 39A, 51A, 53A, 69A, 73A, 83A, 91B$$

dans les tables de Cremona, alors r est irréductible et satisfait $H^2(G_{F^+,S}, \mathrm{ad}^+(r)) = 0$. C'est par exemple le cas de la courbe $y^2 + xy + y = x^3 - x^2 - x$ de conducteur 17. Ces calculs dépendent de calculs de nombre de classes faits par Pari [PARI] qui sont conditionnels à GRH.

3.15. La fougère infinie de type unitaire. Le premier ingrédient crucial dans la démonstration du Théorème 3.13 est la présence d'une généralisation de la théorie de Coleman, ainsi que de la fougère infinie de Gouvêa-Mazur, dans le contexte des représentations galoisiennes de type unitaire. Pour l'essentiel, et quand $F^+ = \mathbb{Q}$, j'avais construit de telles généralisations dans mon article [CHE04] issu de ma thèse. Le lecteur ne perdrait d'ailleurs par grand chose en première approche à supposer $F = \mathbb{Q}^+$ et $d = 3$ dans ce qui suit. Au prix d'une perte d'un peu de clarté, je me sens néanmoins obligé de me placer dans le cadre d'un corps totalement réel F^+ général, qui est celui dont on a besoin pour démontrer les théorèmes énoncés dans le §1, et pour lequel je renvoie à mon article [CHE09A].

²³...sur l'anneau des vecteurs de Witt du corps des coefficients de r ,

²⁴Cela résulte de la formule de la caractéristique d'Euler de Tate [MIL86]. On observera que les $G_{F,S}$ -invariants de $\mathrm{ad}^+(r)$ sont nuls, car ils sont inclus dans les homothéties par irréductibilité de r , sur lesquels c agit par $-\mathrm{id}$.

On conserve les notations du §3.10. On désignera de plus par S_p l'ensemble des places de F^+ divisant p . Mes hypothèses de travail seront désormais les suivantes :

- (i) Si d est pair, alors $d[F^+ : \mathbb{Q}] \equiv 0 \pmod{4}$.
- (ii) Si $d > 3$, alors F est non ramifié au dessus de toutes les places finies de F^+ , et S ne contient que des places décomposées dans F .
- (iii) Chaque $v \in S_p$ est décomposée dans F .

Expliquons ces hypothèses. Sous la condition (i), le principe de Hasse pour les formes hermitiennes assure qu'il existe une forme hermitienne sur F^d relativement à F/F^+ , telle que l'espace hermitien $F^d \otimes_{F^+} F_v^+$ soit d'indice maximal $[d/2]$ pour toute place finie v de F^+ et défini positif pour toute place réelle. On désignera alors par

$$U(d)$$

le groupe unitaire associé, qui est un groupe algébrique sur F^+ .

La condition (ii) est la condition sous laquelle il est actuellement connu que les représentations automorphes de $U(d)$ se transfèrent par "changement de base" à $U(d) \times_{F^+} F \simeq \mathrm{GL}(d)$ selon les recettes de Langlands et Arthur. Si $d \leq 3$, c'est le théorème principal de Rogawski [ROG90] (voir aussi [LR92]), et sous (ii) c'est dû à Labesse [LAB11]. Il est raisonnable d'espérer que dans un futur proche l'hypothèse (ii) ne soit plus nécessaire, étant donné notamment les résultats récents de Mœglin [MOE07], et ceux de Mok [MOK12], sur la classification d'Arthur pour les groupe unitaires. Il faut rajouter que du point de vue des astuces "à la Blasius-Rogawski" permettant de raisonner après changement de base, l'hypothèse (ii) n'est pas aussi farfelue qu'elle n'y paraît. Enfin, l'hypothèse (iii) est une hypothèse simplificatrice que nous avons faite dans notre travail mais qui pourrait sans doute être levée.

Notre objectif dans les paragraphes qui suivent est d'abord de définir un analogue de la courbe de Coleman-Mazur. Pour que nos énoncés soient corrects il sera nécessaire d'étendre légèrement la notion de point automorphe de Y_d^1 définie précédemment, en une notion relative au groupe unitaire $U(d)$.

Si π est une représentation automorphe de $U(d)$, désignons par $\tilde{\pi}$ la torsion par $|\cdot|^{-\frac{1-d}{2}}$ du changement de base de π à $\mathrm{GL}(d)$ sur F . Il existe alors une écriture $d = \sum_{i=1}^k d_i$, où k et les d_i sont des entiers ≥ 1 , ainsi que des représentations automorphes discrètes algébriques régulières Π_i des $\mathrm{GL}(d_i)$ sur F telles que $\Pi_i^\vee \simeq \Pi_i^c \cdot |\cdot|^{-\frac{d_i-1}{2}}$, tels que $\tilde{\pi}$ soit l'induite parabolique normalisée de $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_k$. Les résultats²⁵ du §1, et la recette de Mœglin et Walspurger [MW89], permettent d'associer à ces Π_i des représentations galoisiennes $\rho_{\Pi_i, \iota}$ satisfaisant (C1), (C2) et (C3) de la manière évidente, et donc de poser

$$\rho_{\pi, \iota} = \bigoplus_{i=1}^k \rho_{\Pi_i, \iota}.$$

Cette représentation de $G_{F,S}$ détermine d'ailleurs en retour l'entier k et les (Π_i, d_i) à permutation près [JS81].

²⁵Lorsque d et d_i sont de même parité, alors $\Pi_i \cdot |\cdot|^{-\frac{d-d_i}{2}}$ est polarisée. Sinon, c'est $\Pi_i \cdot |\cdot|^{-\frac{d-d_i-1}{2}} \mu$ qui l'est, μ étant n'importe quel caractère de Hecke algébrique de F tel que $\mu^{-1} = \mu^c \cdot |\cdot|$.

DEFINITION 3.16. *Un point $x \in Y_d^\perp$ sera dit $U(d)$ -automorphe s'il existe une représentation automorphe π de $U(d)$, non ramifiée en tout $v \notin S$ et tout $v|p$, ainsi qu'un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{k(x)}$, tels que $\rho_x \simeq \rho_{\pi,\iota}$.*

C'est un fait essentiel que tous les points automorphes de Y_d^\perp au sens de la Définition 3.11 sont $U(d)$ -automorphes ([ROG90],[LAB11]). La caractérisation des points $U(d)$ -automorphes généraux en terme des Π_i associées est en revanche assez subtile : elle est décrite par la formule de multiplicité d'Arthur, qui à l'heure actuelle est encore non démontrée dans ce contexte dès que $d > 3$. Nous n'en aurons cependant pas besoin. Il nous reste à définir la notion de point $U(d)$ -automorphe *raffiné*. Cette notion de raffinement sera l'analogie du choix d'une racine α de P_f dans la construction des arcs de Coleman passant par x_f rappelée au §3.5.

Soit x un point $U(d)$ -automorphe de Y_d^\perp . La représentation galoisienne ρ_x est cristalline en toutes les places v divisant p par la propriété (C3). Si v est une telle place, regardons le φ -module filtré $D_{\text{cris}}((\rho_x)_v)$ défini par Fontaine. Il admet un opérateur Frobenius φ , et nous désignerons par $P_{x,v} \in \overline{k(x)}[T]$ le polynôme caractéristique de $\varphi_{x,v} = \varphi^{f_v}$, où p^{f_v} est le cardinal du corps résiduel de F_v . Inspirés par Mazur [MAZ00], nous appellerons *raffinement de x en v* la donnée d'une énumération²⁶

$$\Phi_v = (\phi_{1,v}, \phi_{2,v}, \dots, \phi_{d,v}) \in \overline{k(x)}^d$$

des racines de $P_{x,v}$ dans $\overline{k(x)}$ (comptées avec multiplicités).

D'après la propriété (C3) de $(\rho_x)_v$, il est aussi équivalent de choisir un ordre sur les valeurs propres du paramètre de Satake de π_u si π est la représentation automorphe de $U(d)$ associée à x et si u est la place de F_+ au dessous de v . Dans le cas "générique" où les racines de $P_{x,v}$ sont distinctes, alors x admet exactement $d!$ raffinements en v .

Il sera commode de choisir²⁷ une fois pour toutes, pour chaque $v \in S_p$, l'une des deux places de F au dessus de v , et de désigner par \tilde{S}_p l'ensemble de ces places choisies de F .

DEFINITION 3.17. *Un point $U(d)$ -automorphe raffiné est un couple (x, Φ) où $x \in Y_d^\perp$ est un point $U(d)$ -automorphe, et $\Phi = \{\Phi_v, v \in \tilde{S}_p\}$ est une collection de raffinements Φ_v de x en chaque $v \in \tilde{S}_p$.*

Nous allons pour finir associer à chaque point $U(d)$ -automorphe raffiné (x, Φ) un point canonique

$$(3) \quad x_\Phi = (x, \delta) \in Y_d^\perp \times \mathcal{T}^d,$$

²⁶Lorsque le point x paramètre une représentation automorphe de $U(d)$ dont les Π_i associés par la recette de changement de base rappelée plus haut ne sont pas cuspidaux, nous faisons en fait une hypothèse supplémentaire sur Φ_v que nous mettons ici sous le tapis : je renvoie à [BC09, §6.4] pour la définition correcte dans ce cas (cela correspond à la notion de raffinement *accessible* au sens de *loc. cit.*). Cette mise en garde ne concerne ni les points automorphes, ni les poids $U(d)$ -automorphes paramétrant les π dont le caractère infinitésimal est assez régulier. Elle jouera par contre un rôle au Ch. 2 §4.

²⁷Ce choix n'aura qu'une influence bénigne sur les considérations qui suivent, mais nous évitera des périphrases pénibles.

où \mathcal{T} désigne l'espace analytique p -adique paramétrant les caractères continus du groupe multiplicatif²⁸ de $(F_p^+)^*$, où $F_p^+ = F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$. L'espace \mathcal{T} est très concret : le choix d'une uniformisante de F_v^+ pour tout $v \in S_p$ l'identifie au produit direct

$$\mathcal{T} \simeq \mathbb{G}_m^{S_p} \times \mathcal{T}_0,$$

où \mathcal{T}_0 désigne la variété des caractères p -adique en dimension 1 du groupe compact $\prod_{v \in S_p} \mathcal{O}_{F_v^+}^*$ (une réunion disjointe finie de boules ouvertes de dimension $[F^+ : \mathbb{Q}]$). Quand $F^+ = \mathbb{Q}$ on a simplement $\mathcal{T}_0 = \mathcal{W}$ et $\mathcal{T} \simeq \mathbb{G}_m \times \mathcal{W}$.

Tout élément $\underline{k} = (k_{i,\sigma}) \in (\mathbb{Z}^d)^{\text{Hom}(F^+, \overline{\mathbb{Q}}_p)}$ pourra être vu comme un élément de $\mathcal{T}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ en considérant le caractère "algébrique"

$$(x_{i,v}) \mapsto \prod_{i,\sigma} \sigma(x_{i,v_\sigma})^{k_{i,\sigma}},$$

où σ parcourt $\text{Hom}(F^+, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ et $v_\sigma \in S_p$ désigne la place induite par σ .

Il reste à définir le caractère δ dans la formule (3). C'est le produit $\delta = \delta_{nr} \delta_w$ de deux caractères, où δ_{nr} ne dépend que de Φ , et où δ_w ne dépend que des poids de Hodge-Tate des $(\rho_x)_v$ avec $v \in \tilde{S}_p$. Ces derniers, naturellement indexés par les plongements $\sigma : F^+ \rightarrow \overline{k(x)}$, sont distincts par définition à σ fixé, et seront numérotés dans l'ordre croissant :

$$k_{1,\sigma} < k_{2,\sigma} < \dots < k_{d,\sigma}.$$

On pose $\underline{k} = (k_{i,\sigma})$ et $\delta_w = \underline{k}^{-1}$. Pour décrire enfin δ_{nr} , on fixe une place $v \in S_p$, ainsi qu'un entier $i \in \{1, \dots, d\}$, et il suffit de donner sa restriction au facteur $(F_v^+)^*$ mis à la place i (vu comme sous-groupe avec des 1 aux autres coordonnées). Soit $u \in \tilde{S}_p$ l'unique place divisant v . Alors δ_{nr} est trivial sur $\mathcal{O}_{F_v^+}^*$ et envoie une uniformisante de F_v^+ sur le i -ème élément $\phi_{i,u}$ de Φ_u .

DEFINITION 3.18. *La variété de Hecke de $U(d)$ est l'adhérence Zariski*

$$\mathcal{E}_d \subset Y_d^\perp \times \mathcal{T}^d$$

de tous les points x_Φ , où (x, Φ) parcourt les points $U(d)$ -automorphes raffinés de Y_d^\perp .

C'est la généralisation naturelle de la courbe de Coleman-Mazur. La terminologie anglaise d'usage pour \mathcal{E}_d est *eigenvariety*. La traduction française littérale étant ambiguë nous lui avons préféré ce terme dans [CHE04] car elle apparaît aussi de manière naturelle comme un spectre d'une algèbre de Hecke. Observons que la seconde projection, ainsi que la projection naturelle $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_0$, définissent des morphismes naturels $\nu : \mathcal{E}_d \rightarrow \mathcal{T}^d$ et $\kappa : \mathcal{E}_d \rightarrow \mathcal{T}_0^d$ ("morphisme poids").

THÉOREME 3.19. (i) \mathcal{E}_d est d'équidimension $\dim(\mathcal{T}_0^d) = d[F^+ : \mathbb{Q}]$.

(ii) Le morphisme ν est fini et le morphisme κ est localement fini et ouvert.

(iii) Les points automorphes raffinés x_Φ sont Zariski-denses et d'accumulation dans \mathcal{E}_d .

²⁸Cela signifie que se donner un morphisme $X \rightarrow \mathcal{T}$, X étant un \mathbb{Q}_p -affinoïde, équivaut à se donner un homomorphisme continu de groupes $F_p^* \rightarrow \mathcal{O}(X)^*$.

Ce théorème est le résultat principal de mes articles [CHE04] et [CHE09A], étendant notamment des travaux de Hida [HID95] (voir aussi [AS97], [AS00], [HID04],[EME06], [BUZ07], [LOE11], [URB11]). Je renvoie à [BC09, §7], ainsi qu'à mon cours Peccot [CHE08c], pour une discussion détaillée du cas particulier $F^+ = \mathbb{Q}$. La propriété précise de κ sus-entendue dans le (ii) ci-dessus est la suivante : \mathcal{E}_d est admissiblement recouvert par des ouverts affinoïdes Ω tels que $\kappa(\Omega)$ est ouvert et $\kappa|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \kappa(\Omega)$ est fini.

Il ne me semble pas nécessaire de revenir sur la démonstration de ce théorème dans ce mémoire, car il est plutôt issu de mon travail de thèse et rallongerait un peu trop cette discussion déjà longue. Disons simplement que nous développons une théorie ad hoc de formes automorphes p -adiques pour le groupe unitaire $U(d)$ ayant des propriétés formelles similaires aux constructions de Coleman rappelées au §3.5.²⁹ La compacité du groupe $U(d)(F_v^+)$ pour toute place v archimédienne joue un rôle simplificateur crucial dans mes constructions. En effet, toutes les représentations automorphes de $U(d)$ ayant alors de la cohomologie en degré 0, on est simplement ramené à interpoler p -adiquement les représentations algébriques irréductibles du \mathbb{Q} -groupe $G = \text{Res}_{\mathbb{Q}}^{F^+} U(d)$, ce que l'on fait à l'aide de la série principale localement analytique des représentations d'un sous-groupe d'Iwahori de $G(\mathbb{Q}_p)$.

La méthode de Coleman-Mazur, étendue par Buzzard [BUZ07], appliquée aux constructions évoquées ci-dessus, fournit d'abord un analogue purement automorphe de leur construction \mathcal{D} (§3.6) dans ce contexte qui a les propriétés (i) et (iii) du Théorème, et qui vient par construction avec des morphismes ν et κ satisfaisant (ii) également. Le (iii) suit d'un critère beaucoup plus précis assurant qu'un point $x \in \mathcal{D}$ est $U(d)$ -automorphe dès que $\nu(x)$ satisfait un critère explicite à la Coleman [COL96] [CHE09A]. L'existence de représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes de $U(d)$ par la recette de changement de base décrite plus haut, qui repose sur le §1, et un argument de pseudo-caractères à la Wiles [WIL88], permet alors de définir un morphisme canonique $\eta : \mathcal{D} \rightarrow Y_d^\perp$. Le morphisme qui s'en déduit

$$\eta \times \nu : \mathcal{D} \longrightarrow Y_d^\perp \times \mathcal{T}^d$$

est par construction une immersion fermée dont l'image contient tous les points $U(d)$ -automorphes raffinés, cette image est donc simplement \mathcal{E}_d , d'où le théorème. Je renvoie à [CHE11, §2.1] pour le détail de cette partie de l'argument.

Je veux rajouter ici que pour pouvoir définir le morphisme η , il suffit de savoir associer des représentations galoisiennes à un sous-ensemble Zariski-dense dans \mathcal{D} de points $U(d)$ -automorphes, par exemple ceux paramétrant les représentations automorphes ayant un caractère infinitésimal assez régulier. On obtient alors gratuitement des représentations galoisiennes associées aux autres points automorphes³⁰ de \mathcal{D} , et même plus généralement

²⁹Définition d'une notion de forme automorphe p -adique englobant la notion classique, construction d'un certain module sur l'espace des poids \mathcal{T}_0 interpolant les espaces de telles formes, avec action des opérateurs de Hecke, application de la théorie spectrale de Coleman en famille à un certain opérateur compact, etc...

³⁰En fait, l'espace \mathcal{D} contient aussi des points paramétrant des représentations automorphes de $U(d)$ qui sont ramifiées aux places divisant p , notamment par construction toutes celles qui ont des invariants par un sous-groupe d'Iwahori en toutes ces places. C'est un fait important dans la démonstration du

à tous ses points, qui paramètrent par définition les formes automorphes p -adiques pour $U(d)$ qui sont propres et de "pentes finies" : c'est un fait simple mais essentiel dans la démonstration de ma contribution au Théorème 1.4.

À ce stade la définition de la fougère infinie unitaire complète est similaire à celle du §3.6. La projection $Y_d^\perp \times \mathcal{T}^d \rightarrow Y_d^\perp$ induit un morphisme naturel $\mu : \mathcal{E}_d \rightarrow Y_d^\perp$.

DEFINITION 3.20. *La fougère infinie unitaire est l'ensemble $\mathcal{F}_d = \mu(\mathcal{E}_d) \subset Y_d^\perp$.*

Cette fougère présente une structure fractale dans l'esprit de celle de Gouvêa et Mazur. En effet, soit $x \in Y_d^\perp$ un point automorphe, ou même plus généralement $U(d)$ -automorphe. Le choix d'un raffinement Φ de x définit un point $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$. Soit Ω un voisinage ouvert affinoïde de x_Φ dans \mathcal{E}_d . Quitte à rétrécir Ω , la propriété (ii) assure que

$$B_{x,\Phi} := \mu(\Omega) \subset Y_d^\perp$$

est un fermé d'un voisinage ouvert affinoïde de x dans Y_d^\perp . C'est l'analogue des arcs de Coleman. Le germe en x de $B_{x,\Phi}$ est canonique. Nous dirons en général que c'est la branche de la fougère infinie \mathcal{F}_d en x associée au raffinement Φ .

Comme x possède jusqu'à $(d!)^{|S_d|}$ raffinements, il peut y avoir tout autant de branches de la fougère passant par x . Mais les points $U(d)$ -automorphes s'accumulent en x dans $B_{x,\Phi}$ par la propriété (iii). La structure fractale de \mathcal{F}_d devient alors tout à fait transparente! La figure 2 ci-dessous est une illustration quand $d = 3$ et $F^+ = \mathbb{Q}$. C'est ici le point de départ de mon article [CHE11].

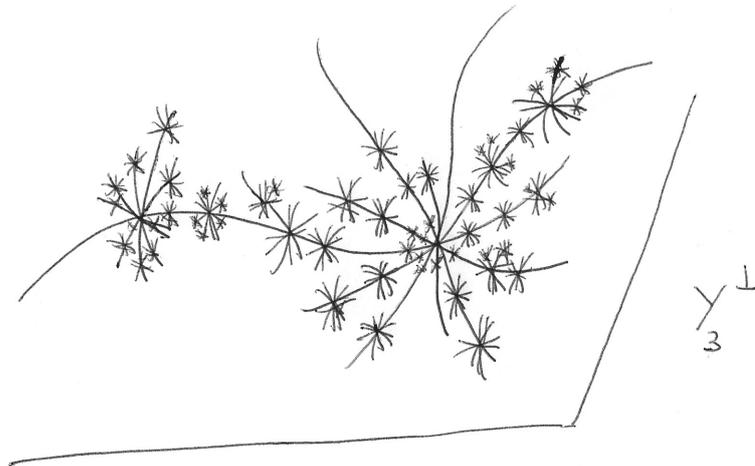


FIG. 2. La fougère infinie unitaire dans Y_3^\perp

Théorème 1.4 car étant donnée une représentation automorphe cuspidale π de GL_d sur F , on peut toujours trouver une extension CM résoluble F'/F telle que le changement de base de π à F' ait des invariants par un sous-groupe d'Iwahori en chaque place ("potentielle semi-stabilité").

Ainsi, la fougère infinie \mathcal{F}_d apparaît comme un "espace de dimension $d[F^+ : \mathbb{Q}]$ " qui évolue dans l'espace Y_d^\perp de dimension conjecturale beaucoup plus grande $\frac{d(d+1)}{2}[F^+ : \mathbb{Q}]$. Il possède un ensemble Zariski-dense et d'accumulation de points hautement multiples, à savoir les points $U(d)$ -automorphes. La numérogie rend assez délicate la généralisation directe de l'argument de Gouvêa et Mazur. Mon approche pour minorer la dimension de son adhérence Zariski sera de comparer les positions relatives des différentes branches $B_{x,\Phi}$ en un point automorphe x . J'utiliserai pour cela les propriétés en $v \in \tilde{S}_p$ des $(\rho_z)_v$ quand z varie dans ces branches.

3.21. Propriétés aux places divisant p des représentations galoisiennes dans la fougère infinie. Commençons par quelques observations assez simples mais essentielles qui découlent des propriétés directes de \mathcal{F}_d . En guise de prétexte, je me propose de les illustrer par le résultat suivant ([BC04, §9],[BC09, §7.7],[BC11, §3]), ingrédient clef dans notre démonstration du Théorème 1.7 esquissée au §1.5.

PROPOSITION 3.22. *Pour tout point $U(d)$ -automorphe $x \in Y_d^\perp$, et tout voisinage ouvert affinoïde V de x dans Y_d^\perp , il existe un point automorphe $y \in V$ tel que $(\rho_y)_v$ est irréductible pour tout $v \in \tilde{S}_p$.*

L'idée de la démonstration est de partir du point x de cette proposition et de se déplacer dans la fougère infinie \mathcal{F}_d en choisissant bien les branches par lesquelles on passe à chaque fois qu'un choix de raffinement est possible !

Comme je vais l'expliquer ci-dessous, on dispose d'un certain contrôle sur les polygones de Hodge et de Newton des Frobenius cristallins des $(\rho_{y_{\Phi'}})_v$ quand $y_{\Phi'}$ est dans un petit voisinage d'un $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$ donné. Ce contrôle va nous permettre d'appliquer des critères du type suivant : pour qu'une $\overline{\mathbb{Q}}_p$ -représentation cristalline W de dimension d de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ soit irréductible, il suffit que les polygones de Newton et de Hodge de $D_{\text{cris}}(W)$ n'ait pas de "sous-polygones" respectifs dont les extrémités soient communes. En effet, si $W' \subset W$ est une sous-représentation, nécessairement cristalline, les polygones de Hodge et Newton de $D_{\text{cris}}(W') \subset D_{\text{cris}}(W)$ fournissent de tels sous-polygones.³¹

Pour simplifier, je supposerai désormais que $F^+ = \mathbb{Q}$, de sorte qu'il n'y ait qu'une seule place v dans \tilde{S}_p , qui satisfait de plus $F_v = \mathbb{Q}_p$. L'uniformisante $p \in \mathbb{Q}_p$ fournit une identification $\mathcal{T} = \mathbb{G}_m \times \mathcal{W}$. Désignons par

$$F_1, \dots, F_d \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_d)^*$$

les restrictions à \mathcal{E}_d par l'application ν des coordonnées des facteurs \mathbb{G}_m de \mathcal{T}^d . Soit $\Phi_v = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d)$ un raffinement de x en v , et $\Phi = \{\Phi_v\}$. Si $k_1 < k_2 < \dots < k_d$ sont les poids de Hodge-Tate de $(\rho_{x_\Phi})_v$, on a

$$(F_1(x_\Phi), F_2(x_\Phi), \dots, F_d(x_\Phi)) = (\phi_1 p^{-k_1}, \phi_2 p^{-k_2}, \dots, \phi_d p^{-k_d})$$

par définition. Les fonctions F_i étant analytiques sur \mathcal{E}_d par construction, on constate que la collection des représentations cristallines $(\rho_{x_\Phi})_v$, quand x_Φ varie dans \mathcal{E}_d , a la propriété que les *valeurs propres du Frobenius cristallin* $(\rho_{x_\Phi})_v$, prises dans l'ordre de

³¹Cette assertion devrait indiquer au lecteur le sens que je donne au terme "sous-polygone".

Φ_v , et renormalisées par les poids de Hodge-Tate pris dans l'ordre croissant, varient analytiquement. C'est un fait absolument remarquable, étant donné que typiquement la fonction $k \mapsto p^k$ n'est bien sûr pas continue pour la topologie p -adique sur \mathbb{Z} , et que ces valeurs propres de Frobenius sont généralement divisibles par des grandes puissances de p .

La situation typique est donc qu'au voisinage Ω assez petit d'un point $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$, les fonctions $x \mapsto v(F_i(x))$ sont des constantes $v_i \in \mathbb{Q}$, alors que la variation des poids données par κ est aussi générique que possible : si $y_{\Phi'} \in \Omega$ a pour poids de Hodge-Tate en v les entiers $k'_1 \ll k'_2 \ll \dots \ll k'_d$ (les tels points s'accroissent en z) les pentes du polygone de Newton de $D_{\text{cris}}((\rho_{y_{\Phi'}})_v)$ sont les

$$k'_1 + v_1 \ll k'_2 + v_2 \ll \dots \ll k'_d + v_d.$$

Il en résulte que "vu de très loin", les polygones de Hodge et de Newton des $D_{\text{cris}}((\rho_{y_{\Phi'}})_v)$ avec $y_{\Phi'} \in \Omega$ vont "presque coïncider", avec un écart mesuré par les v_i ! La figure 3 ci-dessous illustre cette propriété. Elle est d'ailleurs mieux comprise lorsque l'on introduit la notion de représentation trianguline [COL08], qui forme une généralisation simultanée des représentations totalement réductibles et des représentations cristallines de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$: nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe qui suit.

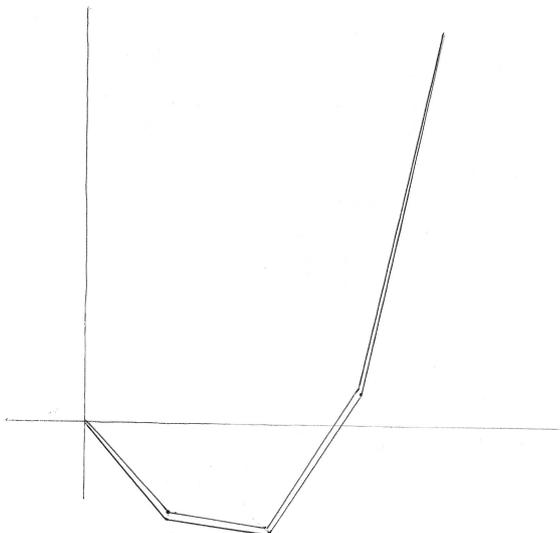


FIG. 3. Le $D_{\text{cris}}((\rho_{x_\Phi})_v)$ d'un point $U(d)$ -automorphe raffiné typique $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$

Observons enfin que si l'on était parti d'un même x mais d'un raffinement $\Phi' \neq \Phi$ différent, les constantes v_i ci-dessus seraient en général tout-à-fait différentes : ce serait les $v_{\sigma(i)} + k_{\sigma(i)} - k_i$ si $\Phi'_v = (\varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(d)})$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_d$. Il en suit une combinatoire plutôt amusante qui nous permet, en partant du x de l'énoncé ci-dessus et en bougeant

un peu dans la fougère, de produire un $y \in V$ avec des polygones de Hodge et de Newton profondément modifiés, satisfaisant par exemple le critère d'irréductibilité plus haut. On vérifie dans [BC11], auquel je renvoie pour les détails, qu'il suffit pour cela de se promener dans 3 branches bien choisies de la fougère à partir de x . \square

Les observations ci-dessus dévoilent des propriétés intéressantes des représentations galoisiennes $(\rho_{x_\Phi})_v$ pour $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$ et $v \in \tilde{S}_p$. Pour aller plus loin dans la compréhension de la fougère infinie, il est nécessaire de comprendre avec plus de précision les propriétés de ces $(\rho_x)_v$ pour un point général $x \in \mathcal{E}_d$, ou du moins dans un voisinage d'un x_Φ . Rappelons que ces ρ_x sont associées aux formes automorphes p -adiques propres de pente finie de $U(d)$. Elles n'ont pas été construites par voie géométrique, mais plutôt par interpolation p -adique à partir des points $U(d)$ -automorphes, de surcroît par un argument global utilisant Cebotarev, ce qui rend peu évident le problème de comprendre $(\rho_x)_v$.

Un progrès important dans cette direction a été obtenu par Kisin. Il a observé dans [KIS03] que dans les familles p -adiques de représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ satisfaisant, dans un cadre abstrait, des propriétés similaires à celles mises en évidence ci-dessus, tous les ρ_x héritent automatiquement de périodes cristallines par interpolation. Kisin considère précisément le cadre abstrait suivant.

Soient Y un espace analytique p -adique réduit et séparé, $F \in \mathcal{O}(Y)^*$ une fonction analytique inversible, M un \mathcal{O}_Y -module libre de rang d muni d'une représentation \mathcal{O}_Y -linéaire continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et $Z \subset Y$ un sous-ensemble Zariski-dense, ayant les deux propriétés suivantes. D'une part, on suppose que pour tout $z \in Z$, la $k(z)$ -représentation M_z obtenue par évaluation de M en z est cristalline et satisfait $D_{\text{cris}}(M_z)^{\varphi=F(z)} \neq 0$. D'autre part, on demande que pour tout réel $C > 0$ l'ensemble des $z \in Z$ tels que M_z admet 0 pour poids de Hodge-Tate simple, et a tous ses autres poids $> C$, est Zariski-dense dans Y . Kisin démontre alors dans [KIS03] que

$$(4) \quad \forall y \in Y, D_{\text{cris}}(M_z)^{\varphi=F(y)} \neq 0.$$

Il démontre également que si $D_{\text{cris}}(M_y^{\text{ss}})^{\varphi=F(y)}$ est de $k(y)$ -dimension 1, M_y^{ss} désignant la semisimplifiée de la $k(y)$ -représentation M_y , alors pour tout idéal $I \subset \mathcal{O}_y$ de codimension finie alors

$$(5) \quad D_{\text{cris}}(M/IM)^{\varphi=F}$$

est libre de rang 1 sur \mathcal{O}_y/I . Ces résultats de Kisin sont élémentaires quand la fonction $y \mapsto v(F(y))$ est identiquement nulle, car la famille M possède alors une famille de sous-représentations de rang 1, mais le cas général repose sur des propriétés plus fines des anneaux de Fontaine.

Je voudrais mentionner deux extensions de ces résultats de Kisin. D'une part Nakamura les a étendu dans [NAK10] au cas où le corps de base \mathbb{Q}_p est remplacé par une extension finie de \mathbb{Q}_p . D'autre part, dans [BC09, Ch. 3], nous les avons étendu aux \mathcal{O}_Y -modules cohérents M simplement supposés sans torsion, ce qui est le cadre naturel dont on a besoin pour les applications aux variétés de Hecke Y . Quand Y est une courbe, un argument simple de normalisation permet de se ramener au cas de Kisin, alors que dans notre contexte avec Bellaïche, nous devons raisonner par platification du module

M sur un éclatement bien choisi, ce qui introduit un certain nombre de difficultés techniques. Comme je viens de le dire, Kisin applique ses résultats à la normalisation de la courbe de \mathcal{C} de Coleman-Mazur, et obtient notamment que si $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ est une forme modulaire p -adique surconvergente de poids quelconque (éventuellement non entier), normalisée, propre pour tous les opérateurs de Hecke, et telle que $a_p \neq 0$, alors

$$(6) \quad D_{\text{cris}}((\rho_f)_p)^{\varphi=a_p} \neq 0.$$

(Quand $f \in M_k(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))_i$ est une forme modulaire usuelle, on sait même que $(\rho_f)_p$ est cristalline en p et que le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin de $D_{\text{cris}}((\rho_f)_p)$ est le polynôme $P_f = X^2 - a_p X + p^{k-1}$ du §3.3).

Les représentations continues $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ telles que $D_{\text{cris}}(\rho) \neq 0$ ont depuis suscité une attention toute particulière.³² Colmez a notamment observé que la condition de Kisin s'interprète de manière très simple sur le (φ, Γ) -module $D_{\text{rig}}(\rho)$ à coefficients dans l'anneau de Robba, ce sur quoi nous reviendrons dans la partie suivante. Il montre qu'il existe un caractère continu $\chi : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^*$ tel que $D_{\text{cris}}(\rho \otimes \chi) \neq 0$ si et seulement si $D_{\text{rig}}(\rho)$ est réductible, et il obtient une classification complète de ces représentations. Colmez appelle plus généralement *triangulines* les $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -représentations V de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ telles que $D_{\text{rig}}(V)$ soit extension successive de (φ, Γ) -modules de rang 1 sur l'anneau de Robba. Dans [BC09, Ch. 2], nous étendons l'approche de Colmez en donnant des interprétations "triangulines" de la condition de nature infinitésimale (5) démontrée par Kisin, ce qui fournit une variante utile de l'approche de Kisin dans [KIS03]. C'est par exemple l'un des ingrédients dans ma démonstration du Théorème 3.9 ([CHE08A]). Je renvoie à l'article d'exposition de Berger [BER11] pour un survol de la théorie des représentations triangulines.³³

Nous avons poursuivi cette voie dans notre livre [BC09] dans le but de comprendre les propriétés des $(\rho_x)_v$ pour $x \in \mathcal{E}_d$ et d général. Comme nous l'avons observé depuis longtemps [BC04], les résultats de Kisin susmentionnés s'appliquent aux puissances extérieures de la famille de (pseudo)-représentations galoisiennes portée par \mathcal{E}_d , et montrent dans les notations plus haut que pour tout $x \in \mathcal{E}_d$,

$$D_{\text{cris}}(\Lambda^i(\rho_x)_v \otimes \chi_1 \cdots \chi_i)^{\varphi=F_1(x) \cdots F_i(x)} \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, d,$$

pour certain caractères χ_i que je ne précise pas ici mais qui sont déterminés par $\kappa(x)$. En dimension $d > 2$, cette propriété n'est pas suffisante pour entraîner que $(\rho_x)_v$ est trianguline au sens de Colmez,³⁴ même si cela l'indique fortement. Nous nous attendions ainsi à ce que ce soit le cas, et également que les sous- (φ, Γ) -modules associés des $D_{\text{rig}}((\rho_x)_v)$ varient essentiellement analytiquement sur \mathcal{E}_d .

³²Une raison supplémentaire à cela est l'espoir formulé par Kisin que la fougère infinie dans X_2 puisse être simplement caractérisée comme étant le sous-ensemble des $x \in X_2$ tels que $(\rho_x)_{|\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ ait cette propriété (voir [EME09] pour les progrès récents à ce sujet).

³³Mentionnons tout de même l'extension par Nakamura [NAK09] des résultats de Colmez [COL08] au cas des extensions finies de \mathbb{Q}_p .

³⁴Considérer la somme directe d'un caractère et d'une représentation non trianguline de dimension 2.

Modulo quelques acrobaties, cette méthode des puissances extérieures nous a tout de même permis de démontrer dans [BC09] les propriétés de triangulinité attendues dans un voisinage formel des points $U(d)$ -automorphes raffinés "non-critiques" et "réguliers", qui est le cas crucial pour les applications arithmétiques de notre livre, et également un ingrédient pour démontrer le Théorème 3.13. Je renvoie au Théorème 3.25 ci-dessous pour un énoncé précis.

Les difficultés d'apparence technique pour étudier les points généraux se sont avérées assez sérieuses, et n'ont d'ailleurs été finalement résolues dans la généralité qu'elles méritent que tout récemment, indépendamment par Hellman [HEL12], Kedlaya-Pottharst-Xiao [KPX12], Liu [LIU12]. Je renvoie d'ailleurs également à [CHE08A] pour d'autres mises en gardes déjà visibles dans le cas de la courbe de Coleman-Mazur lorsque l'on s'intéresse aux propriétés de triangulinité en famille, qui ne peuvent être vrai au sens strict au voisinage de tous les points de \mathcal{E}_d .

3.23. Déformations triangulines des représentations cristallines raffinées.

Dans cette partie, nous oublions temporairement la fougère infinie pour étudier un problème purement local, ce qui donnera également sans doute un peu d'air au lecteur.

Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p , et soit V une L -représentation cristalline de dimension d de $G_p := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Il sera commode de faire les hypothèses suivantes :

- (i) $\text{End}_{G_p}(V)$ est réduit aux homothéties L .
- (ii) Les poids de Hodge-Tate de V sont distincts.
- (iii) Le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin de $D_{\text{cris}}(V)$ est scindé dans L à racines distinctes. De plus, si ϕ et ϕ' sont deux telles racines, alors $\phi^{-1}\phi' \neq p$.

Soit \mathcal{C} la catégorie des L -algèbres locales artiniennes de corps résiduel isomorphe à L . On s'intéresse au foncteur

$$\mathcal{X}_V : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$$

des déformations de V à \mathcal{C} ([MAZ87],[KIS03]). Par définition, pour tout objet A de \mathcal{C} , on désigne par $\mathcal{X}_V(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations continues de G_p sur un A -module libre de rang fini V_A , telles que $V_A \otimes_A L \simeq V$ en tant que $A[G_p]$ -module. Les conditions (i) et (iii), ainsi que des résultats de Tate, assurent que \mathcal{X}_V est formellement lisse de dimension $d^2 + 1 = \dim(H^1(G_p, \text{End}(V)))$, i.e.

$$\mathcal{X}_V \simeq \text{Spf}(L[[X_0, \dots, X_{d^2}]]).$$

Nous allons maintenant introduire et comparer toute une collection de sous-foncteurs naturels de \mathcal{X}_V . Comme plus haut, nous appellerons *raffinement de V* la donnée d'un ordre $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)$ sur les valeurs propres de φ agissant sur $D_{\text{cris}}(V)$. Nous allons notamment associer à (V, Φ) , suivant [BC09, Ch. 2], un sous-foncteur

$$\mathcal{X}_{V, \Phi} \subset \mathcal{X}_V$$

appelé foncteur des déformations Φ -triangulines de V . La définition de ce foncteur est un peu détournée : elle passe par les (φ, Γ) -modules sur l'anneau de Robba \mathcal{R}_L .

On rappelle que ce dernier désigne l'anneau des séries de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - 1)^n$$

telles que $a_n \in L$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et qui convergent pour tout $z \in \mathbb{C}_p$ dans une couronne de la forme $r_f \leq |z - 1| < 1$, le rayon intérieur r_f dépendant de f . Il est muni d'actions commutantes de la lettre φ et du groupe $\Gamma = \mathbb{Z}_p^*$ par les formules

$$\varphi(f)(z) = f(z^p), \quad \gamma(f)(z) = f(z^\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Un (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_L est un \mathcal{R}_L -module libre de rang fini muni d'actions semi-linéaires commutantes de φ et du groupe Γ satisfaisant les deux conditions suivantes : $\varphi(D)$ engendre D comme \mathcal{R}_L -module et l'action de Γ est continue dans un certain sens. Les (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_L forment une catégorie L -linéaire tensorielle $(\varphi, \Gamma)/L$ de manière naturelle. Nous noterons aussi Rep_L la catégorie des représentations L -linéaires continues de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur un L -module libre de rang fini. Ainsi que l'ont observé Berger et Colmez (voir [COL08]), les travaux de Fontaine [FON90], combinés à ceux de Cherbonnier-Colmez [CC98] et de Kedlaya [KED04], assurent l'existence d'un \otimes -foncteur exact, L -linéaire, et pleinement fidèle,

$$D_{\text{rig}} : \text{Rep}_L \rightarrow (\varphi, \Gamma)/L.$$

Un (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_L est dans l'image essentielle de D_{rig} si et seulement si il est *étale*, une condition portant uniquement sur l'action de φ (voir loc. cit.). Ces définitions et énoncés s'étendent alors verbatim lorsque L est partout remplacé par un objet A quelconque de la catégorie \mathcal{C} ([BC09, Ch. 2]).

Retournons à la représentation V plus haut et posons $D = D_{\text{rig}}(V)$. Soit $t = \log(z) \in \mathcal{R}_L$, les travaux de Berger [BER02],[BER08] démontrent l'existence d'un isomorphisme canonique $L[\varphi]$ -équivariant

$$\beta : D_{\text{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} (D[1/t])^\Gamma.$$

Dans cette bijection, on observe que les sous-espaces $L[\varphi]$ -stables $W \subset D_{\text{cris}}(V)$ correspondent bijectivement aux sous- (φ, Γ) -modules $D' \subset D$ qui sont facteurs directs comme \mathcal{R}_L -modules, via

$$W \mapsto (\mathcal{R}[1/t]\beta(W)) \cap D,$$

le rang de $(\mathcal{R}[1/t]\beta(W)) \cap D$ sur \mathcal{R}_L étant $\dim_L W$. Mais les raffinements de V correspondent canoniquement aux L -drapeaux complets φ -stables de $D_{\text{cris}}(V)$ d'après l'hypothèse (iii) sur V . L'observation précédente les met donc également en bijection avec les filtrations croissantes $(\text{Fil}_i(D))_{0 \leq i \leq d}$ de D par des sous- (φ, Γ) -modules $\text{Fil}_i(D)$ de rang i qui sont facteurs directs comme \mathcal{R}_L -modules. En particulier, V est trianguline au sens de Colmez, et ce d'autant de façons différentes qu'il y a de raffinements de V , à savoir $d!$.

Je peux enfin définir le foncteur $\mathcal{X}_{V, \Phi} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$. Soit $(\text{Fil}_i(D))$ la filtration de D associée à Φ par la recette ci-dessus. Si A est un objet de \mathcal{C} , on désigne par $\mathcal{X}_{V, \Phi}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de triplets $(V_A, (\text{Fil}_i(D_A)), \pi)$ où :

- V_A est un A -module libre de rang d muni d'une action A -linéaire continue de G_p ,
- $(\text{Fil}_i(D_A))_{0 \leq i \leq d}$ est une filtration croissante de $D_A = D_{\text{rig}}(V_A)$ par des sous- $(\varphi, \Gamma)/A$ -modules de rang i facteurs directs comme \mathcal{R}_A -modules,
- π est un isomorphisme $A[G_p]$ -équivariant $V_A \otimes_A L \xrightarrow{\sim} V$ tel que l'isomorphisme $D_{\text{rig}}(\pi) : D_A \otimes_A L \xrightarrow{\sim} D$ envoie $\text{Fil}_i(D_A)$ sur $\text{Fil}_i(D)$ pour tout $0 \leq i \leq d$.

On démontre dans [BC09] que le morphisme naturel $\mathcal{X}_{V,\Phi} \rightarrow \mathcal{X}_V$ fait de $\mathcal{X}_{V,\Phi}$ un sous-foncteur de \mathcal{X}_V , et que ce sous-foncteur est de plus pro-représentable et formellement lisse de dimension

$$\dim(\mathcal{X}_{V,\Phi}) = \frac{d(d+1)}{2} + 1.$$

On utilise pour cela des résultats de Colmez [COL08], complétés par Liu [LIU08], sur la cohomologie à la Fontaine-Herr des (φ, Γ) -modules de rang 1 sur \mathcal{R}_L .

Outre cette collection de $d!$ sous-foncteurs canoniques de \mathcal{X}_V ainsi construits on dispose également des sous-foncteurs

$$\mathcal{X}_{V,\text{cris}} \subset \mathcal{X}_{V,\text{HT}} \subset \mathcal{X}_V$$

paramétrant les déformations V_A de V qui sont respectivement cristallines et de Hodge-Tate, vues comme L -représentations de G_p par oubli de la A -structure. Le polynôme de Sen de la déformation universelle définit également un morphisme de foncteurs $\Delta : \mathcal{X}_V \rightarrow \mathbb{G}_a^d$ tel que l'équation $\Delta = 0$ découpe exactement le fermé $\mathcal{X}_{V,\text{HT}} \subset \mathcal{X}_V$.

Le résultat suivant est un de nos résultats clefs dans [BC09, Ch. 2]. On dit que le raffinement Φ de V est non-critique si le drapeau complet associé de $D_{\text{cris}}(V)$ est en position générale avec la filtration de Hodge sur $D_{\text{cris}}(V)$. Observons que cette filtration admet exactement un sous-espace de chaque dimension $\leq d$ par la condition (ii) sur V .

THÉOREME 3.24. *Supposons que Φ est un raffinement non critique de V . Alors $\mathcal{X}_{V,\text{cris}} \subset \mathcal{X}_{V,\Phi}$, et pour tout objet A de \mathcal{C} on a $\mathcal{X}_{V,\text{cris}}(A) = \mathcal{X}_{V,\text{HT}}(A) \cap \mathcal{X}_{V,\Phi}(A)$. En particulier, l'application de Sen induit une suite exacte sur les espaces tangents*

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}_{V,\text{cris}}(L[\varepsilon]) \longrightarrow \mathcal{X}_{V,\Phi}(L[\varepsilon]) \xrightarrow{\Delta} L^d \longrightarrow 0.$$

L'hypothèse de non-criticité de Φ est nécessaire. Sous cette hypothèse, le foncteur $\mathcal{X}_{V,\Phi}$ apparaît comme étant une légère généralisation de $\mathcal{X}_{V,\text{cris}}$. Comme nous allons le voir il est également particulièrement pertinent dans l'étude des variétés de Hecke.

Replaçons-nous en effet dans les hypothèses du §3.15. Fixons $v \in \tilde{S}_p$ telle que $F_v = \mathbb{Q}_p$. Soit (x, Φ) un point automorphe raffiné, ce qui définit un point $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$. Supposons que $V = (\rho_x)_v$ est irréductible. La restriction à un groupe de décomposition en v fournit alors un morphisme canonique

$$(7) \quad \widehat{\mathcal{E}}_d^x \longrightarrow \mathcal{X}_V$$

où $\widehat{\mathcal{E}}_d^x$ désigne le complété formel de \mathcal{E}_d en x . La question soulevée à la fin du §3.21 est de qualifier son image.

On dira que $\Phi_v = (\phi_{1,v}, \dots, \phi_{d,v})$ est *régulier* si les $\varphi_{i,v}$ sont deux à deux distincts, tels que $\varphi_{i,v}\varphi_{j,v}^{-1} \neq p$ pour tout i, j , et si de plus pour tout entier $i = 1, \dots, d$, l'élément

$\prod_{j \leq i} \varphi_{j,v}$ est valeur propre simple de φ sur $D_{\text{cris}}(\Lambda^i(\rho_x)_v)$. Cette dernière hypothèse est purement technique dans ce qui suit, et liée à la méthode des puissances extérieures que nous employons : elle pourrait d'ailleurs être supprimée dans l'énoncé qui suit à l'aide des travaux de [KPX12]. En revanche, la première est importante. Elle assure notamment que V satisfait les conditions générales de ce chapitre et permet également de voir Φ_v comme un raffinement de $(\rho_x)_v$ au sens ci-dessus. On dira alors que Φ_v est non-critique si ce dernier l'est. Le résultat ci-dessous est démontré dans [BC09, Ch. 4].

THÉOREME 3.25. *Soit $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$ un point automorphe raffiné. On suppose que $V = (\rho_{x_\Phi})_v$ est irréductible et que Φ_v en est un raffinement régulier et non-critique. Alors l'application naturelle (7) se factorise par $\mathcal{X}_{V,\Phi_v} \subset \mathcal{X}_V$.*

Cet énoncé met bien en valeur l'intérêt des foncteurs de déformations triangulines. Il rend de plus le Théorème 3.24 particulièrement intéressant, notamment lorsqu'on le confronte au théorème suivant, conjecturé dans [BC09] et démontré dans mon article [CHE11].

THÉOREME 3.26. *Soit $x_\Phi \in \mathcal{E}_d$ un point automorphe raffiné. On suppose que pour tout $v \in \tilde{S}_p$, $F_v = \mathbb{Q}_p$, $V = (\rho_{x_\Phi})_v$ est irréductible, et que Φ_v en est un raffinement régulier et non-critique. Alors l'application $\kappa : \mathcal{E}_d \rightarrow \mathcal{T}_0^d$ est étale en x_Φ .*

La démonstration de ce théorème utilise les propriétés les plus fines des variétés de Hecke. Elle repose également sur divers énoncés de multiplicité 1 en théorie des formes automorphes pour $U(d)$ ([ROG90], [LAB11]), ainsi que sur une généralisation au cas de $U(d)$ de la théorie des formes compagnons et de l'opérateur " Θ^{k-1} " de la théorie des formes modulaires p -adiques (voir notamment [JON11] pour le complexe BGG localement analytique).

Retournons au contexte purement local précédent. Ma dernière contribution sur le sujet des déformations triangulines est un théorème comparant les divers $\mathcal{X}_{V,\Phi}$ à l'intérieur de \mathcal{X}_V . Le résultat suivant est peut-être l'innovation principale de mon article [CHE11].

THÉOREME 3.27. *Supposons que les $d!$ raffinements de V soient non-critiques, alors dans l'espace tangent $\mathcal{X}_V(L[\varepsilon])$ on a l'égalité*

$$\sum_{\Phi} \mathcal{X}_{V,\Phi}(L[\varepsilon]) = \mathcal{X}_V(L[\varepsilon]).$$

Autrement dit, toute déformation de V à l'ordre 1 est une combinaison linéaire de déformations triangulines. Je démontre plus précisément *loc. cit.* qu'il suffit que d raffinements bien choisis Φ_1, \dots, Φ_d de V soient non-critiques pour que $\sum_{i=1}^d \mathcal{X}_{V,\Phi_i}(L[\varepsilon]) = \mathcal{X}_V(L[\varepsilon])$. Si $d \leq 3$ et V est irréductible, il existe en fait toujours trois tels raffinements.

Ma démonstration de ce théorème est une récurrence sur la dimension d de V , ce qui est peut-être un peu surprenant étant donné que V peut très bien être irréductible ! Le point est en fait de démontrer un énoncé plus général valable pour tous les (φ, Γ) -modules cristallins non nécessairement étales, une notion que nous avons introduite avec Bellaïche dans [BC09, Ch. 2]. L'argument fonctionne alors comme suit. On part d'un raffinement non-critique Φ de V . On vérifie qu'un foncteur de déformation "paraboline

de type $(1, d - 1)^n$ annexe bien choisi de V , que je dois étudier au même titre que les foncteurs précédents, a la propriété que son espace tangent engendre $\mathcal{X}_V(L[\varepsilon])$ avec $\mathcal{X}_{V, \Phi}(L[\varepsilon])$. On raisonne ensuite simplement par récurrence dans le bloc de taille $d - 1$.

3.28. Démonstration du Théorème 3.13. Indiquons enfin comment terminer la démonstration du Théorème 3.13. On suppose que $F_v = \mathbb{Q}_p$ pour tout $v \in \tilde{S}_p$.

L'idée de la démonstration est la suivante. Soit W l'adhérence Zariski des points automorphes dans Y_d^\perp , et soit W_0 une composante irréductible de W . Le lieu singulier de W est un fermé strict par les propriétés d'excellence des affinoïdes [CON99], de sorte que W_0 contient au moins un point automorphe x régulier dans W . Quitte à se déplacer un peu dans la fougère infinie en partant de x , on peut supposer que $(\rho_x)_v$ est irréductible pour tout $v \in \tilde{S}_p$ d'après la Proposition 3.22. On peut également supposer que ces $(\rho_x)_v$ satisfont les hypothèses (ii) et (iii) du §3.23.

Nous allons regarder l'espace tangent $T_x(W_0)$ de W_0 en x . Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p assez grande de sorte que pour tout $v \in \tilde{S}_p$, la représentation $V_v = (\rho_x)_v$ soit définie sur L . On dispose d'une application $k(x)$ -linéaire naturelle

$$T_x(W_0) \otimes_{k(x)} L \longrightarrow \prod_{v \in \tilde{S}_p} \mathcal{X}_{V_v}(L[\varepsilon]).$$

Il sera commode de noter $T_{V_v, ?}$ le L -espace vectoriel tangent $\mathcal{X}_{V_v, ?}(L[\varepsilon])$. Regardons l'application naturelle suivante déduite du morphisme ci-dessus :

$$f : T_x(W_0) \otimes_{k(x)} L \longrightarrow \prod_{v \in \tilde{S}_p} T_{V_v} / T_{V_v, \text{cris}}.$$

Soit $\Phi = \{\Phi_v\}$ un raffinement de x . La branche $B_{x, \Phi}$ est incluse dans W_0 au voisinage de x . En particulier, $\text{Im}(f)$ contient l'image naturelle de $T_{x_\Phi}(\mathcal{E}_d)$ dans le terme de droite. Mais si les Φ_v sont des raffinements réguliers et non-critiques des V_v , la combinaison des Théorèmes 3.24, 3.25, et 3.26 assure que cette image est simplement

$$\prod_v T_{V_v, \Phi_v} / T_{V_v, \text{cris}}.$$

En particulier, si les V_v ont tous leurs raffinements non-critiques et réguliers, l'application f est surjective d'après le Théorème 3.27! Cela vaut plus généralement si ces V_v ont suffisamment de raffinements non critiques, et en particulier si $d \leq 3$ par les remarques suivant ce même théorème.

Observons enfin que l'espace d'arrivée de f est de dimension $[F^+ : \mathbb{Q}] \frac{d(d+1)}{2}$: c'est un calcul purement local, par exemple conséquence du Théorème 3.24. Comme W_0 est lisse en x cela entraîne que $\dim(W_0) \geq [F^+ : \mathbb{Q}] \frac{d(d+1)}{2}$, ce que l'on voulait démontrer. \square

Il n'aura pas échappé au lecteur la coïncidence numérique réalisant à la fois le nombre $[F^+ : \mathbb{Q}] \frac{d(d+1)}{2}$ comme la codimension du lieu cristallin local et également comme la dimension globale attendue de Y_d^\perp . Cette coïncidence n'est pas sans rappeler celles observées dans [CHT08]! Ce qui m'empêche de conclure en dimension $d > 3$ est qu'actuellement je n'arrive pas à démontrer l'existence de points automorphes dans W_0 ayant

suffisamment de raffinements non critiques. Nous verrons en revanche dans la partie suivante que ces idées s'appliquent parfaitement à un analogue purement local des questions considérées dans cette partie.

4. Analogues locaux cristallins

Dans cette partie, je me propose de présenter un analogue purement local des questions étudiées aux §3, et notamment de la fougère infinie. J'expose les résultats de mon article "*Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p* ".

Fixons p un nombre premier et $d \geq 1$ un entier. Soit X_d la variété des caractères p -adique en dimension d du groupe $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (§2.4). Nous dirons qu'un point $x \in X_d$ est cristallin, si la représentation associée $\rho_x : G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{k(x)})$ l'est au sens de Fontaine. Une question certainement naturelle à ce stade dans ce mémoire est de s'interroger sur les propriétés du lieu des points cristallins de X_d . Un point $x \in X_d$ sera dit irréductible si ρ_x l'est. Le résultat principal de [CHE10] est le suivant. Il est dû à indépendamment à Kisin [KIS10] et Colmez [COL08] en dimension $d = 2$, et évident si $d = 1$. Quand $d = 2$, il joue notamment un rôle important dans la démonstration par Colmez [COL12] de la correspondance de Breuil-Langlands p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

THÉOREME 4.1. *Les points cristallins de X_d sont Zariski-denses et d'accumulation dans toutes les composantes irréductibles de X_d contenant un point cristallin irréductible.*

Faisons quelques remarques avant de donner les idées de la démonstration. Si $r : G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{\mathbb{F}_p})$ est une représentation continue et irréductible telle que $r \not\cong r \otimes \omega$, ω désignant le caractère cyclotomique modulo p , alors $X_d(r)$ est une boule ouverte de dimension $d^2 + 1$. Il n'est pas difficile de voir que cette boule contient des points cristallins en considérant par exemple les induites d'un produit de caractères de Lubin-Tate de l'extension non ramifiée de degré d de \mathbb{Q}_p . Le Théorème 4.1 entraîne donc que les points cristallins sont Zariski-denses et d'accumulation dans un tel $X_d(r)$. Bien entendu, les représentations induites mentionnées précédemment ne suffisent pas à entraîner ce résultat dès que $d > 1$, leur adhérence Zariski étant plutôt de dimension $d + 1$.

Il me semble naturel d'espérer que toutes les composantes irréductibles de X_d contiennent des points cristallins irréductibles, et donc que les points cristallins sont Zariski-denses dans X_d d'après le théorème. D'une certaine manière, cela constituerait un analogue local de la conjecture de modularité de Serre.

CONJECTURE 4.2. *Toute composante irréductible de X_d contient un point cristallin irréductible.*

Les méthodes développées dans [CHE10] m'ont permis de vérifier *loc. cit.* que pour toute représentation semisimple continue $r : G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{\mathbb{F}_p})$, alors $X_d(r)$ contient en effet un point irréductible cristallin. La conjecture ci-dessus semble cependant sensiblement plus fine. Quand r est scalaire, je crois que l'on ne sait toujours pas si elle est vérifiée pour les composantes de $X_2(r)$, c'est sans doute pour beaucoup dû au fait que l'on ne sait pas encore décrire ces dernières comme je l'ai rappelé au §2.4, bien que cela ne semble pas insurmontable.

Mentionnons que l'on peut se demander si les énoncés ci-dessus restent raisonnables si l'on ne s'intéresse qu'aux représentations cristallines apparaissant dans la cohomologie étale p -adique des variétés projectives lisses sur \mathbb{Q}_p ayant bonne réduction sur \mathbb{Z}_p . Cela

semble probable, mais il serait intéressant de le démontrer. En revanche, ma démonstration du Théorème 4.1 a récemment été étendue par Nakamura [NAK11] dans le cas où G est remplacé par le groupe de Galois absolu d'une extension finie quelconque de \mathbb{Q}_p .

La méthode que j'ai suivie pour démontrer le Théorème 4.1 est très proche de celle du §3.28 utilisée pour démontrer le Théorème 3.13. On dira que le point $x \in X_d$ est *triangulin*, si la représentation ρ_x est trianguline au sens de Colmez [COL08], c'est-à-dire si le (φ, Γ) -module $D_{\text{rig}}(\rho_x)$ sur l'anneau de Robba est extension successive de (φ, Γ) -modules de rang 1 (§3.23). La définition de la fougère infinie dans ce contexte est simplissime.

DEFINITION 4.3. *La fougère infinie $\mathcal{F}_d \subset X_d$ est l'ensemble des points triangulins.*

L'inconvénient avec cette définition ensembliste est qu'elle ne dit pas grand chose sur la structure de \mathcal{F}_d . Dans le contexte global, cette structure provenait de la structure analytique naturelle de la variété de Hecke \mathcal{E}_d , dont les propriétés principales découlaient de constructions globales en théorie des formes automorphes. Mon but principal dans ce qui suit est d'expliquer comment construire de manière directe un analogue purement local des variétés de Hecke, possédant des propriétés similaires. Il me paraît raisonnable de noter également \mathcal{E}_d cet analogue local, ce qui ne devrait gêner qu'un lecteur étourdi.

L'ensemble sous-jacent à \mathcal{E}_d sera simplement l'ensemble des paires (x, \mathcal{T}) où $x \in X_d$ est un point triangulin et où \mathcal{T} désigne un drapeau complet de $D_{\text{rig}}(\rho_x)$ constitué de sous- (φ, Γ) -modules qui sont facteurs directs comme modules sur l'anneau de Robba. On dispose en particulier tautologiquement d'une application canonique

$$\mu : \mathcal{E}_d \rightarrow X_d$$

d'image \mathcal{F}_d . Il suit également de la discussion du §3.23 que les points cristallins sont dans \mathcal{F}_d . Mieux, les antécédents par μ d'un point cristallin $x \in X_d$ sont en bijection canonique avec l'ensemble des drapeaux φ -stables de $D_{\text{cris}}(\rho_x)$, i.e. des raffinements de ρ_x au sens de Mazur [MAZ00].

Une grosse partie du travail consiste à comprendre comment munir l'ensemble \mathcal{E}_d défini ci-dessus d'une structure intéressante d'espace analytique p -adique. Quand $d = 2$, c'est le point de vue adopté par Colmez dans [COL08]. La structure sur \mathcal{E}_2 définie par Colmez est ad hoc en terme de sa paramétrisation des représentations triangulines. L'espace \mathcal{E}_2 est alors lisse de dimension 4. Il est naturellement construit au dessus de l'espace \mathcal{T}^2 , où

$$\mathcal{T} \simeq \mathbb{G}_m \times \mathcal{W}$$

désigne l'espace analytique paramétrant les caractères p -adiques continus du groupe \mathbb{Q}_p^* (§3.15). Cet espace \mathcal{T} joue un rôle prédominant car il paramètre également de manière naturelle les (φ, Γ) -modules de rang 1 sur l'anneau de Robba.

Pour cette structure, Colmez parvient à démontrer que l'application $\mu : \mathcal{E}_2 \rightarrow X_2$ est localement analytique³⁵ en tous les points "suffisamment génériques" de \mathcal{E}_2 , c'est d'ailleurs l'un des points les plus délicats de ses constructions : voir [COL08, §5.1].

³⁵Si X et Y sont des espaces analytiques p -adiques, et si $f : X \rightarrow Y$ est une application ensembliste, je dirai que f est localement analytique en $x \in X$ s'il existe un ouvert affinoïde $U \subset X$ contenant x

Ainsi, \mathcal{F}_2 est un espace de dimension 4 évoluant dans l'espace X_2 de dimension 5. Les points cristallins sont en général des points doubles de \mathcal{F}_2 et il est facile de voir sur la classification des représentations triangulines qu'ils sont Zariski-denses et d'accumulation dans X_2 , il est alors aisé d'en déduire le Théorème 4.1 dans ce cas.

Avant d'expliquer mon travail, je voudrais dire un mot de l'approche de Kisin [KIS10], qui est techniquement différente mais au fond similaire. L'espace \mathcal{E}_2 est remplacé chez Kisin par son *finite slope subspace*

$$X_{\text{fs}} \subset X_2 \times \mathbb{G}_m$$

déjà défini dans [KIS03]. Par définition, c'est essentiellement l'adhérence Zariski des points cristallins raffinés, à la manière de Coleman-Mazur §3.6. Kisin explique notamment pourquoi X_{fs} est de dimension ≤ 3 , ce qui est assez délicat, alors que Colmez construit explicitement \mathcal{E}_2 , ce qui est peut-être plus naturel par rapport à notre problème. Bien entendu, ne perdons pas de vue que la construction par Kisin de X_{fs} est bien antérieure à celle de Colmez !

Revenons au cas de la dimension d quelconque. Je vais maintenant énoncer le résultat clef de mon article [CHE10]. Si X est un affinoïde sur \mathbb{Q}_p , je noterai \mathcal{R}_X l'anneau de Robba à coefficients dans $\mathcal{O}(X)$. Je renvoie à [CHE10] pour la définition précise ainsi que pour la notion plus ou moins évidente de (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_X . Si $\delta \in \mathcal{T}(X)$, c'est-à-dire un homomorphisme continu $\mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}(X)^*$, on dispose d'un (φ, Γ) -module

$$\mathcal{R}_X(\delta)$$

de rang 1 sur \mathcal{R}_X . Il possède une \mathcal{R}_X -base e telle que $\varphi(e) = \delta(p)e$ et $\gamma(e) = \delta(\gamma)e$ pour tout $\gamma \in \Gamma = \mathbb{Z}_p^*$. Nous appellerons " (φ, Γ) -module triangulaire rigidifié de rang d sur \mathcal{R}_X " la donnée d'un quadruplet

$$(D, (\text{Fil}_i(D)), (\delta_i), (\text{gr}_i))$$

où D est un (φ, Γ) -module de rang d sur \mathcal{R}_X , $(\text{Fil}_i(D))_{i=0, \dots, d}$ est une filtration croissante de D par des sous- (φ, Γ) -modules de rang i et facteurs directs comme \mathcal{R}_X -modules, $(\delta_i) \in \mathcal{T}(X)^d$, et où pour tout entier $i = 1, \dots, d$,

$$\text{gr}_i : \text{Fil}_i(D)/\text{Fil}_{i-1}(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_X(\delta_i)$$

est un isomorphisme de (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_X . Un tel (φ, Γ) -module sera dit *régulier* si pour tout $i < j$, on a $\delta_i \delta_j^{-1} \in \mathcal{T}^{\text{reg}}$, où $\mathcal{T}^{\text{reg}} \subset \mathcal{T}$ désigne l'ouvert complémentaire de l'ensemble des points paramétrant les caractères de \mathbb{Q}_p^* de la forme $x \mapsto x^{-i}$ ou $x \mapsto |x|x^{i+1}$ pour un entier $i \geq 0$.

Soit Aff la catégorie des espaces affinoïdes et morphismes analytiques. On considère le foncteur $\Delta_d^\square : \text{Aff} \rightarrow \text{Ens}$ associant à X l'ensemble des classes d'isomorphie de (φ, Γ) -modules triangulaires, rigidifiés, et réguliers, de rang d sur \mathcal{R}_X .

tel que $f|_U : U \rightarrow X$ soit induit par une fonction analytique de U dans X . Cette définition conserve d'ailleurs son sens si X est simplement supposé localement analytique, en un sens évident.

THÉOREME 4.4. *Le foncteur Δ_d^\square est représentable par un espace analytique p -adique³⁶ qui est irréductible et lisse sur \mathbb{Q}_p , de dimension $\frac{d(d+3)}{2}$. Les (φ, Γ) -modules cristallins³⁷ sont Zariski-denses et d'accumulation dans Δ_d^\square .*

Ce résultat est en fait nouveau même pour $d = 2$, où il complète les résultats de Colmez et de Kisin susmentionnés. La notion de rigidification utilisée fait que l'espace Δ_d^\square admet moralement $d - 1$ dimensions de trop, cela n'aura pas vraiment d'incidence.

Le coeur technique de sa démonstration est un ensemble de résultats sur les (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_X , notamment sur leur cohomologie à la Fontaine-Herr ([HER98],[HER01]). Un point délicat consiste à vérifier dans ce contexte que les complexes $C_{\varphi, \gamma}$ et $C_{\psi, \gamma}$ sont quasi-isomorphes comme dans la théorie classique de Herr, ce qui avait notamment été conjecturé par Kedlaya dans [KED10, §2.6]. Nous y parvenons pour les (φ, Γ) -modules triangulaires sur \mathcal{R}_X . Nous calculons enfin la cohomologie des $\mathcal{R}_X(\delta)$, étendant des résultats de Colmez (en degrés 0 et 1, [COL08]) et de Liu (en degré 2, [LIU08]) dans le cas particulier où X est un point, ainsi que des résultats partiels de Bellaïche [BEL12B]. Notre preuve, bien qu'inspirée de celle de Colmez, est en fait un peu plus simple, même dans le cas d'un point. Elle repose sur un dévissage cher à Colmez de l'anneau de Robba [COL10A, Thm. 0.1]. Voici un échantillon des résultats obtenus.

THÉOREME 4.5. *Soit D un (φ, Γ) -module triangulaire de rang d sur \mathcal{R}_X . Alors $H^i(D)$ est de type fini sur $\mathcal{O}(X)$ pour tout i . De plus, dans le groupe de Grothendieck des $\mathcal{O}(X)$ -modules de type fini on a la relation*

$$[H^0(D)] - [H^1(D)] + [H^2(D)] = -[\mathcal{O}(X)^d].$$

Enfin, la formation des $H^i(D)$ commute à tout changement de base plat affinoïde.

Si de plus D est régulier, alors $H^0(D) = H^2(D) = 0$ et $H^1(D)$ est libre de rang d sur $\mathcal{O}(X)$. La formation des $H^i(D)$ commute dans ce cas à tout changement de base affinoïde.

Mentionnons à ce propos les résultats récents de Kedlaya-Pottharst-Xiao [KPX12], qui constituent une vaste généralisation de ce dernier théorème.

Pour revenir à notre problème initial, il reste à passer des familles de (φ, Γ) -modules aux familles de représentations galoisiennes. Cette extension en famille des propriétés du foncteur D_{rig} a été étudiée en détail par Berger-Colmez dans un sens [BEC08], et par Kedlaya-Liu [KL10] dans l'autre. Elle n'est pas sans subtilité. Les résultats de Kedlaya et Liu montrent que pour tout $x \in \Delta_d^\square$ paramétrant un (φ, Γ) -module D_x étale, il existe un ouvert affinoïde $U \subset \Delta_d^\square$ contenant x tel que :

- (i) D_y est étale pour tout $y \in U$,

³⁶Précisons que cet espace n'est pas un affinoïde, bien qu'uniquement déterminé par ses points à valeurs affinoïdes.

³⁷Suivant [BC09][Ch. 2], on dit qu'un (φ, Γ) -module D sur \mathcal{R}_L est dit cristallin si $(D[1/t])^\Gamma$ est de L -dimension $\text{rang}_{\mathcal{R}_L}(D)$. Lorsque $D = D_{\text{rig}}(V)$, les théorèmes de Berger rappelés au §3.23 montrent que D est cristallin en ce sens si et seulement si V l'est au sens de Fontaine.

(ii) il existe une représentation continue $G \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}(U))$, unique à isomorphisme près, dont le (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_U associé par Berger-Colmez soit isomorphe au (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_U défini par l'inclusion $U \subset \Delta_d^\square$.

Notons $\mathcal{E}_d^\square \subset \Delta_d^\square$ le sous-ensemble constitué des points $x \in \Delta_d^\square$ tels que le (φ, Γ) -module D_x paramétré par x soit étale. La propriété (i) ci-dessus munit \mathcal{E}_d^\square d'une structure d'espace localement analytique p -adique.³⁸ La propriété (ii) assure enfin, après passage aux traces, qu'il existe une unique application localement analytique

$$\tau : \mathcal{E}_d^\square \longrightarrow X_d,$$

envoyant tout $x \in \mathcal{E}$ sur la trace $\tau(x)$ de la représentation V_x telle que $D_{\mathrm{rig}}(V_x) \simeq D_x$. C'est bien ce que nous voulions démontrer, en version rigidifiée, ce qui n'affecte en rien la stratégie. On a bien sûr $\mathcal{F}_d = \tau(\mathcal{E}_d^\square)$. L'argument expliqué au §3.28 conduit alors de même au Théorème 4.1. Il n'y a pas de difficulté particulière dans ce contexte local pour trouver des représentations cristallines ayant tous leurs raffinements non-critiques, cela découle notamment facilement des travaux de Kisin [KIS08]. \square

Pour finir, je voudrais mentionner que le Théorème 4.4 est également le point de départ des travaux récents de Hellmann [HEL12] visant à généraliser la construction X_{fs} de Kisin à la dimension d .

³⁸On pourrait même en faire un vrai espace analytique de manière ad hoc en considérant une réunion disjointe d'ouverts affinoïdes $U \subset \Delta_d^\square$ satisfaisant les deux propriétés ci-dessus et formant une partition ensembliste de \mathcal{E}_d^\square . Cela n'est cependant pas très canonique et n'apporterait rien. Le lecteur choqué par ce dénouement pourra consulter à profit le travail d'Hellmann [HEL12].

CHAPITRE 2

Quelques conséquences des conjectures de Langlands et Arthur

1. Corps de nombres à ramification prescrite : le lemme de Dehn arithmétique.

Dans cette partie, j'expose les résultats de mes articles [CHE07] "*On number fields with given ramification*" et [CC09] "*Corps de nombres peu ramifiés et représentations automorphes autoduales*". Ce dernier est un travail en commun avec Laurent Clozel.

1.1. Résumé et perspectives. Soient S un ensemble fini de nombres premiers, \mathbb{Q}_S une extension algébrique maximale de \mathbb{Q} non ramifiée hors de S (et de l'infini) et

$$G_S = \text{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}).$$

Un résultat bien connu de Minkowski affirme que $G_\emptyset = \{1\}$. En revanche, si S est non vide, ce que l'on supposera désormais, la structure de ces groupes G_S est très mal connue, et ce malgré leur omniprésence en géométrie arithmétique. Par exemple, un résultat d'Hermite assure que G_S n'a qu'un nombre fini de sous-groupes fermés d'indice donné, mais on ne sait pour aucun $S \neq \emptyset$ si G_S est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, une question posée par Shaffarevich au congrès international de Stockholm en 1962. Nous renvoyons au livre de Neukirch, Schmidt et Wingberg [NSW00, Ch. X, §11] pour un état de l'art sur la structure de G_S .

Un autre problème du folklore, posé à ma connaissance par Ralph Greenberg, consiste à déterminer les sous-groupes de décomposition de G_S . Malgré le peu d'indices dont nous disposons pour appréhender cette question, il semble communément espéré que ces groupes soient aussi gros que la restriction imposée sur la ramification le permette : les résultats que j'ai obtenus vont dans cette direction. Ainsi que me l'a raconté Greenberg, sa question fait écho à une question antérieure que lui avait posée James Milne au sujet de la détermination du pro-cardinal de G_S . Comme l'a remarqué Milne, cette question intervient notamment dans la détermination de la cohomologie galoisienne des corps de nombres (voir [MIL86, Chap. I §4]).

Précisément, je me place dans le contexte suivant. Soit $p \in S$ un nombre premier. La donnée d'un plongement de corps $\iota : \mathbb{Q}_S \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ définit un homomorphisme continu

$$(8) \quad \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow G_S$$

dont la classe de conjugaison est indépendante du plongement choisi. La question de Greenberg est de savoir si ce morphisme est injectif. C'est un exercice que de vérifier l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (a) l'application (8) est injective,
- (b) $\iota(\mathbb{Q}_S)$ est dense dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour la topologie p -adique,
- (c) pour toute extension finie F de \mathbb{Q}_p , il existe un corps de nombres K non ramifié hors de S et possédant une place v au dessus de p telle que F se plonge dans K_v .

Autrement dit, la question de l'injectivité de (8) revient à savoir si il existe suffisamment de corps de nombres non ramifiés en dehors de S pour qu'ils engendrent tout $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une fois plongés dans ce dernier. À ma connaissance, avant les travaux que j'ai effectués cela n'était connu pour aucun couple (p, S) . Bien entendu, plus S est petit, plus le problème est difficile, et ultimement nous aimerions savoir si (8) est injective pour $S = \{p\}$. Dans tous les cas, une première difficulté réside en ce qu'il est déjà assez délicat de construire de tels corps de nombres non triviaux, S étant fixé.¹ Mon théorème principal est le suivant.

THÉOREME 1.2. *Si $|S| \geq 2$, alors (8) est injective.*

COROLLAIRE 1.3. *Supposons $|S| \geq 2$. Alors le pro-cardinal de G_S est divisible par tous les entiers.*

Autrement dit, pour tout entier $m \geq 1$ il existe un corps de nombres non ramifié hors de S dont le degré est un multiple de m , ce qui était la question de Milne déjà citée. Le corollaire découle simplement du théorème, par exemple en appliquant la condition (c) aux extensions non ramifiées de \mathbb{Q}_p . Le cas $S = \{p\}$ est par contre toujours ouvert : j'y reviendrai plus loin.

Bien que les énoncés ci-dessus soient de formulation élémentaire, notre démonstration reposera sur une série de résultats appartenant à la théorie arithmétique des formes modulaires et à ses généralisations en dimensions supérieures, qui eux ne le sont pas du tout. Un survol de la littérature concernant G_S montre que cette disproportion apparente est en réalité devenue assez commune. Il n'est pas le lieu ici de faire un historique de ce sujet, mais parmi les énoncés ayant joué un rôle impotrant dans ces questions il convient de mentionner l'invention par Grothendieck de l'homologie ℓ -adique ainsi que le faisceau de conjectures issu de la conjecture de Shimura-Tanyama-Weil : conjecture de réciprocité de Langlands, conjecture de modularité de Serre, conjecture de Fontaine-Mazur.

Un exemple simple concernant notre problématique est la démonstration du fait que si $S \neq \emptyset$ alors G_S n'est pas résoluble, un problème posé par Benedict Gross dans [GRO98A]. Pour $p \geq 11$ cela se déduit de la construction par Deligne [DEL68] des représentations ℓ -adiques attachées aux formes modulaires propres pour le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$, comme l'a démontré Swinnerton-Dyer [SWI73] par une méthode initiée par Serre dans [SER67]. Le cas $S = \{p\}$ pour $p \leq 7$ n'a été démontré que très récemment par Dembélé, Dieulefait, M. Greenberg et Voight, voir [DEM09], [DGV11] et [DIE12], aussi par des constructions automorphes.

¹Le seul énoncé réellement élémentaire venant à l'esprit à ce sujet est un corollaire standard du lemme de Krasner : si F est une extension finie de \mathbb{Q}_p , il existe un corps de nombres K de même degré que F et possédant une place v au dessus de p telle que K_v est isomorphe à F . Bien entendu on ne contrôle en rien le discriminant de K .

Avant d'expliquer la démonstration, je voudrais mentionner que la question de l'injectivité de (8) a aussi un sens géométrique intéressant, que l'on dégage en réalisant G_S suivant Grothendieck comme groupe fondamental étale de $\text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus S$. Il s'agit en effet de savoir si un "lacet" non homotope à 1 dans un voisinage infinitésimal du point manquant $\{p\}$ dans $\text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus S$ reste non homotope à 1 dans $\text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus S$. Ce point de vue a particulièrement de sens dans l'analogie, presque un guide, entre noeuds et nombres premiers, initiée par Mazur dans [MAZ63] et poursuivie ensuite notamment par Kapranov, Resznikov et Morishita [MOR11]. Cette analogie a été enrichie encore tout récemment par Mazur dans [MAZ12], auquel nous renvoyons par ailleurs pour un exposé synthétique séduisant de ce thème.

Dans cette analogie, rappelons que $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ correspond à la sphère \mathbb{S}^3 , que les nombres premiers correspondent aux noeuds dans cette sphère, l'ensemble S devenant alors un entrelac. Si K est un tel noeud, on peut en considérer un voisinage tubulaire assez petit, à savoir un tore plein, et considérer le bord de ce tore plein, qui est un vrai tore $T \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ plongé dans $\mathbb{S}^3 \setminus K$. On dispose alors d'un homomorphisme (ignorant toujours les points bases)

$$\pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K),$$

qui constitue l'analogie formel de l'homomorphisme (8) dans le cas $S = \{p\}$. Il se trouve que cet homomorphisme est injectif dès que K est non trivial : c'est en effet une conséquence bien connue du *lemme de Dehn*, et plus précisément de sa généralisation connue sous le nom de "théorème du lacet" de Papakyriakopoulos [PAP66]. Comme tout indique que les nombres premiers correspondent à des noeuds non triviaux, j'aime bien penser à la question de Greenberg, du moins pour $S = \{p\}$, comme à un "lemme de Dehn arithmétique".

1.4. Idée de la démonstration. L'idée de la démonstration est la suivante. Soit $g \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ un élément non trivial. Observons que l'on peut trouver un entier $n \geq 1$ et une représentation continue (d'image finie) et irréductible

$$r : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

telle que $r(g) \neq 1$. En effet, g est d'image non-triviale dans un quotient fini G de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Il agit donc non trivialement dans la représentation régulière de G , ainsi donc que dans l'une des représentations irréductibles de ce dernier.

On peut bien entendu voir r comme une représentation continue du groupe de Weil de \mathbb{Q}_p , et donc considérer la représentation supercuspidale ϖ de $\text{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$ associée à r par la correspondance de Langlands locale (Harris-Taylor, Henniart). Supposons que l'on puisse construire une représentation automorphe cuspidale Π de GL_n sur \mathbb{Q} telle que :

- (i) Π est essentiellement autoduale,
- (ii) Π_p est isomorphe à ϖ ,
- (iii) Π_v est non ramifiée si v est un nombre premier non dans S ,

(iv) Π_∞ est algébrique régulière.²

Encore d'après Harris et Taylor [HT01] (voir aussi [TAY04]), les hypothèses (i), (iii) et (v) assurent qu'une telle représentation admet pour tout nombre premier ℓ une réalisation ℓ -adique

$$\rho_{\Pi,\ell} : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}(n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

compatible en les premiers distincts de ℓ à la correspondance de Langlands locale (voir §1 Ch. I pour plus de détails). On choisit alors $\ell \in S \setminus \{p\}$, ce qui est loisible car $|S| \geq 2$. Cela entraîne que $\rho_{\Pi,\ell}$ se factorise par G_S par (iv), et que sa restriction à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe³ à r . En particulier, $\rho_{\Pi,\ell}(g) \neq 1$: ce que l'on voulait. En passant, observons que nous avons même démontré quelque chose de beaucoup plus fort que l'énoncé initial !

Cette démonstration marche ... presque. En effet, la construction de Π satisfaisant (ii) est en général impossible, car r^* n'est pas nécessairement isomorphe à une torsion de r par un caractère.⁴ J'avais contourné ce problème dans mon article [CHE07], dans lequel j'avais introduit la stratégie ci-dessus, en me plaçant au dessus d'un corps quadratique imaginaire E non ramifié hors de S et dans lequel p est décomposé.

Il s'agissait précisément de construire une représentation automorphe cuspidale Π de $\text{GL}(n)$ sur E telle que $\Pi^\vee \simeq \Pi^c$ (conjugué extérieur par $\langle c \rangle = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$) qui soit cohomologique, non ramifiée hors des places divisant S , et isomorphe à ϖ en l'une des deux places au dessus de p . Dans ce travail, je démontre l'existence d'une telle Π en construisant tout d'abord par une simple méthode de séries de Poincaré⁵ une représentation auxiliaire Π' sur un groupe unitaire G à n variables relatif à E , choisi non ramifié hors des premiers au dessus de S , coïncidant avec $\text{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$ au dessus de p , et tel que $G(\mathbb{R})$ est le groupe unitaire compact (principe de Hasse). La représentation Π est alors obtenue comme changement de base de Π' à $\text{GL}(n)$ sur E , grâce à des résultats de Clozel, Harris et Labesse [CL98],[HL04].

L'argument précédent conduit au résultat principal de mon article [CHE07], à savoir l'injectivité de (8) dans de nombreux cas, ce qui en faisait les premiers cas connus. Par exemple, cela suffit pour traiter le cas $S = \{p, \ell\}$ quand $l \equiv 3 \pmod{4}$, $p > 2$ et $\left(\frac{p}{\ell}\right) = 1$, en considérant $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-\ell})$. Cela ne fournit cependant qu'un "quart" des cas du Théorème 1.2.

²La combinaison de (i) et (iv) signifie que Π est algébrique, régulière et polarisée au sens du §1 Ch. 1.

³Cela n'a de sens bien sûr qu'une fois que l'on a fixé des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, car r est alors canoniquement définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et peut être vue sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

⁴Soient p un nombre premier impair, V un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension finie > 1 , $u \in \text{GL}(V)$ un élément d'ordre m impair et ne possédant pas la valeur propre 1, et soit G une extension de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par V donnée par u . Il n'est pas difficile de construire une extension galoisienne de \mathbb{Q}_p de groupe de Galois isomorphe à un tel G , par exemple avec m premier à p et $\dim(V) = m - 1$. Soit $\chi : V \rightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère d'ordre p et soit W une représentation irréductible de G dont la restriction à V contient χ (Frobenius). Alors W^* n'est pas une torsion de W par un caractère de G . En effet, d'une part $(W^*)|_V$ contient χ^{-1} , qui n'est pas dans l'orbite de χ sous $\langle u \rangle$ car m et p sont impairs, et d'autre part $G^{\text{ab}} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ car $1 \notin \text{Spec}(u)$.

⁵Ici, on n'utilise essentiellement que le théorème de Peter-Weyl car $G(\mathbb{R})$ est compact !

On peut se demander à ce stade d'où sortent les corps de nombres peu ramifiés que nous avons promis. Ils sortent bien entendu de la construction de $\rho_{\Pi, \ell}$, c'est-à-dire de l'action galoisienne, définie par Grothendieck, sur l'homologie ℓ -adique des variétés de Shimura simples au sens de Kottwitz. Ce sont les quotients $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ de la boule unité hermitienne

$$\mathcal{B} = \left\{ (z_i) \in \mathbb{C}^r, \sum_{i=1}^r |z_i|^2 < 1 \right\}$$

par certains réseaux cocompacts Γ du groupe $\mathrm{PU}(r, 1)$ des bijections biholomorphes de \mathcal{B} . Il est remarquable, si l'on suit la preuve du théorème de Harris et Taylor, qu'ils considèrent des exemples de telles variétés qui ont en général mauvaise réduction en des places auxiliaires. Cette mauvaise réduction est en fait ensuite éliminée dans les représentations galoisiennes par l'argument de recollement de Blasius-Rogawski déjà mentionné au § 1.3. Ceci est d'autant plus remarquable que cet argument n'a pas d'avatar praticable au sein des corps de nombres.

1.5. Constructions de représentations automorphes à ramification prescrites. Comme nous l'avons déjà dit, la méthode ci-dessus ne démontre pas le Théorème 1.2 dans tous les cas. Je m'étais rendu compte que pour y parvenir, il suffirait par le même argument de disposer du théorème suivant.

THÉOREME 1.6. *Soit ϖ une représentation supercuspidale⁶ de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$, de paramètre de Langlands⁷ $L(\varpi)$. Il existe une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{Q}_p)$ autoduale et cohomologique telle que :*

- (i) *le paramètre de Langlands de Π_p est $L(\varpi) \otimes |\cdot|^s \oplus L(\varpi)^\vee \otimes |\cdot|^{-s}$ pour un $s \in \mathbb{C}$,*
- (ii) *Π_q est non ramifiée si $q \notin \{p, \ell\}$.*

Le paramètre du (i) est trivialement auto-dual cette fois-ci. Notons que l'on ne peut pas se passer de l'apparition du s dans cet énoncé car on ne peut pas prescrire les nombres de Weil! Cependant, un argument élémentaire basé sur la structure du quotient modéré de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ permet de voir que cela ne trouble pas la stratégie précédente (voir [CHE07, Lemma 4. (i)]). La démonstration du Théorème 1.6 est l'objectif principal de mon travail en commun avec Laurent Clozel [CC09], dont je vais donner les grandes lignes dans ce qui suit, ce qui achèvera donc la démonstration du Théorème 1.2.

Il sera commode dans cette discussion de considérer temporairement le problème plus général suivant. Fixons, p et ℓ deux nombres premiers distincts, $m \geq 1$ un entier et \mathfrak{c}_p une composante de Bernstein de $\mathrm{GL}(2m, \mathbb{Q}_p)$ contenant des représentations autoduales. Par exemple, \mathfrak{c}_p peut être la composante $\mathfrak{c}_p(\varpi)$ de classe inertielle

$$(\mathrm{GL}(m, \mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{Q}_p), \varpi \times \varpi^\vee)$$

⁶Dans [CC09] nous supposons de plus pour simplifier que ϖ^\vee n'est pas isomorphe à une torsion non ramifiée de ϖ dans cet énoncé. Pour l'application au Théorème 1.2 on peut toujours se ramener à ce cas par torsion par un caractère ramifié, et j'ignorerai ce détail ici.

⁷Voir §1 Ch. I.

où ϖ est une supercuspidale de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{Q}_p)$. On s'intéresse au problème de l'existence d'une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(2m)$ sur \mathbb{Q} telle que :

- (a) Π est autoduale,
- (b) Π_p est dans la composante \mathfrak{c}_p ,
- (c) Π_ℓ est de carré intégrable,
- (d) Π_v est non ramifiée si $v \notin \{\ell, p, \infty\}$,
- (e) Π_∞ est cohomologique.

Ce problème général, de par sa rigidité, s'est avéré extrêmement fin. Une manière de le deviner est de considérer comme au §1.5 Ch. 1 la représentation conjecturale du groupe de Langlands $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} , disons

$$\rho_{\Pi} : \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}(2m, \mathbb{C}),$$

associé à Π . En effet, cette représentation doit être autoduale par (a), elle est donc exclusivement symplectique ou orthogonale. En particulier, les paramètres des composantes locales de Π sont soit tous orthogonaux, soit tous symplectiques (exclusivement à cause de (c)), ce qui est une contrainte notable. Cet énoncé, non conjectural, est d'ailleurs conséquence des résultats récents d'Arthur [ART11]. En fait, sous l'hypothèse (e) le paramètre de Langlands de Π_∞ ne préserve en fait aucun accouplement orthogonal non dégénéré, i.e. ρ_{Π} est nécessairement symplectique. Notons que cela ne va pas à l'encontre de l'énoncé du Théorème 1.6, car la composante $\mathfrak{c}_p(\varpi)$ contient manifestement des représentations à la fois symplectiques et orthogonales (de paramètre comme dans le (i) du Théorème 1.6).

Il convient de mentionner que le problème de construire des représentations automorphes cuspidales autoduales pour $\mathrm{GL}(n)$ avec des composantes locales prescrites a été également considéré récemment par d'autres auteurs. Par exemple, il est discuté par Prasad et Ramakrishnan dans [PR12, §3], auquel mes résultats avec Clozel apportent d'ailleurs certaines réponses. Il est aussi considéré par Khare, Larsen et Savin dans [KLS08] dans leur étude du problème de Galois inverse. Ces derniers expliquent comment construire un Π comme plus haut dans le cas où \mathfrak{c}_p est supercuspidale autoduale de paramètre symplectique (sans toutefois pouvoir assurer la condition (c)). Ils construisent un tel Π par transfert à $\mathrm{GL}(2m)$ d'une représentation automorphe cuspidale générique Π' sur le \mathbb{Q} -groupe déployé $\mathrm{SO}(2m+1)$. L'existence de ce type de transfert repose sur une série de travaux difficiles de Cogdell, Kim, Piatetski-Shapiro, Shahidi, Jiang et Soudry. La représentation Π' est construite par un argument de série de Poincaré (voir aussi [HEN83], [SCA53], [SCA57] à ce sujet).

Retournons maintenant à notre démonstration, dans le cas où $\mathfrak{c}_p = \mathfrak{c}_p(\varpi)$. Notre méthode pour construire la représentation Π repose sur la formule des traces d'Arthur-Selberg pour le groupe $\mathrm{GL}(2m)$ tordu par le \mathbb{Z} -automorphisme

$$\theta(g) = {}^t g^{-1}.$$

Rappelons que cette formule est une identité de distributions $I_{\text{spec}}(\cdot) = I_{\text{geom}}(\cdot)$ dont l'utilisation pour ce type de problèmes est bien connue : appliquée à des fonctions tests

$$f = \otimes'_v f_v$$

ne traçant que dans les Π qui nous intéressent (ou presque), il s'agit de montrer la non nullité de son côté géométrique $I_{\text{geom}}(f)$. Tout le piquant était alors de comprendre comment les obstructions plus haut se manifesteraient dans l'étude de la formule des traces.

Si $v \notin \{\infty, \ell, p\}$, la fonction f_v est naturellement la fonction caractéristique de $\text{GL}(2m, \mathbb{Z}_v)$. Pour simplifier, nous cherchons Π telle que Π_ℓ est la représentation de Steinberg (elle aussi de paramètre autodual symplectique!), et on prend pour f_ℓ un pseudo-coefficient tordu de cette dernière. Nous prenons pour l'instant pour f_p une fonction continue à support compact dont la trace tordue s'annule hors de la composante de Bernstein \mathfrak{c}_p . En la place ∞ , nous prenons pour f_∞ un pseudo-coefficient de séries θ -discrètes cohomologiques. Ces représentations sont en fait naturellement paramétrées par le poids extrémal λ d'une représentation irréductible V_λ du groupe compact $\text{SO}(2m+1, \mathbb{R})$ (car leur paramètre est symplectique, comme on l'a déjà dit). Ce poids λ est en fait essentiellement l'unique lattitude dont nous disposons dans notre problème pour choisir la fonction f , que nous noterons plutôt f^λ au lieu de f pour mettre en évidence cette dépendance en λ dans le choix de f_∞ .

Pour ces fonctions tests f^λ , une version simplifiée de la formule des traces due à Arthur [ART88] s'applique, dont le côté géométrique se réduit alors aux termes portés par les éléments θ -semisimples et \mathbb{Q} -elliptiques. Nous démontrerons alors ultimement que pour un f_p convenablement choisi, il existe une constante $C \neq 0$ telle que

$$I_{\text{geom}}(f^\lambda) \sim C \dim(V_\lambda)$$

lorsque λ tend vers l'infini en s'éloignant des murs de Weyl pour $\text{SO}(2m+1, \mathbb{R})$. La constante C est à un scalaire non nul près l'intégrale orbitale tordue $\text{TO}_{\gamma_0}(f_p)$ de f_p en un certain élément θ -semisimple \mathbb{Q} -elliptique

$$\gamma_0 \in \text{GL}(2m, \mathbb{Q})$$

dont le centralisateur tordu est le groupe symplectique $\text{Sp}(2m)$ sur \mathbb{Q} .

Un premier ingrédient dans la démonstration de l'asymptotique ci-dessus est le fait que si $\gamma \in \text{SO}(2m+1, \mathbb{R})$ est non trivial, alors $\frac{\text{Trace}(\gamma, V_\lambda)}{\dim(V_\lambda)}$ tend vers 0 quand λ tend s'éloigne des murs. Nous déduisons ce fait d'une version de la formule du caractère de Weyl s'appliquant aussi aux éléments non réguliers (que nous établissons pour tous les groupes de Lie compacts connexes). Cette formule jouera d'ailleurs un rôle important dans mon travail ultérieur avec Renard sur les formes automorphes de niveau 1.

Le second ingrédient, en fait l'essentiel de la difficulté, consiste à montrer que si f_p est bien choisie alors l'intégrale orbitale $\text{TO}_{\gamma_0}(f_p)$ est non nulle. Si l'on remplace \mathfrak{c}_p par la composante de Bernstein d'une représentation supercuspidale autoduale de paramètre symplectique, l'énoncé analogue est un théorème dû à Shahidi [SHA92], modulo une identité conjecturale entre fonctions L démontrée par la suite par Henniart [HEN10].

L'hypothèse que nous mettons sur f_p est que sa trace tordue ne prend que des valeurs > 0 sur les représentations tempérées autoduales dans $\mathfrak{c}_p(\varpi)$ (théorème de Paley-Wiener-Rogawski).

On commence par vérifier directement que les intégrales orbitales tordues stables de f_p ne sont pas identiquement nulles. Un point crucial est que ceci nous permet, après stabilisation des termes elliptiques de la formule des traces, de construire une représentation Π' qui a toutes les propriétés requises, sauf qu'elle est ramifiée en une place q auxiliaire. La clé de l'histoire se passe ici : il n'est pas possible de réduire à un seul terme le côté géométrique de la formule des traces tordue par un argument de support, car il reste toujours au moins la classe de conjugaison stable d'un élément.

On utilise ensuite cette représentation Π' pour montrer la non-annulation de $\mathrm{TO}_{\gamma_0}(f_p)$. Notre méthode est basée sur un argument de positivité qui semble nouveau consistant à faire varier λ dans la formule des traces tordue stabilisée et d'utiliser le lemme suivant. Soit G un groupe de Lie compact connexe, soient $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des classes de conjugaisons non triviales et distinctes de G , et soient c_0, c_1, \dots, c_r des nombres complexes. On suppose que pour tout caractère irréductible χ de G , le nombre $c_0\chi(1) + \sum_{i=1}^r c_i\chi(\gamma_i)$ est un réel ≥ 0 , et qu'il soit non nul pour au moins un χ . Alors c_0 est un réel > 0 .

Nos arguments ont d'autres applications. Par exemple, Clozel en a trouvé une à la détermination de certains signes apparaissant dans la théorie du changement base des représentations des groupes de Lie réels [GRFA11]. Dans notre article, nous en donnons aussi quelques-unes concernant l'alternative symplectique/orthogonal, dont le théorème suivant.

THÉOREME 1.7. *Soient F un corps totalement réel et π une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{A}_F)$. On suppose que π est autoduale, de carré intégrable modulo le centre en au moins une place finie v , et cohomologique à toutes les places archimédiennes. Alors pour toute place v de F , le L -paramètre de π_v préserve une forme bilinéaire symplectique non dégénérée.*

En particulier, les représentations galoisiennes ℓ -adiques associées, avec $\ell \neq v$, sont aussi de similitudes symplectiques.

La démonstration de ce théorème donnée dans [CC09] n'était en fait pas tout à fait complète car elle nécessitait une propriété alors inconnue des intégrales orbitales tordues des pseudocoefficients f_∞ , à savoir leur annulation aux éléments non semisimples elliptiques, et ceci afin d'appliquer la formule des traces simples d'Arthur. J'ai par la suite établi cette propriété manquante dans mon travail [CR10] en commun avec David Renard. Je dois mentionner que ce théorème est de toutes façons obsolète. En effet, c'est un cas très particulier du théorème avec J. Bellaïche que j'ai raconté au §1.5 Ch. 1, même si la démonstration est ici très différente. De plus, le cas particulier ci-dessus se déduit aussi immédiatement des résultats récents d'Arthur [ART11].

1.8. Quelques questions ouvertes. La question ouverte la plus naturelle est de démontrer l'injectivité de (8) dans le cas où $S = \{p\}$. Je renvoie à [CHE07, §4.2, §4.3] pour une discussion des difficultés auxquelles on se heurte par la méthode employée ci-dessus,

qui consisterait à utiliser des réalisations galoisiennes p -adiques, plutôt que $\ell \neq p$ adiques, des représentations automorphes Π construites. Disons simplement qu'il n'est sans doute pas trop difficile de construire des Π comme aux paragraphes précédents qui soient non ramifiés hors p et l'infini. Le problème principal est plutôt de nature purement locale : si ρ est une représentation p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ qui est potentiellement semi-stable, il ne me semble pas clair en général comment comparer l'extension (gigantesque) de \mathbb{Q}_p découpée par ρ et celle (pourtant petite) découpée par la représentation de Weil-Deligne associée à ρ .

Terminons par quelques questions ouvertes qui me semblent intéressantes. Dans ces questions, S est un ensemble fini non vide de nombres premiers, le cas le plus intéressant étant le cas $|S| = 1$. La première, due à Greenberg, est toujours ouverte.

QUESTION 1.9. (*Greenberg*) Soit ℓ un nombre premier qui n'est pas dans S , quel est le pro-ordre d'un élément de Frobenius en ℓ (comme élément de G_S).

Il est tentant de penser que ce pro-ordre est divisible par tout entier, mais je ne vois pas de raison particulière à cela (seule la divisibilité par p^∞ pour $p \in S$ est immédiate). Du point de vue de l'analogie entre noeuds et nombres premiers, cela dirait que deux nombres premiers dans $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ sont autant entrelacés que possible.

QUESTION 1.10. Soit G_S^{res} le plus grand quotient pro-résoluble de G_S et soit $p \in S$. Est-ce que le morphisme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow G_S^{\text{res}}$ induit par (8) est injectif ?

Je pense que non, mais je ne sais pas le démontrer. La question se pose car on aimerait bien savoir si il est raisonnable d'espérer redémontrer le Théorème 1.2 sans utiliser tout l'arsenal automorphe, par exemple uniquement à l'aide de la théorie du corps de classes.

QUESTION 1.11. Est-il vrai que pour tout nombre premier p il existe un corps de nombres totalement réel, non ramifié hors de p , et possédant au moins deux places au dessus de p ?

Je n'ai pas d'avis tranché sur ce problème. Il est aisé de fabriquer des p pour lesquels cela fonctionne. Par exemple, si p est un nombre premier de la forme $4a^3 - 27b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $p \pm 1 \neq 3a$, alors le corps de décomposition du polynôme $X^3 - aX + b$ a les propriétés cherchées⁸ (exemples : $p = 229, 257, 733, 761, 1129, 1229, \dots$). Il contient $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et possède 3 places au dessus de p .

⁸L'hypothèse $p \pm 1 \neq 3a$ permet de s'assurer de l'irréductibilité de ce polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$, i.e. d'éviter les polynômes de la forme $(X + k)(X^2 - kX + (k^2 - p)/4)$, qui sont de discriminant p si $p \pm 4$ est de la forme $9k^2$.

2. Voisins de Kneser des réseaux de Niemeier et formes automorphes pour $O(24)$

2.1. Résumé et perspectives. Dans cette partie, j'expose un travail en commun avec Jean Lannes dont la version finale est toujours en cours de rédaction. Pour cette raison, je donnerai plus de détails dans cette partie que dans les autres. Je renvoie à ma prépublication [CL11] pour des résultats très partiels, ainsi qu'à mon site <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/niemeier/niemeier.html> pour un ensemble de tables.

Ce travail porte sur les réseaux unimodulaires pairs de rang ≤ 24 et particulièrement sur le comptage de leurs p -voisins au sens de Kneser. Nous démontrons, en utilisant notamment les travaux récents d'Arthur [ART11] sur le spectre discret automorphe des groupes classiques, une formule explicite pour ces nombres en termes de certaines formes modulaires de genre 1 et 2. Cette formule est actuellement encore conditionnelle à certains résultats de la théorie d'Arthur que nous précisons plus loin.

Ces formules ouvrent un nouveau point de vue sur des problèmes classiques de ce sujet, notamment lorsqu'on les confronte à la théorie des systèmes de racines dans ces dimensions. Elles permettent par exemple de comprendre et d'ordonner tout un ensemble de constructions du réseau de Leech, et de déterminer le graphe des p -voisins de Kneser des réseaux de Niemeier pour tout nombre premier p (le cas $p = 2$ était connu de Borchers [BOR84]). Elles ont d'autres applications intéressantes : démonstration de la conjecture de Nebe-Venkov [NV01] sur les combinaisons linéaires des séries thêta des réseaux de Niemeier, détermination des valeurs propres de Hecke de certaines formes de genre 2, démonstration de la conjecture de Harder [HAR08].

Le problème du comptage des voisins des réseaux de Niemeier se ramène à la question de déterminer les représentations automorphes π d'une certaine \mathbb{Z} -forme G semisimple du groupe spécial orthogonal euclidien $SO(24, \mathbb{R})$ qui sont telles que π_∞ est triviale et qui sont partout non ramifiées. Les travaux de Niemeier [NIE73] montrent qu'il y a 25 telles représentations. Les résultats récents d'Arthur proposent un angle d'attaque pour cette question. *Ma motivation première pour ce travail était de comprendre ce qu'ils disent dans ce contexte.*

Je décrirai les travaux d'Arthur plus en détail dans les paragraphes qui suivent, mais je voudrais tout d'abord dégager de manière informelle les interrogations qui me paraissent les plus piquantes avant d'entamer ce travail. Grosso modo, la théorie développée par Arthur associe à chaque représentation π comme plus haut un "paramètre global" qui est une écriture symbolique de la forme

$$\pi_1[d_1] \oplus \pi_2[d_2] \oplus \cdots \oplus \pi_k[d_k]$$

où $1 \leq k \leq 24$ est un entier, π_i est une représentation automorphe cuspidale "demi-algébrique" et partout non ramifiée de $PGL(r_i)$, et les r_i, d_i sont des entiers tels que

$$\sum_{i=1}^k r_i d_i = 24.$$

Le caractère infinitésimal des π_i satisfait de plus une condition très forte que je n'expliquerai pas ici. Ce paramètre détermine les π_v essentiellement entièrement, et de manière transparente, en termes des $(\pi_i)_v$. Réciproquement, la célèbre formule de multiplicité d'Arthur donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un π de paramètre donné existe.

Si l'on essaie de "deviner" les paramètres possibles, on se heurte immédiatement à l'examen suivant, constat d'un survol de la littérature en théorie des formes automorphes : les seules représentations automorphes demi-algébriques partout non-ramifiées de $GL(n)$ que l'on "connaisse bien" sont essentiellement celles attachées aux formes modulaires pour $SL(2, \mathbb{Z})$ (i.e. $n = 2$), et dans une moindre mesure celles attachées aux formes de Siegel de genre $g \leq 3$ (pour lesquelles il est par ailleurs extrêmement difficile de calculer les paramètres de Satake). Je reviendrai plus en détail sur ces questions quand je décrirai mon travail avec Renard [CR11], dont c'est le point de départ. Ainsi, si par malheur l'une des 25 représentations π contient un π_i qui n'est pas dans la petite liste connue, alors vraisemblablement il restera inconnu pour nous, ainsi donc que le comptage des p -voisins des réseaux de Niemeier.⁹

La petite liste en question, ici, est très réduite : seules les 5 formes modulaires pour $SL(2, \mathbb{Z})$ de poids 12, 16, 18, 20 et 22, les 4 formes de Siegel de genre 2 de poids (6, 8), (4, 10), (8, 8) et (12, 6), ainsi que le carré symétrique de la forme modulaire discriminant Δ , ont les propriétés de caractère infinitésimal requises. Un premier miracle est qu'il existe exactement 24 paramètres possibles, i.e. avec la bonne condition sur le caractère infinitésimal, que l'on peut former avec cet ensemble de représentations. Le second miracle est que dans tous les cas la formule de multiplicité d'Arthur donne une multiplicité non nulle (et deux dans un cas).

Autant le premier miracle pouvait être une coïncidence numérique, autant pour le second c'est parfaitement invraisemblable. En effet, à tout paramètre $\bigoplus_{i=1}^k \pi_i[d_i]$ comme plus haut Arthur associe un 2-groupe abélien élémentaire de cardinal 2^k ou 2^{k-1} . Il associe aussi deux caractères de ce groupe, l'un étant de nature en général globale ("caractère ε "), l'autre plutôt local (déterminé par un accouplement archimédien). La formule de multiplicité d'Arthur dit qu'un paramètre donné est celui d'une représentation automorphe si et seulement si ces deux caractères coïncident. Dans un monde aléatoire il y a donc a priori une chance sur 2^k ou 2^{k-1} que cela soit possible, et dans les exemples en question on a $1 \leq k \leq 5$. Cependant dans tous les cas les caractères coïncident, comme on le vérifie "au cas par cas" : la probabilité naïve de cet événement était d'une chance sur 2^{59} ... Je reviendrai plus tard sur cette coïncidence.

Avant d'entamer une description plus précise de ce travail, je voudrais mentionner une difficulté importante si l'on veut appliquer la formule de multiplicité d'Arthur. En effet, cette formule, bien qu'annoncée par Arthur, n'est pas encore démontrée. Pire, à ma connaissance elle n'est pas encore énoncée ! Ce travail, ainsi que le travail que j'ai mené de front avec Renard déjà mentionné, m'ont permis d'en deviner une formulation sans

⁹Pour être honnête, je pensais initialement pour cette raison que cette méthode était vouée à l'échec, dans le sens où elle ne permettrait de déterminer qu'une petite partie des 25 représentations cherchées.

ambiguïté dans ce contexte, et de la comprendre plus généralement pour les \mathbb{Z} -groupes semisimples G tels que $G(\mathbb{R})$ est un groupe compact (je la donnerai au §3.5.2). Je peux dire maintenant que c'est une formule très simple ! En revanche, son établissement reste encore conditionnel notamment à certains résultats annoncés par Arthur dans son travail sur les formes intérieures des groupes classiques [ART11, Ch. 9]. Il s'en suit que certains des résultats qui vont suivre seront conditionnels, nous l'indiquerons alors par une étoile dans leur énoncé.

2.2. Réseaux unimodulaires pairs de petit rang. Fixons $n \geq 1$ un entier et considérons l'espace euclidien \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire standard $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$. On dit qu'un réseau $L \subset \mathbb{R}^n$ est unimodulaire si son covolume est 1, et qu'il est pair si $x \cdot x \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $x \in L$. Un tel réseau est entier, i.e. $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ pour tout $x, y \in L$.

Les réseaux unimodulaires pairs, et la question de leur classification, apparaissent dans plusieurs problèmes mathématiques : on pense aux tores iso-spectraux de Milnor, à la dualité de Poincaré sur la cohomologie singulière en degré médian, aux problèmes d'empilements de sphères réguliers [CS99], ou encore à la théorie des formes modulaires pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, et plus généralement $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, via leurs séries théta. Leur classification est aussi équivalente à celles des formes quadratiques non dégénérées, et définies positives, sur l'anneau des entiers \mathbb{Z} , une surprenante question ouverte ! À chaque tel réseau L on peut en effet associer la forme quadratique $q_L : L \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$q_L(x) = \frac{x \cdot x}{2}$$

qui a la propriété que la forme bilinéaire sous-jacente $x \cdot y = q_L(x + y) - q_L(x) - q_L(y)$ est de déterminant 1. L'exemple peut-être le plus simple est le réseau de rang $8k$

$$E_{8k} = D_{8k} + \mathbb{Z}e$$

où $D_n \subset \mathbb{Z}^n$ désigne le sous-groupe des éléments (x_i) tels que $\sum_i x_i \equiv 0 \pmod{2}$, et où $e = \frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1)$. En fait, E_8 est isométrique au "réseau des racines" de l'algèbre de Lie complexe du même nom, muni de son unique produit scalaire invariant pour lequel les racines sont de carré scalaire 2.

L'action naturelle de $O(n, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^n induit une action sur l'ensemble de ses réseaux unimodulaires pairs. Nous désignerons par

$$\mathfrak{X}_n$$

l'ensemble de ses orbites, i.e. des classes d'isométrie de réseaux unimodulaires pairs de rang n . La théorie de la réduction assure que \mathfrak{X}_n est fini pour tout entier $n \geq 1$, et par exemple la théorie de Hasse-Minkowski entraîne que

$$\mathfrak{X}_n \neq \emptyset \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{8}.$$

Il est connu que $\mathfrak{X}_8 = \{E_8\}$ (Mordell) et $\mathfrak{X}_{16} = \{E_{16}, E_8 \oplus E_8\}$ (Witt). De plus, d'après Niemeier [NIE73] l'ensemble \mathfrak{X}_{24} admet 24 éléments le plus fameux étant le réseau de Leech [LEE67]. J'en dirai plus sur cette classification ci-après. Un réseau unimodulaire

pair de rang 24 est appelé réseau de Niemeier. La formule de masse de Minkowski-Siegel-Smith, montre en revanche que \mathfrak{X}_{32} a plus de 80 millions d'éléments [SER70], il y en a même plus d'un milliard d'après [KIN03], et leur nombre exact semble actuellement inconnu.

Le réseau de Leech est, à isométries près, le seul réseau de Niemeier sans *racine*, c'est-à-dire sans élément x tel que $x \cdot x = 2$. À l'opposé, si le réseau L , unimodulaire pair de rang 24, possède au moins une racine, l'ensemble $R(L)$ de ses racines est très gros : c'est un système de racines¹⁰ dans \mathbb{R}^{24} . Une démonstration assez simple de cette propriété a été donnée par Venkov [VEN80]. Pour des raisons qui tiennent du miracle, l'application $L \mapsto R(L)$ induit alors une bijection entre classes d'isométrie de réseaux de Niemeier possédant des racines et classes d'isomorphie de systèmes de racines de rang 24 dont toutes les composantes irréductibles sont de type ADE et ont même nombre de Coxeter.¹¹ C'est un exercice sans difficulté que de vérifier qu'il y a exactement 23 tels systèmes de racines, listés dans la table 1.

TAB. 1. Les 23 systèmes de racines équi-Coxeter de type ADE et de rang 24

R	D_{24}	$D_{16}E_8$	E_8^3	A_{24}	D_{12}^2	$D_{10}E_7^2$	$A_{17}E_7$	$A_{15}D_9$	D_8^3	A_{12}^2	$A_{11}D_7E_6$	E_6^4
$h(R)$	46	30	30	25	22	18	18	16	14	13	12	12
R	$A_9^2D_6$	D_6^4	A_8^3	$A_7^2D_5^2$	A_6^4	$A_5^4D_4$	D_4^6	A_4^6	A_3^8	A_2^{12}	A_1^{24}	
$h(R)$	10	10	9	8	7	6	6	5	4	3	2	

Suivant certains auteurs nous utiliserons la notation R^+ pour désigner la classe d'isométrie de l'unique réseau de Niemeier de système de racines R . Par exemple, on a $D_{24}^+ = E_{24}$, $(E_8^3)^+ = E_8^3$ et $(E_8D_{16})^+ = E_8 \oplus E_{16}$. Pour certains R , la construction de R^+ est nettement plus subtile.

concrètement, un système de racines $R \subset \mathbb{R}^{24}$ de la liste ci-dessus étant donné, il s'agit de trouver un réseau L coïncé entre le réseau $Q(R)$ engendré par R et son réseau dual $Q(R)^\sharp$, aussi appelé "réseau des poids" de R , qui soit d'une part unimodulaire pair *et* qui d'autre part ne contienne pas plus de racines que R . La première condition équivaut à dire que l'image I de L dans le groupe abélien fini quadratique

$$q_R : Q(R)^\sharp/Q(R) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad x \mapsto \frac{x \cdot x}{2},$$

soit "un lagrangien", i.e. satisfasse $q_R(I) \equiv 0$ et $I = I^\perp$. Pour qu'un tel I existe, il est par exemple nécessaire que $|Q(R)^\sharp/Q(R)|$, qui n'est autre que l'indice de connexion du système de racines R au sens de Bourbaki [BOU81], soit un carré pour les 23 réseaux R de la table ci-dessus, ce qui est facile à vérifier mais constitue un premier miracle! Venkov vérifie *au cas par cas* que pour tout R , il existe de tels lagrangiens I , qui de surcroît ne forment qu'une seule orbite sous l'action du groupe orthogonal de $Q(R)$ (le groupe $A(R)$)

¹⁰Au sens usuel, par exemple au sens de Bourbaki, en particulier ici il engendre \mathbb{R}^{24} .

¹¹Je rappelle que si R est un système de racines réduit irréductible de rang ℓ , son nombre de Coxeter est le nombre entier $h(R) = |R|/\ell$. concrètement, on a $h(A_n) = n + 1$, $h(D_n) = 2(n - 1)$ et les nombres de Coxeter de E_6 , E_7 et E_8 sont respectivement 12, 18 et 30.

de Bourbaki). Le cas le plus difficile est celui de A_1^{24} , le lagrangien recherché étant alors donné par le code de Golay dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{24}$!

2.3. Voisins de Kneser et graphes $\mathfrak{X}_n(p)$. Soient L et M des réseaux unimodulaires pairs de même rang n et soit p un nombre premier. Suivant M. Kneser, nous dirons que L et M sont p -voisins si $L \cap M$ est d'indice p dans L (et donc dans M). Il est aisé de fabriquer tous les p -voisins d'un L donné : ils sont en bijection naturelle avec les \mathbb{F}_p -points de la quadrique C_L projective lisse sur \mathbb{Z} définie par la forme quadratique q_L .

concrètement, si $P \in C_L(\mathbb{F}_p)$, on peut trouver un élément $v \in L \setminus pL$ de la droite isotrope P satisfaisant $\frac{v \cdot v}{2} \equiv 0 \pmod{p^2}$ (Hensel). Si H désigne le sous-réseau des $x \in L$ tels que $x \cdot v \equiv 0 \pmod{p}$, alors le réseau

$$L(P) = H + \mathbb{Z} \frac{v}{p}$$

est visiblement unimodulaire et pair : c'est un p -voisin de L . Il n'est pas difficile de voir que $L(P)$ ne dépend pas du choix de v , et que tout p -voisin de L est de la forme $L(P)$ pour un et un seul $P \in C_L(\mathbb{F}_p)$. Observons que la quadrique C_L étant hyperbolique sur \mathbb{Z}_p pour tout premier p , le réseau L admet donc exactement

$$|C_L(\mathbb{F}_p)| = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2} + p^{n/2-1} =: c_n(p)$$

p -voisins.

Soient L et M deux réseaux unimodulaires pair de rang n . Nous désignerons par

$$N_p(L, M)$$

le nombre des p -voisins de L qui sont isométriques à M . *C'est ce nombre mystérieux qui nous intéressera principalement dans la suite. Notre résultat principal est d'en avoir trouvé une formule explicite quand $n \leq 24$. Autrement dit, L et p étant donné, on s'intéresse à la partition de la quadrique $C_L(\mathbb{F}_p)$ définie par la classe d'isométrie du p -voisin associé. Tentons tout d'abord de motiver cette étude et la notion de p -voisins.*

Tout d'abord, la relation de p -voisinage munit \mathfrak{X}_n d'une structure de graphe dépendant du choix de p , que l'on notera $\mathfrak{X}_n(p)$. Kneser avait démontré la connexité de ce graphe comme conséquence de son célèbre théorème d'approximation forte. Cela fournit un procédé théorique pour construire \mathfrak{X}_n à partir du réseau E_n et du choix d'un nombre premier p : on part de E_n , on détermine les classes d'isométrie de ses p -voisins, et on recommence tant que le nombre total de classes d'isométrie construites augmente strictement. Cela a par exemple permis à Kneser [KNE57] de recalculer très simplement \mathfrak{X}_8 et \mathfrak{X}_{16} et à Niemeier de déterminer \mathfrak{X}_{24} , tous deux en utilisant le nombre premier 2 et les nombreuses symétries en jeu.¹² Il est aisé de voir que le graphe $\mathfrak{X}_{16}(2)$ est le graphe connexe trivial, i.e. de diamètre 1, à deux sommets. Par contre le graphe $\mathfrak{X}_{24}(2)$, déterminé par Borchers [CS99], ne l'est pas du tout ! Il est de diamètre 5 et cette page

¹²Par exemple, il est aisé de voir que si $x \in C_L(\mathbb{F}_p)$ et $\gamma \in O(L)$, alors les p -voisins de L associés à x et $\gamma(x)$ sont isométriques. Comme l'application naturelle $O(E_8) \rightarrow O(E_8 \otimes \mathbb{F}_2)$ est surjective, il vient que tous les 2-voisins de E_8 sont isométriques, et en fait isométriques à E_8 lui-même comme on le vérifie facilement en calculant un 2-voisin quelconque par exemple. Cela montre que $\mathfrak{X}_8 = \{E_8\}$.

http://en.wikipedia.org/wiki/Niemeier_lattice de la Wikipedia en donne une jolie représentation (aussi due à Borchers).

Une seconde motivation est le problème de mieux comprendre certaines des différentes constructions du réseau de Leech [CS99], en général assez subtiles, qui apparaissent souvent comme des cas particuliers de constructions de p -voisins. La difficulté de construire le réseau de Leech est par exemple manifeste sur le graphe $X_{24}(2)$. En effet, il n'est relié dans ce dernier qu'au réseau $(A_1^{24})^+$, le réseau de Niemeier de la forme R^+ le plus délicat à construire ! Cette propriété est en fait assez simple à comprendre : si le réseau de Leech est un 2-voisin du réseau R^+ , alors un sous-groupe d'indice 2 de ce dernier ne contient pas de racine. En particulier, R a la propriété que la somme de deux racines n'est jamais une racine : tous ses constituants irréductibles sont donc de rang 1, i.e. $R = A_1^{24}$. C'est un cas particulier du fait général suivant que nous avons démontré, et qui est le point de départ d'une série de nos calculs basés sur les propriétés du réseau de Leech.

THÉORÈME* 2.4. *Le réseau de Leech est un p -voisin du réseau R^+ si et seulement si $p \geq h(R)$.*

La condition nécessaire, plus élémentaire (et inconditionnelle), est basée sur des propriétés des groupes de Weyl affines. C'est un analogue formel du résultat, dû à Kostant [KOS59], affirmant que l'ordre minimal d'un élément régulier et d'ordre fini dans un groupe de Lie connexe adjoint coïncide avec le nombre de Coxeter de son système de racines. La condition suffisante, "construisant Leech", nécessite en revanche tout l'arsenal de notre travail. Un nombre particulièrement intéressant est la quantité

$$N_p(\text{Leech}, E_{24})$$

qui traduit la difficulté de construire Leech à partir du plus simple des réseaux de Niemeier, à savoir E_{24} . On constate sur $X_{24}(2)$ qu'il faut le nombre maximal de 5 étapes pour construire le réseau de Leech par voisinages à partir du réseau E_{24} ! En revanche, on trouve dans [CS99] une référence à l'observation suivante due à Thompson : il est assez facile de construire le réseau de Leech comme 47-voisin de E_{24} . En effet, c'est le 47-voisin associé au point $(0, 1, 2, \dots, 23) \in E_{24}$. Observons simplement ici, vérification du pauvre, que ce point se réduit bien en un point de la quadrique $C_{E_{24}}(\mathbb{F}_{47})$ car

$$\sum_{i=1}^{23} i^2 = \frac{1}{6} 23 \cdot 24 \cdot 47 \equiv 0 \pmod{47}.$$

Ceci est bien en accord avec le théorème ci-dessus, car $h(E_{24}) = 46$ est le plus grand nombre de Coxeter intervenant, et 47 est même le plus petit premier pour lequel une telle construction est possible !

Un des énoncés les plus simples à formuler que nous obtenons avec Lannes est le suivant :

THÉORÈME* 2.5. *Le graphe $\mathfrak{X}_{24}(p)$ est de diamètre 1 si, et seulement si, $p \geq 47$. La liste des graphes $\mathfrak{X}_{24}(p)$ pour $p < 47$ est celle donnée dans [CL11].*

Par exemple, les Figures 1 et 2 décrivent les graphes $\mathfrak{X}_{24}(p)$ pour $p = 3$ et 7 , de diamètres respectifs 4 et 2 . Les réseaux de Niemeier sont numérotés par l'ordre choisi dans la table 1, un raffinement de l'ordre décroissant des nombres de Coxeter, le premier étant donc E_{24} , l'avant dernier $(A_1^{24})^+$, et le réseau de Leech est mis en dernier. L'examen de la dernière colonne montre par exemple bien que les deux seuls 3-voisins du réseau de Leech sont $(A_1^{24})^+$ et $(A_2^{12})^+$. On voit aussi que $(A_{12}^2)^+$ et $(E_6^4)^+$ ne sont pas 3-voisins.

Je vais expliquer d'ici peu comment nous avons obtenu ces graphes ainsi que l'idée de la démonstration de ces théorèmes. Je voudrais rajouter simplement ici qu'il semble difficile, pour calculer les $N_p(L, M)$, d'opérer par calcul "brutal" à l'aide de l'ordinateur (ce que ne faisait pas non plus Borchers pour $p = 2$ par ailleurs!). En effet, il faut 6 ms à PARI et mon ordinateur pour déterminer la classe d'isométrie d'un 3-voisin d'un réseau de Niemeier L défini par un point donné de $C_L(\mathbb{F}_3)$: on calcule le voisin ainsi que le nombre de ces racines, ce qui détermine déjà son nombre de Coxeter, et s'il le faut on détermine l'indice de son sous-réseau engendré par les racines. Il faudrait donc au moins

$$\frac{c_{24}(3) \cdot (0.005)}{3600 \cdot 24 \cdot (365.25)} \simeq 8.955$$

années pour déterminer avec leurs multiplicités tous les 3-voisins d'un seul réseau de Niemeier! ¹³

2.6. Cas du rang 16. Nous nous concentrons désormais sur le problème de déterminer $N_p(L, M)$ pour deux réseaux unimodulaires pairs de même rang $n \leq 24$. Étant donné que $N_p(E_8, E_8) = c_8(p)$, le premier cas intéressant est celui de la dimension 16. Il sera commode d'introduire l'opérateur \mathbb{Z} -linéaire

$$T_p : \mathbb{Z}[\mathfrak{X}_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{X}_n]$$

défini par $T_p([L]) = \sum_M [M]$, la somme portant sur les p -voisins M du réseau L . Autrement dit, $T_p([L]) = \sum_{[M] \in \mathfrak{X}_n} N_p(L, M)[M]$.

THÉOREME 2.7. *Dans la base, $E_8 \oplus E_8, E_{16}$ la matrice de T_p vaut*

$$c_{16}(p) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 + p + p^2 + p^3) \frac{1 + p^{11} - \tau(p)}{691} \begin{bmatrix} -405 & 286 \\ 405 & -286 \end{bmatrix},$$

où τ désigne la fonction de Ramanujan.

Bien que ce résultat était sans doute connu des spécialistes, nous n'en avons pas trouvé de trace dans la littérature. Je rappelle que la fonction τ de Ramanujan est définie par

$$\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n.$$

¹³Bien entendu, on peut réduire sensiblement ces calculs en déterminant en préliminaire les orbites de $O(L)$ sur $C_L(\mathbb{F}_p)$, par exemple en utilisant des propriétés des groupes de Weyl affines. Le point est que ces orbites sont en générales très grosses : le plus petit groupe d'isométrie d'un réseau de Niemeier, celui de $(A_3^8)^+$, a un cardinal de l'ordre de $3 \cdot 10^{14}$! Ceci dit, ceci demanderait un travail titanesque, et de toutes façons serait inaccessible à l'ordinateur dès que p est plus grand. Vraisemblablement le cas $p = 17$ me semble inatteignable quelles que soient les ruses.

L'apparition de cette fonction dans les questions de réseaux n'étonnera sans doute pas certains lecteurs. En effet, il est par exemple bien connu que, si l'on désigne par

$$r_L(n) = |\{x \in L, x \cdot x = 2n\}|,$$

alors pour tout nombre premier p on a

$$r_{\text{Leech}}(p) = \frac{65520}{691}(1 + p^{11} - \tau(p)),$$

une formule d'apparence très similaire à celle du théorème ci-dessus!

Cette identité résulte "simplement" de ce que si L est unimodulaire pair de rang n , alors sa série thêta $\theta_L = \sum_{n \geq 0} r_L(n)q^n$ est une forme modulaire de poids $n/2$ pour le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. C'est alors un exercice que de conclure car l'espace des formes modulaires de poids 12 est engendré par Δ et la série d'Eisenstein de poids 12, et car le réseau de Leech n'a pas de racine, i.e. $r_{\text{Leech}}(1) = 0$. Comme nous le verrons, il semblerait que l'apparition de Δ dans le problème de comptage plus haut de p -voisin semble sensiblement plus subtile que dans cette formule, car elle s'avèrera équivalente à un cas non trivial de functorialité d'Arthur-Langlands. Mentionnons enfin que la comparaison du théorème et de la formule ci-dessus conduit à la relation "purement quadratique"

$$N_p(\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8, \mathbb{E}_{16}) = \frac{9}{1456} \cdot r_{\text{Leech}}(p) \cdot \frac{p^4 - 1}{p - 1},$$

que nous ne savons pas démontrer directement!

Discutons brièvement la démonstration du Théorème 2.7, ce qui nous permettra notamment d'introduire des objets utiles pour la suite. Commençons par deux observations bien connues valables en tout rang n [NV01]. Tout d'abord, les opérateurs T_p commutent deux à deux. De plus, ce sont des opérateurs auto-adjoints pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathcal{X}_n]$ défini par $\langle [L], \cdot \rangle [M] = \delta_{[L],[M]} |O(L)|$. Cela signifie concrètement que l'on a l'identité

$$N_p(L, M) |O(M)| = N_p(M, L) |O(L)|.$$

Notre problème général, à savoir déterminer les $N_p(L, M)$, est donc équivalent à trouver une base de $\mathbb{R}[\mathcal{X}_n]$ constituée de vecteurs propres commun à tous les T_p et de déterminer pour chacun d'entre eux le système (λ_p) associé des valeurs propres des (T_p) . Mentionnons la présence importante de $(c_n(p))$ comme système de valeurs propres "trivial" : l'identité ci-dessus assure en effet que le vecteur $\sum_{L \in \mathcal{X}_n} |O(L)|^{-1} [L]$ est un vecteur propre de T_p pour la valeur propre $c_n(p)$. C'est en fait le seul vecteur propre évident.

Retournons au cas $n = 16$. Notre démonstration repose sur les séries thêta de Siegel

$$\vartheta_g : \mathbb{Z}[X_n] \rightarrow M_{\frac{n}{2}}(\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})),$$

où l'arrivée désigne l'espace des formes modulaires de Siegel de poids $\frac{n}{2}$ pour le groupe $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ ("genre g "). Les relations de commutation d'Eichler généralisées ([RAL82], [WAL08]) assurent que ϑ_g entrelace T_p avec un certain opérateur de Hecke explicite du côté des formes de Siegel. Un résultat classique de Witt, Kneser et Igusa ([KNE67]) assure que

$$\vartheta_g(\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8) = \vartheta_g(\mathbb{E}_{16}) \quad \text{if } g \leq 3.$$

Ceci est bien connu en genre 1 car $M_8(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$ est de dimension 1. Ces identités absolument remarquables affirment que $E_8 \oplus E_8$ et E_{16} sont relativement difficile à différencier du point de vue de la représentation des formes¹⁴ : ils représentent toutes les formes quadratiques entières de rang ≤ 3 exactement le même nombre de fois ! En revanche, il n'en va pas de même de la forme D_4 , de sorte que la forme modulaire

$$F = \vartheta_4(E_8 \oplus E_8) - \vartheta_4(E_{16})$$

qui est parabolique par le résultat précédent, ne s'annule pas. C'est pourquoi la valeur propre de T_p que nous recherchons est reliée au système de valeurs propres de Hecke de la forme

$$F \in S_8(\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})).$$

Le lien avec la fonction Δ apparaît alors de la manière suivante. D'une part, un résultat de Poor et Yuen [PY96] affirme que cet espace est en fait de dimension 1 (engendré par la fameuse forme de Schottky !). D'autre part, un autre élément non-trivial de cet espace est le relèvement d'Ikeda $I(\Delta)$ de la fonction Δ [IKE01], dont les valeurs propres de Hecke en p sont reliées à $\tau(p)$. Il en résulte que $I(\Delta)$ et F sont proportionnels. Le Théorème 2.7 s'en déduit en mettant bout à bout les formules.

L'histoire ne s'arrête pas tout à fait ici car nous avons en fait aussi trouvé un moyen de se passer de la démonstration difficile d'Ikeda pour construire $I(\Delta)$. En effet, nous avons observé que dans ce cas très précis il peut être construit directement à partir de Δ et de deux constructions de séries thêta et de la triallité pour le groupe $\mathrm{PGO}_{E_8}^+$ semisimple \mathbb{Z} , l'une à coefficient dans l'unique invariant harmonique de degré 8 du groupe de Weyl de E_8 , l'autre à coefficient dans la représentation triale de cette dernière.

2.8. Cas du rang 24 et conjecture de Nebe-Venkov. Nous en venons à notre résultat principal, à savoir la détermination des $N_p(L, M)$ pour L et M deux réseaux de Niemeier. Nous aurons besoin pour le formuler d'introduire certains nouveaux acteurs. Rappelons que si $k \in \{12, 16, 18, 20, 22\}$, l'espace

$$S_k(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$$

des formes modulaires paraboliques de poids k pour le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ est de dimension 1. Nous désignerons alors par

$$\Delta_k = \sum_{n \geq 1} \tau_k(n) q^n$$

l'unique élément de cet espace tel que $\tau_k(1) = 1$, en particulier $\Delta = \Delta_{12}$. Rappelons aussi que d'après Tsushima [TSU83], si $(j, k) \in \{(6, 8), (4, 10), (8, 8), (12, 6)\}$, l'espace des formes modulaires vectorielles de Siegel de poids $\mathrm{Sym}^j \otimes \det^k$ pour le groupe $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ est aussi de dimension 1. Nous désignerons par

$$\Delta_{j,k}$$

un générateur de cet espace et par $\tau_{j,k}(p)$ la valeur propre de l'opérateur de Hecke de Siegel en p correspondant à la "trace entière du Frobenius" agissant sur $\Delta_{j,k}$.

¹⁴En revanche, E_{16} n'est pas engendré \mathbb{Z} -linéairement par ses racines, contrairement à E_8^2 .

THÉORÈME* 2.9. Soient L et M des réseaux de Niemeier. Il existe 11 polynômes $P, (P_k), (P_{j,k}), P_S \in \mathbb{Q}[X]$ tels que pour tout nombre premier p ,

$$N_p(L, M) = P(p) + \sum_k P_k(p)\tau_k(p) + \sum_{j,k} P_{j,k}(p)\tau_{j,k}(p) + P_S(p)(\tau(p)^2 - p^{11}).$$

Les $11 \cdot 24^2$ polynômes en questions sont explicites : nous renvoyons à la table http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/niemeier/explicit_formula.pdf pour une liste. Nous épargnerons au lecteur la vue ici d'une de ces bêtes car leurs coefficients, typiquement des nombres comme celui-ci

$$9241391269/6125466240,$$

sont d'apparence insignifiante. En fait, à la vue des formules explicites il est tout à fait extraordinaire que $N_p(L, M)$ soit un entier ! C'est une analyse détaillée de ces formules, utilisant notamment les estimées de Ramanujan sur les $\tau_*(p)$, qui nous permet de démontrer les Théorèmes 2.4 et 2.5.

Notre objectif est désormais d'expliquer d'où sortent ces formules, ce qui nous permettra aussi de les présenter sous une forme moins barbare. Tout comme dans le cas $n = 16$, il s'agit d'étudier les systèmes de valeurs propres des T_p agissant sur $\mathbb{R}[\mathfrak{X}_{24}]$. Pour $p = 2$, ainsi que l'ont observé Nebe et Venkov [NV01], la matrice de T_2 se déduit des calculs de Borcherds. Par un heureux hasard, cette matrice a des valeurs propres distinctes et entières, et permet donc de déterminer les vecteurs propres communs des T_p . Pour déterminer les valeurs propres, on peut étudier les applications ϑ_g comme dans le cas $n = 16$. On est alors confronté à deux problèmes.

Tout d'abord, il faut déterminer le noyau des applications

$$\vartheta_g : \mathbb{Z}[\mathfrak{X}_{24}] \longrightarrow M_{12}(\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})).$$

C'est une suite décroissante avec g de sous-espaces, dont Erokhin [ERO79] avait prouvé la nullité quand $g = 12$ (c'est tautologique pour $g = 24$). Ce problème est l'analogue pour les réseaux de Niemeier du problème mentionné en rang 16, qui était de déterminer le plus petit genre g différentiant les séries thêta de E_{16} et E_8^2 . Ce problème a été étudié en détail par Nebe et Venkov dans [NV01], où ils déterminent un certain nombre de ces relations, utilisant notamment des travaux de Borcherds-Freitag-Weissauer [BFW98]. Ils proposent aussi une conjecture précise, que nous appellerons *la conjecture de Nebe-Venkov*.

Admettant ceci, il s'agirait ensuite de déterminer les valeurs propres des opérateurs de Hecke du côté des formes de Siegel sur les images des ϑ_g . Nous nous sommes rendu compte tardivement que ceci avait été entrepris par Ikeda [IKE06], qui est arrivé à déterminer 20 des 24 systèmes de valeurs propres en combinant de manière astucieuse deux types de relèvements de formes de Siegel qu'il a lui-même construit (dans le jargon, ce sont les "Ikeda lifts" et autres "Miyawaki lifts" [IKE01], [IKE06]). Ce travail formidable est malheureusement encore insuffisant pour l'application ci-dessus. Notamment, les 4 formes mystérieuses $\Delta_{j,k}$ que nous avons introduites plus haut n'apparaissent pas dans ses formules.

Nous procédons en fait de manière complètement différente, sans étudier de séries théta, mais en passant plutôt par la description récente par Arthur du spectre discret automorphe des groupes classiques. En retour, nous obtiendrons le :

THÉORÈME* 2.10. *La conjecture de Nebe-Venkov [NV01] est vraie.*

Le lien avec les formes automorphes, assez standard, est le suivant. Désignons par

$$O(n)$$

le schéma en groupes orthogonaux sur \mathbb{Z} défini par le réseau E_n muni de sa forme quadratique q_{E_n} . L'ensemble \mathfrak{X}_n s'identifie alors canoniquement à l'ensemble des classes de $O(n)$, i.e.

$$\mathfrak{X}_n = O(n, \mathbb{Q}) \backslash O(n, \mathbb{A}_f) / O(n, \widehat{\mathbb{Z}}).$$

Cet énoncé très classique n'est autre que le fait que les réseaux unimodulaires pairs de rang n sont isométriques sur \mathbb{Z}_p pour tout p (en fait, hyperboliques). Bien entendu, \mathbb{A}_f désigne l'anneau des adèles finies de \mathbb{Q} .

L'espace des fonctions $\mathfrak{X}_n \rightarrow \mathbb{C}$ s'identifie alors à celui des formes automorphes de $O(n)$ qui sont de conducteur 1 et qui engendrent la représentation triviale sous le groupe compact $O(n, \mathbb{R})$. L'opérateur T_p est naturellement un opérateur de Hecke de cette théorie. Autrement dit, on se ramène à déterminer les 24 représentations automorphes π de $O(24)$ telles que π_∞ est trivial et π_p non ramifié pour tout p , i.e. admet des vecteurs invariants par $O(24, \mathbb{Z}_p)$.

Il sera en fait légèrement plus commode de raisonner plutôt sur le groupe $SO(24)$ (qui est connexe). Le groupe $SO(n)$ est défini comme étant le noyau du déterminant de Dieudonné $O(n) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il est semisimple sur \mathbb{Z} au sens usuel (de SGA 3). Le nombre de classes de $SO(24)$ est 25, et non plus 24, car seul le réseau de Leech n'admet pas d'isométrie de déterminant -1 .

2.11. Digression : la classification d'Arthur dans le cas des groupes classiques semisimples sur \mathbb{Z} . Ne serait-ce que pour formuler nos résultats, il est nécessaire à ce point de faire une digression sur les énoncés d'Arthur concernant le spectre automorphe discret des groupes classiques.

Ces énoncés sont discutés en toute généralité dans [ART89], [ART05] et [ART11], du moins dans le cas des groupes quasi-déployés. Ils se simplifient notablement dans le cas particulier des groupes possédant un modèle entier qui est semisimple sur \mathbb{Z} et de leurs représentations partout non ramifiées, qui est le cadre que nous allons imposer ici, et que nous retrouverons quand je décrirai mes travaux avec Renard. Je renvoie d'ailleurs à mon article [CR11, §3] pour une discussion plus détaillée de tout ce qui suit. Bien que j'aurais aimé agrémenté ce paragraphe de plus d'exemples, il m'a semblé nécessaire pour rester concis d'aller temporairement "droit au but" !

Dans tout ce qui suit, on supposera que G est un \mathbb{Z} -groupe semisimple. Autrement dit, c'est un schéma en groupes linéaire sur \mathbb{Z} qui est plat et à fibre semisimple sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout nombre premier p . Par exemple, G peut être un groupe de Chevalley, ou encore le groupe $SO(n)$ pour $n \equiv 0 \pmod{8}$ introduit plus haut. Ainsi que l'a observé Gross, le

dual de Langlands de $G_{\mathbb{Q}}$ admet alors une action triviale du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q} [GRO96]. On peut donc simplement le voir comme un groupe algébrique semisimple complexe \widehat{G} dont la donnée radicielle est en dualité avec celle de $G(\mathbb{C})$.

Désignons par $\Pi(G)$ l'ensemble des représentations complexes $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ admissibles irréductibles de $G(\mathbb{A})$ telles que π_p est non ramifiée pour tout premier p , i.e. $\pi_p^{G(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$. L'objectif ultime est de décrire ses sous-ensembles

$$\Pi_{\text{cusp}}(G) \subset \Pi_{\text{disc}}(G) \subset \Pi(G)$$

constitués respectivement des représentations qui sont automorphes cuspidales ou discrètes.¹⁵ Selon Langlands et Arthur, pour chaque \mathbb{Z} -groupe semisimple G , $\Pi_{\text{disc}}(G)$ devrait être "reconstitué" selon une recette bien précise à partir des $\Pi_{\text{cusp}}(\text{PGL}(n))$, pour $n \geq 1$ variable.

Soit $\pi \in \Pi(G)$. Pour tout nombre premier p , la théorie de Satake associée à π_p une classe de conjugaison semisimple

$$c_p(\pi) \subset \widehat{G},$$

qui la détermine entièrement. De manière similaire, le caractère infinitésimal de π_{∞} définit selon Harish-Chandra une classe de conjugaison semisimple

$$c_{\infty}(\pi) \subset \widehat{\mathfrak{g}} = \text{Lie}_{\mathbb{C}} \widehat{G},$$

qui détermine (le module de Harish-Chandra) π_{∞} parmi un ensemble fini.

Si H est un groupe algébrique linéaire complexe, il sera commode d'introduire l'ensemble $\mathcal{X}(H)$ des collections (c_v) , v parcourant les places de \mathbb{Q} , telles que c_p (resp. c_{∞}) est une classe de conjugaison semisimple dans H (resp. $\text{Lie}(H)$). On a décrit ci-dessus une application de paramétrisation à fibres finies

$$c : \Pi(G) \rightarrow \mathcal{X}(\widehat{G}), \quad \pi \mapsto (c_v(\pi)),$$

qui n'est autre que la paramétrisation de Langlands (affaiblie à l'infini). Quand $G(\mathbb{R})$ est compact, il est nécessairement connexe (Chevalley), et cette application c est même une injection.

Concentrons nous maintenant sur le cas des groupes *classiques*. Dans ce qui suit un groupe complexe H sera dit classique s'il est isomorphe à $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ pour un entier $n \geq 2$ pair, ou à $\text{SO}(n, \mathbb{C})$ pour un entier $n \geq 1$ et $n \neq 2$. Un tel groupe est semisimple. Il est uniquement déterminé par son "type", à savoir le couple

$$(s(H), n(H))$$

¹⁵On rappelle, suivant Weil, que l'espace homogène $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})$ est muni d'une mesure de Radon invariante à droite sous l'action de $G(\mathbb{A})$, unique à un scalaire > 0 près. Elle est de masse totale finie (Borel, Harish-Chandra). L'espace des formes automorphes de carré intégrable de G est l'espace $\mathcal{L}(G) = L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}))$, qui est muni d'une représentation unitaire de $G(\mathbb{A})$ par translations à droite. On désigne par $\mathcal{L}_{\text{disc}}(G)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(G)$ obtenu en prenant l'adhérence des sous-représentations irréductibles fermées. Suivant Gelfand et Piatetski-Shapiro, le sous-espace $\mathcal{L}_{\text{cusp}}(G)$ constitué des formes cuspidales est $G(\mathbb{A})$ -stable et inclus dans $\mathcal{L}_{\text{disc}}(G)$. Par définition, $\pi \in \Pi(G)$ est dite automorphe cuspidale (resp. discrète) si elle apparaît comme sous-représentation de $\mathcal{L}_{\text{cusp}}(G)$ (resp. $\mathcal{L}_{\text{disc}}(G)$).

où $s(H)$ vaut -1 si H est un groupe symplectique et 1 sinon, et où $n(H)$ est l'entier n ci-dessus, i.e. la dimension de la représentation naturelle, aussi dite *standard*, du groupe H . Un \mathbb{Z} -groupe semisimple G sera dit classique si $G(\mathbb{C})$ l'est, auquel cas on constate que \widehat{G} l'est aussi, éventuellement de type différent en général.

Les exemples principaux¹⁶ dans nos applications seront le groupe $\mathrm{Sp}(2g)$ et certains \mathbb{Z} -groupes spéciaux orthogonaux, dont les $\mathrm{SO}(n)$. Si G est un \mathbb{Z} -groupe semisimple classique, et si N désigne l'entier $n(\widehat{G})$, la représentation standard de \widehat{G} définit une application

$$\mathrm{St} : \mathcal{X}(\widehat{G}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})) = \mathcal{X}(\widehat{\mathrm{PGL}}(N)).$$

La théorie d'Arthur et Langlands permet de décrire l'image de $c(\Pi_{\mathrm{disc}}(G))$ par St , nous allons rappeler comment.

Soit $\Pi_{\mathrm{cusp}}^{\perp}(\mathrm{PGL}(n))$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}(n))$ constitué des π isomorphes à leur duale π^{\vee} (contragrédiente). Un premier résultat fondamental, suggéré par le formalisme de Langlands et démontré par Arthur, est que pour tout $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{\perp}(\mathrm{PGL}(n))$, il existe un unique \mathbb{Z} -groupe de Chevalley¹⁷ classique G^{π} tel que $n(\widehat{G}^{\pi}) = n$, et tel qu'il existe un $\pi' \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G^{\pi})$ satisfaisant

$$\mathrm{St}(c(\pi')) = c(\pi).$$

On dit que π est symplectique si \widehat{G}^{π} est un groupe symplectique, et sinon que π est orthogonal. L'alternative symplectique/orthogonal peut aussi être lue sur les fonctions L des carrés symétriques ou alternés de π , mais cela ne nous sera pas utile ici. Évidemment, si n est impair alors toute $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{\perp}(\mathrm{PGL}(n))$ est orthogonale.

Nous arrivons maintenant à une définition importante pour la suite. Soit G un \mathbb{Z} -groupe semisimple classique, nous appellerons *paramètre d'Arthur global* de G un quadruplet

$$(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$$

tels que :

- (i) k est un entier tel que $1 \leq k \leq n(\widehat{G})$,
- (ii) pour tout entier $1 \leq i \leq k$ alors n_i est un entier ≥ 1 , et de plus $\sum_{i=1}^k n_i = n(\widehat{G})$,
- (iii) pour tout $1 \leq i \leq k$, d_i est un diviseur de n_i , $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{\perp}(\mathrm{PGL}(n_i/d_i))$, et $s(\widehat{G}_i^{\pi_i})(-1)^{d_i+1} = s(\widehat{G})$,
- (iv) Si $(n_i, d_i) = (n_j, d_j)$ pour $i \neq j$, alors $\pi_i \neq \pi_j$.

Nous désignerons par $\Psi_{\mathrm{glob}}(G)$ l'ensemble des paramètres d'Arthur globaux de G . Il ne dépend que de $s(\widehat{G})$ et $n(\widehat{G})$. Deux paramètres $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ et $(k', (n'_i), (d'_i), (\pi'_i))$ sont dits équivalents si $k = k'$ et s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ telle que pour tout

¹⁶La classification sur \mathbb{Q} de ces groupes est bien connue : ils ont pour modèles entiers les $\mathrm{Sp}(2g)$ ou SO_L , où $q : L \rightarrow \mathbb{Z}$ est une forme quadratique dont la forme bilinéaire associée $(x, y) \mapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ est de déterminant ± 1 en rang pair, ± 2 en rang impair. L'unique obstruction à l'existence d'une telle forme est la congruence $p - q \equiv -1, 0, 1 \pmod{8}$ où (p, q) est la signature de $q \otimes \mathbb{R}$.

¹⁷Le groupe non semisimple $\mathbb{G}_m = \mathrm{SO}(1, 1)$ est ici exclu.

i , $(n'_i, d'_i, \pi'_i) = (n_{\sigma(i)}, d_{\sigma(i)}, \pi_{\sigma(i)})$. La classe d'équivalence du paramètre $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ sera en générale notée symboliquement

$$\pi_1[d_1] \oplus \cdots \oplus \pi_r[d_r]$$

et le sous-symbole $\pi_i[d_i]$ sera remplacé par $[d_i]$ si $n_i = d_i$ (i.e. $\pi_i = 1$), et par π_i si $d_i = 1$ et $n_i > 1$.

On dispose d'une application de paramétrisation

$$c : \Psi_{\text{glob}}(G) \longrightarrow \mathcal{X}(\text{SL}(n(\widehat{G}), \mathbb{C}))$$

définie comme suit. Soit $\psi = (k, (n_i), (d_i), (\pi_i)) \in \Psi(G)$. Les hypothèses sur les n_i et d_i assurent l'existence d'une représentation

$$\rho_\psi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \prod_{i=1}^k \text{SL}(n_i/d_i, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{SL}(n(\widehat{G}), \mathbb{C})$$

obtenue en considérant la somme directe des représentations $\nu_{d_i} \otimes \mathbb{C}^{n_i/d_i}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(n_i/d_i, \mathbb{C})$, où ν_d désigne la \mathbb{C} -représentation irréductible de dimension d de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Soit

$$e \in \mathcal{X}(\text{SL}(2, \mathbb{C}))$$

l'élément d'Arthur, i.e. le paramètre de la représentation triviale de $\text{PGL}(2)$. Rappelons que $e = (e_v)$ avec $e_\infty = \text{diag}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et pour tout nombre premier p ,

$$e_p = \text{diag}(p^{\frac{1}{2}}, p^{-\frac{1}{2}})$$

où $p^{\frac{1}{2}}$ désigne la racine carré positive de p . Un résultat essentiel, aussi dû à Arthur, est le suivant.

THÉOREME 2.12. (*Arthur*) *Pour tout $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(G)$, il existe un paramètre global $\psi(\pi) = (k, (n_i), (d_i), (\pi_i)) \in \Psi_{\text{glob}}(G)$, unique à équivalence près, tel que*

$$\text{St}(c(\pi)) = \rho_{\psi(\pi)}(e \times \prod_{i=1}^k c(\pi_i)).$$

La formule de multiplicité Arthur décrit aussi l'image de $\pi \mapsto \psi(\pi)$, nous y reviendrons au § 3.5.2. Nous pouvons d'ores et déjà reformuler le Théorème 2.9 en terme de formes automorphes.

2.13. Les 25 représentations $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(\text{SO}(24))$ telles que π_∞ soit la représentation triviale. Il est bien connu qu'une forme modulaire $F \in \mathcal{S}_k(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$ qui est vecteur propre des opérateurs de Hecke T_p usuels engendre de manière naturelle une unique représentation $\pi_F \in \Pi_{\text{cusp}}(\text{PGL}(2)) = \Pi_{\text{cusp}}^\perp(\text{PGL}(2))$. Elle a la propriété caractéristique que $p^{\frac{k-1}{2}} \text{trace}(c_p(\Pi_F))$ coïncide avec la valeur propre de T_p sur F , et elle vérifie de plus $c_\infty(\Pi_F) = \text{diag}(\frac{k-1}{2}, -\frac{k-1}{2})$. Les π_F sont trivialement symplectiques au sens d'Arthur, car $G^{\pi_F} = \text{SO}(1, 1) = \mathbb{G}_m$ est exclus. Pour ne pas alourdir les notations, on écrira en général F pour la représentation π_F . Par exemple, les Δ_k introduits plus haut peuvent être vus comme des éléments symplectiques de $\Pi_{\text{cusp}}^\perp(\text{PGL}(2))$.

Plus généralement, considérons l'espace vectoriel $S_\rho(\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}))$ des formes modulaires paraboliques de Siegel pour le groupe $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ et à coefficients dans la représentation ρ de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})$. Si $F \in S_\rho(\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}))$ est un vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke, il engendre aussi une unique représentation $\pi_F \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGSp}(2g))$. Supposons maintenant $g = 2$, alors PGSp_4 est \mathbb{Z} -isomorphe au groupe de Chevalley $\mathrm{SO}(3, 2)$, de groupe dual $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$, et π_F admet donc un paramètre global $\psi(\pi_F) \in \Psi(\mathrm{SO}(3, 2))$. L'opérateur de Hecke noté T_p sur $S_\rho(\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}))$ a la propriété que sa valeur propre sur F coïncide avec la trace de la classe de conjugaison $c_p(\pi_F) \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$ multipliée par une puissance de p explicite.¹⁸ Les travaux d'Arthur permettent de démontrer que si F n'est pas une forme de Saito-Kurokawa, alors $\psi(\pi_F) = (k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ est cuspidal, i.e. $k = 1 = d_1$ et $\psi(\pi_F) = \pi_1 \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^\perp(\mathrm{PGL}(4))$ (par définition, symplectique). On notera en général par abus simplement F la représentation automorphe π_1 ainsi définie. Observons que comme les formes de Saito-Kurokawa sont à valeurs scalaires, les 4 formes $\Delta_{j,k}$ introduites plus haut ne sont pas de Saito-Kurokawa.

La dernière forme automorphe dont nous aurons besoin est le carré symétrique de la représentation Δ , qui est une représentation (orthogonale) notée $\mathrm{Sym}^2 \Delta$ de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}(3))$ définie par Gelbart et Jacquet.

THÉORÈME* 2.14. *Les 25 représentations automorphes π de $\mathrm{SO}(24)$ qui sont non ramifiées à toutes les places finies, et telles que π_∞ est la représentation triviale, ont pour paramètres globaux ceux de la table 2.*

Seul $\Delta[12]$ est le paramètre de deux telles représentations, qui sont par ailleurs conjuguées l'une de l'autre sous l'action de $\mathrm{O}(24, \mathbb{Z})$.

Le lecteur vérifiera sans peine que les 24 paramètres en question sont bien dans $\Psi_{\mathrm{glob}}(\mathrm{SO}(24))$. Ils possèdent une propriété supplémentaire fondamentale que nous allons dégager maintenant. Si G est un \mathbb{Z} -groupe semisimple classique, et si $\psi = (k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ est un paramètre global de G , appelons *caractère infinitésimal* de ψ la classe de conjugaison semisimple

$$z_\psi := \rho_\psi(e \times \prod_{i=1}^k c_\infty(\pi_i)) \subset M_N(\mathbb{C})$$

où $N = n(\widehat{G})$. Si $G(\mathbb{R})$ est compact, et si $\psi = \psi(\pi)$ pour un $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$, il suit que z_ψ est l'image par St du caractère infinitésimal de π_∞ . Par exemple, si cette représentation est triviale, c'est simplement la classe de conjugaison de la demi-somme des co-racines positives de \widehat{G} relativement à une paire (B, T) quelconque. Concrètement, si $\widehat{G} = \mathrm{SO}(24, \mathbb{C})$ c'est la classe de conjugaison semisimple ayant pour valeurs propres

$$11, 10, \dots, 3, 2, 1, 0, 0, -1, -2, -3, \dots, -10, -11.$$

Le lecteur aura besoin de connaître le caractère infinitésimal de $(\pi_{\Delta_{j,k}})_\infty$: c'est la classe de conjugaison semisimple de $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$ de valeurs propres

$$\pm\left(\frac{j+1}{2} + k - 2\right), \pm\frac{j+1}{2}.$$

¹⁸Si $\rho = \mathrm{Sym}^j \otimes \det^k$ cette puissance est $p^{\frac{j+2k-1}{2}}$.

TAB. 2. Les 24 paramètres des $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(\text{SO}(24))$ telles que π_∞ est triviale.

$[23] \oplus [1]$,	$\Delta_{18}[6] \oplus [1] \oplus [11]$,	$\Delta_{20}[4] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [7]$,
$\text{Sym}^2 \Delta \oplus [21]$,	$\Delta_{22}[2] \oplus \Delta_{16}[4] \oplus [1] \oplus [11]$,	$\Delta_{8,8}[2] \oplus \Delta_{16}[4] \oplus [1] \oplus [7]$,
$\Delta_{22}[2] \oplus [1] \oplus [19]$,	$\Delta_{12,6}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus [1] \oplus [11]$,	$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{20}[2] \oplus \Delta[6] \oplus [5]$,
$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{20}[2] \oplus [17]$,	$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{20}[2] \oplus \Delta_{16}[2] \oplus \Delta[2] \oplus [9]$,	$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{6,8}[2] \oplus \Delta_{16}[2] \oplus \Delta[2] \oplus [5]$,
$\Delta_{22}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus [1] \oplus [15]$,	$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{18}[4] \oplus \Delta[2] \oplus [9]$,	$\Delta_{22}[2] \oplus \Delta[8] \oplus [1] \oplus [3]$,
$\Delta_{20}[4] \oplus [1] \oplus [15]$,	$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{16}[6] \oplus [9]$,	$\Delta_{4,10}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [3]$,
$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{20}[2] \oplus \Delta_{16}[2] \oplus [13]$,	$\Delta_{16}[8] \oplus [1] \oplus [7]$,	$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta[10] \oplus [1]$,
$\text{Sym}^2 \Delta \oplus \Delta_{18}[4] \oplus [13]$,	$\Delta_{22}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [7]$,	$\Delta[12]$.

Cette relation barbare montre d'ailleurs que la paramétrisation par le couple (j, k) n'est pas très heureuse pour ces questions, et lorsque nous ferons des choses combinatoirement plus compliquées il sera primordial de tout paramétrer par le caractère infinitésimal.

En guise d'exemple, le caractère infinitésimal de $\Delta_{4,10}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [3]$ est la classe de conjugaison

$$\begin{aligned} & \text{diag}\left(\frac{21}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{21}{2}\right) \otimes \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \oplus \\ & \text{diag}\left(\frac{17}{2}, -\frac{17}{2}\right) \otimes \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \oplus \text{diag}\left(\frac{11}{2}, -\frac{11}{2}\right) \otimes \text{diag}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \oplus \\ & \text{diag}(0) \oplus \text{diag}(1, 0, -1), \end{aligned}$$

qui a bien les valeurs propres requises.

Le Théorème 2.14 se déduit de la formule de multiplicité d'Arthur, que nous expliquerons en détail dans ce cadre au § 3.5.2.

2.15. Conséquences de la liste. Il n'est pas difficile ici de passer de $\text{SO}(24)$ à $\text{O}(24)$. concrètement, désignons par $\widetilde{\mathfrak{X}}_n$ l'ensemble des classes d'isométrie de réseaux unimodulaires pairs orientés de \mathbb{R}^n , il est muni d'une projection canonique vers \mathfrak{X}_n . Si M est un p -voisin de L , l'orientation de L définit une orientation canonique sur M , de sorte que l'opérateur de Hecke T_p sur $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}_n]$ se raffine en un opérateur \widetilde{T}_p de $\mathbb{Z}[\widetilde{\mathfrak{X}}_n]$. On vérifie que cet opérateur correspond à $p^{\frac{n}{2}-1}$ fois la trace du paramètre de Satake. C'est aussi un opérateur de Hecke minuscule au sens de Gross [GRO98B]. La projection $\mathbb{Q}[\widetilde{\mathfrak{X}}_n] \rightarrow \mathbb{Q}[\mathfrak{X}_n]$ entrelace \widetilde{T}_p et T_p .

Quand $n = 24$, seul le réseau de Leech admet deux orientations non équivalentes comme on l'a déjà dit, de sorte que la projection canonique

$$\mathbb{Q}[\widetilde{\mathfrak{X}}_{24}] \rightarrow \mathbb{Q}[\mathfrak{X}_{24}]$$

a son noyau de dimension 1, engendré par $w = [\text{Leech}^+] - [\text{Leech}^-]$. Il n'est pas très difficile de voir, en étudiant l'opérateur de changement d'orientation et un calcul pour $p = 2$, que le système de vecteurs propres des \widetilde{T}_p sur w se retrouve comme système de valeurs propres des T_p sur $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_{24}]$. Ce phénomène est relié à l'existence de deux représentations de paramètre $\Delta[12]$ ou encore à la construction de Borcherds-Freitag-Weissauer [BFW98]. Il en résulte que les systèmes de valeurs propres des T_p sur $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_{24}]$ sont simplement les traces des paramètres de Satake associés aux 24 paramètres de la liste ci-dessus, multipliés par p^{11} .

Le problème immédiat qui se présente alors est que nous ne connaissons pas de formule simple donnant les paramètres de Satake des $\Delta_{j,k}$, contrairement au cas des Δ_k . C'est en fait un problème bien connu et assez non trivial. Par chance, pour les 4 formes en question ils ont été récemment calculés par C. Faber et G. van der Geer pour des petits nombres premiers p . Par exemple, leur trace est donnée dans [VDG08] pour $p \leq 7$. Leur méthode consiste à énumérer des courbes de genre 2 sur les corps finis et d'exploiter le lien existant entre l'espace de module des telles courbes et la variété de Siegel en genre 2. Ils doivent notamment étudier la cohomologie des systèmes locaux $\text{Sym}^j \otimes \det^k$ sur cette dernière et leur appliquer la formule de Grothendieck-Lefschetz. En utilisant leurs valeurs numériques pour $p = 2$, nous avons pu ainsi vérifier que les 24 valeurs propres de T_2 obtenues sont bien celles de la matrice de Borcherds-Nebe-Venkov!

Cette vérification constituait pour nous un indice très fort que la liste 2 ci-dessus, obtenue initialement par tâtonnements, était correcte. Il faut dire qu'à ce point de notre travail j'étais incapable de comprendre quelle devrait être la forme exacte de la formule de multiplicité annoncée par Arthur dans ce contexte. Je reviendrai sur cette formule au §3.5.2 plus loin. Je voudrais d'abord signaler qu'à ce stade nous disposons, pour chaque couple (L, M) de réseaux de Niemeier, d'une expression de $N_p(L, M)$ comme combinaison linéaire explicite à coefficients rationnels des quatre inconnues

$$\tau_{6,8}(p), \tau_{4,10}(p), \tau_{8,8}(p), \tau_{12,6}(p) \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons alors fait l'observation suivante : admettons que nous sachions pour un nombre premier p donné déterminer $N_p(L, M)$ pour 4 paires distinctes de réseaux de Niemeier $\{L, M\}$. Alors très probablement nous pouvons inverser ce système et en déduire les 4 nombres ci-dessus, ainsi donc en retour tous les $N_p(L, M)$ pour ce nombre premier p . Nous sommes ici sauvés par le réseau Leech. En effet, il résulte du sens "facile" du Théorème 2.4 que pour $p \leq 23$ et $R \in \{D_{24}, E_8^3, E_8 \oplus D_{16}, A_{24}\}$ alors

$$N_p(\text{Leech}, R^+) = 0.$$

On déduit de ceci, essentiellement sans effort, toutes les valeurs des $\tau_{j,k}(p)$ pour $p \leq 23$: voir la table 3. Elles coïncident, dans tous les cas où nous avons pu les comparer, avec les valeurs trouvées par Faber et van der Geer. En peaufinant notre méthode, nous avons en fait réussi, toujours grâce au réseau de Leech, à étendre cette table jusqu'à $p = 71$,

TAB. 3. Quelques valeurs propres d'opérateurs de Hecke en genre 2

p	$\tau_{6,8}(p)$	$\tau_{8,8}(p)$	$\tau_{12,6}(p)$	$\tau_{4,10}(p)$
2	0	1344	-240	-1680
3	-27000	-6408	68040	55080
5	2843100	-30774900	14765100	-7338900
7	-107822000	451366384	-334972400	609422800
11	3760397784	13030789224	3580209624	25358200824
13	9952079500	-328006712228	91151149180	-263384451140
17	243132070500	5520456217764	-11025016477020	-2146704955740
19	595569231400	-28220918878760	-22060913325080	43021727413960
23	-6848349930000	79689608755152	195863810691120	-233610984201360
29	53451678149100	-1105748270340	-1743496339579620	-545371828324260
31	234734887975744	1851264166857664	1979302106496064	830680103136064
37	448712646713500	22115741387845324	-3685951226317460	11555498201265580
41	-1267141915544076	-29442241674311916	106065086529460884	-56208480716702316
43	-1828093644641000	308109789751260712	74859021001125400	160336767963955000
47	-6797312934516000	43932618784857504	156108802652634720	-116311331328502560

alors que les travaux de Faber et van der Geer ne donnent des tables que jusqu'à $p = 37$. On en déduit tous les $N_p(L, M)$ pour $p \leq 79$.

Une amusette : l'opérateur de Hecke T_3 admet en fait deux valeurs propres égales sur $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}_{24}]$, contrairement à T_2 , à savoir la valeur 1827360. Cela concerne les formes

$$\Delta_{4,10}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [3] \quad \text{et} \quad \text{Sym}^2\Delta \oplus \Delta_{6,8}[2] \oplus \Delta_{16}[2] \oplus \Delta[2] \oplus [5].$$

Je ne parviens pas à expliquer cette coïncidence autrement que par le calcul.

L'application à la conjecture de Nebe-Venkov, i.e. le Théorème 2.10, est une conséquence immédiate de la Table 2 et de la généralisation par Rallis des relations de commutation d'Eichler [RAL82], et de l'unicité des paramètres globaux d'Arthur (due en fait à Jacquet-Shalika [JS81]).

Je voudrais terminer ce paragraphe par une dernière application concernant la conjecture de Harder dans [HAR08]. Cette conjecture, énoncée ci-dessous, est une version en dimension supérieure de la célèbre congruence de Ramanujan $\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{691}$, ou encore des congruences de Ribet dans sa preuve de la réciproque du théorème de

Herbrand [RIB76]. À ma connaissance, c'est le premier cas "démonstré" des conjectures de Harder.

THÉORÈME* 2.16. (Conjecture d'Harder) *Pour tout nombre premier p ,*

$$\tau_{4,10}(p) \equiv \tau_{22}(p) + p^8 + p^{13} \pmod{41}.$$

Je me permets de donner la démonstration de ce résultat, qui est très simple. Considérons les deux représentations automorphes de $\mathrm{SO}(24)$ dont les paramètres globaux sont

$$\Delta_{4,10}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [3] \quad \text{et} \quad \Delta_{22}[2] \oplus \Delta_{18}[2] \oplus \Delta[4] \oplus [1] \oplus [7].$$

Soient $e, f \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}_{24}]$ des vecteurs propres de T_2 associés qui soient de plus primitifs dans le \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}_{24}]$. Ces vecteurs sont explicites par le calcul de T_2 par Borcherds-Nebevenkov. L'ordinateur nous affirme que le groupe abélien

$$\mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}f$$

est d'indice exactement $1968 = 2^4 \cdot 3 \cdot 41$ dans son saturé. Il en résulte que les valeurs propres de T_p sur e et f coïncident modulo 1968. Mais on observe sur les paramètres que la différence entre ces deux valeurs propres n'est autre que l'entier

$$(1+p) \cdot [\tau_{4,10}(p) - (\tau_{22}(p) + p^8 + p^{13})],$$

de sorte que cet entier est $\equiv 0 \pmod{1968}$. On en déduit la congruence de Harder si $p \not\equiv -1 \pmod{41}$.

Dans le cas général, on travaille dans l'anneau de Grothendieck A des représentations de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_{41}$. Soient les représentations semisimples ρ_{22} et $\rho_{4,10}$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_{41}$ respectivement associées à Δ_{22} (Deligne) et $\Delta_{4,10}$ (Weissauer). Si ω désigne le caractère cyclotomique modulo 41, le théorème de Cebotarev et la congruence précédente entraînent l'égalité dans A

$$(1+\omega) \cdot \rho_{4,10} = (1+\omega) \cdot (\rho_{22} + 1 + \omega).$$

C'est un simple exercice alors de voir que l'on peut bien simplifier par $1+\omega$ cette égalité, c'est même formel à partir du fait que l'ordre de ω est > 8 (or il est d'ordre 40). \square

3. Motifs de conducteurs 1 et quelques problèmes associés

3.1. Résumé et perspectives. Dans cette partie, j'expose mon travail [CR11] en collaboration avec David Renard. Je renvoie à mon site <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/levelone.html> pour de nombreuses tables de résultats.

Les succès des travaux précédents avec Lannes, notamment la question de la détermination des 24 représentations automorphes de niveau 1 et coefficient trivial pour le groupe $O(24)$ grâce aux travaux d'Arthur, m'ont permis d'entrevoir de nouveaux horizons sur le problème de l'énumération, voire de la classification, des formes automorphes algébriques de niveau 1 pour les groupes classiques sur \mathbb{Z} . J'entendrai par là les \mathbb{Z} -formes "semisimples sur \mathbb{Z} " des groupes de Lie réels $SO(p, q)$ et $Sp(2g, \mathbb{R})$, par exemples les groupes de Chevalley correspondants. C'est un problème évidemment très ancien, dont l'intérêt n'est plus à démontrer, qui a été étudié par de nombreux auteurs, majoritairement dans le cas du groupe $Sp(2g, \mathbb{R})$ et de la théorie des formes de modulaires Siegel.

La question traditionnelle est de déterminer la dimension de l'espace $S_V(Sp(2g, \mathbb{Z}))$ des formes modulaires de Siegel paraboliques pour le groupe $Sp(2g, \mathbb{Z})$ et à coefficients vectoriels V quelconque (voir par exemple [VDG08]). L'approche classique, d'apparence inextricable quand le genre g grandit, consiste à appliquer le théorème de Riemann-Roch au faisceau cohérent correspondant sur la variété de Siegel, ce qui requiert non seulement un calcul de caractéristique d'Euler non trivial mais aussi la détermination de groupes de cohomologie annexes. Le cas $g = 1$ est bien connu, et apparaît au moins dans le cours d'arithmétique de Serre : la dimension de $S_k(SL(2, \mathbb{Z}))$ est $[k/12]$, à moins que $k > 2$ et $k \equiv 2 \pmod{12}$ auquel cas c'est $[k/12] - 1$. Le cas du genre $g = 2$ est dû à Igusa dans le cas des formes "scalaires", et à Tsushima [TSU83] en général. La formule de Tsushima, bien qu'explicite, est suffisamment obscène pour être épargnée ici au lecteur. Ce n'est que très récemment que le cas $g = 3$ a été obtenu par J. Bergström, C. Faber et G. van der Geer [BFV11] (partiellement conditionnellement), le cas des formes scalaires remontant à Tsuyumine [TSU86].

Un problème tout à fait relié à ces questions d'après Langlands est celui d'énumérer les motifs purs sur \mathbb{Q} ayant bonne réduction partout, par exemple en fonction de leurs poids de Hodge.¹⁹ C'est un problème classique qui me fascine depuis longtemps, et qui est par exemple dans l'esprit de mes travaux sur le problème de la construction de corps de nombres peu ramifiés. Il a plusieurs facettes qui sont reliées par des conjectures "standards". La forme la plus tractable est de classifier les représentations automorphes cuspidales de $GL(n)$ sur \mathbb{Q} qui sont non ramifiées à toutes les places finies et qui sont algébriques à l'infini. Ces représentations sont en bijection conjecturale naturelle avec les motifs purs sur \mathbb{Q} absolument simples de rang n qui ont bonne réduction partout (Langlands), avec les représentations ℓ -adiques de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ irréductibles de rang n qui sont cristallines en ℓ et non ramifiées hors ℓ (Fontaine-Mazur [FM95]), ou encore avec un sous-ensemble adéquat de fonctions L qui sont dans la classe de Selberg [SEL92]. Il convient de mentionner qu'il est connu depuis Harish-Chandra qu'il n'existe qu'un

¹⁹Dans le contexte présent, on se limitera majoritairement dans notre étude aux motifs polarisés et dont les nombres de Hodge $h_{p,q}$ sont 0 ou 1.

nombre fini de représentations automorphes cuspidales de $GL(n)$ sur \mathbb{Q} qui soient non ramifiées à toutes les places finies et de caractère infinitésimal donné, ce qui donne un sens au problème de comptage. En revanche, le comptage dans les autres mondes semble très difficile actuellement, surtout dans celui des motifs où il est ouvert même en rang 1 !

Un exemple emblématique de cette interaction conjecturale est la conjecture par Shaffarevich, démontrée ensuite indépendamment par Fontaine et Abrashkin, du fait que la seule courbe projective lisse sur \mathbb{Z} est la droite projective, et plus généralement qu'il n'y a pas de variété abélienne sur \mathbb{Z} de dimension > 0 . Admettant que la fonction L d'une telle variété a les propriétés attendues, cela avait été vérifié par Serre par une méthode inspirée des formules explicites de Weil [MES86]. Un autre exemple classique est le problème très particulier de l'existence de π de niveau 1 pour $GL(n)$ telles que π_∞ a le caractère infinitésimal de la représentation triviale. Il est en effet équivalent de déterminer les entiers n pour lesquels la cohomologie parabolique du groupe $SL(n, \mathbb{Z})$ à coefficients dans \mathbb{Q} est non triviale. Les formules explicites de Weil montrent que n doit être ≥ 27 ([FER96],[MIL02]) mais on ne le sait pour aucun autre entier n , un surprenant problème ouvert. Comme l'a remarqué Khare dans [KHA07], ce problème est relié aux généralisations en dimensions supérieures de la conjecture de modularité de Serre.

Le point de départ de mon travail avec Renard est que les travaux récents d'Arthur permettent un point de vue tout nouveau sur ces questions. Grosso-modo, l'idée est que la formule de multiplicité d'Arthur permet théoriquement d'exprimer de manière très précise les espaces de formes automorphes algébriques pour les groupes classiques sur \mathbb{Z} en fonction de certaines "briques de base". Cela peut s'utiliser dans les deux sens : soit pour déterminer ces briques de base, soit pour reconstruire l'espace des formes en question si l'on connaît ces briques de bases. Ces briques sont les représentations automorphes π des $GL(n)$ pour $n \geq 1$ variable, telles que :

- (i) (autodualité) $\pi^\vee \simeq \pi$,
- (ii) (niveau 1) π_p est non ramifiée pour tout nombre premier p ,
- (iii) π_∞ est demi-algébrique régulière.

Précisons cette dernière condition. Si $w \geq 0$ est un entier désignons par I_w la représentation de dimension 2 du groupe de Weil $W_{\mathbb{R}}$ de \mathbb{R} qui est induite du caractère

$$z \mapsto (z/\bar{z})^{\frac{w}{2}} := z^w/|z|^w$$

de son sous-groupe $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ qui est d'indice 2. La condition (iii) signifie qu'il existe $[n/2]$ entiers $w_1 > w_2 > \dots > w_{[n/2]} \geq 0$ tels que le paramètre de Langlands $L(\pi_\infty)$ de π_∞ ait la propriété suivante :

- (iii, n pair) $L(\pi_\infty) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n/2} I_{w_i}$,
- (iii, n impair) $L(\pi_\infty) \simeq \chi \oplus \bigoplus_{i=1}^{[n/2]} I_{w_i}$, où χ est d'ordre 2 et $w_{[n/2]} > 0$.

Les entiers w_i sont alors uniquement déterminés par π et seront appelés les poids de Hodge de π . L'alternative symplectique/orthogonal d'Arthur assure que tous les w_i sont congrus modulo 2 : ils sont pairs si π est orthogonale et impairs sinon. L'entier $w(\pi) := w_1$

joue un rôle particulier et sera appelé poids motivique²⁰ de π . Ces dénominations sont naturelles car le \mathbb{Q} -motif de rang n (à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et simple) conjecturalement associé à $\pi| \cdot |^{-w(\pi)/2}$ est effectif, pure de poids $w(\pi)$, et a ses $h_{p,w(\pi)-p}$ non nuls (et égaux à 1) quand p parcourt les $\frac{\pm w_i + w(\pi)}{2}$, $i = 1, \dots, [n/2]$, avec en plus $\frac{w(\pi)}{2}$ si n est impair. Observons enfin que le caractère central de π est nécessairement trivial, ce qui entraîne notamment que $\chi = \varepsilon_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}^{[n/2]}$ quand n est impair. Le résultat principal de mon travail avec Renard est le suivant.

THÉORÈME* 3.2. *Pour tout entier $n \leq 8$, et toute suite $w_1 > w_2 > \dots > w_{[n/2]}$, il existe une formule explicite et implémentée sur ordinateur²¹, donnant le nombre de représentations automorphes cuspidales π de $\mathrm{GL}(n)$ satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) plus haut, de poids de Hodge les w_i , et qui sont de plus orthogonales (resp. symplectiques).*

L'étoile qui décore le terme théorème ci-dessus signifie que ce résultat est conditionnel à certains résultats non encore démontrés concernant la classification d'Arthur pour les formes intérieures des groupes classiques [ART11, Chap. 9]. Nous discuterons certaines de ces hypothèses au §3.5.2.

Je renvoie à notre article et à ma page web <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/levelone.html> pour un ensemble de tables. Dans ces tables j'utilise la notation suivante : si $w_1 > \dots > w_r >$ sont des entiers impairs je désigne par

$$S(w_1, \dots, w_r)$$

le nombre des π symplectiques de $\mathrm{GL}(2r)$ satisfaisant (i), (ii) et (iii) de poids de Hodge les w_i . Par exemple, $S(w) = \dim S_{w+1}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$. Si $w_1 > \dots > w_r \geq 0$ sont des entiers pairs je désigne par

$$O(w_1, \dots, w_r) \text{ et } O^*(w_1, \dots, w_r)$$

le nombre des π orthogonaux respectivement de $\mathrm{GL}(2r)$ et $\mathrm{GL}(2r + 1)$ satisfaisant (i), (ii) et (iii), de poids de Hodge les w_i .

Pour toutes les valeurs $w_1 > \dots > w_{[n/2]}$ de l'énoncé nous donnons plus précisément le nombre conjectural des π ayant ces poids de Hodge et qui de plus ont un groupe de Langlands-Sato-Tate donné. J'entends par là le groupe compact image du paramètre global conjectural du groupe de Langlands de \mathbb{Q} associé à π , qui est un sous-groupe compact *connexe*²² de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ agissant irréductiblement sur \mathbb{C}^n . Je reviendrai sur ce groupe au §3.6. Donnons quelques exemples (on sous-entendra toujours ci-dessous que π est une représentation automorphe cuspidale satisfaisant (i), (ii) et (iii)) :

(1) *Des π de $\mathrm{GL}(6)$ de groupe de Langlands-Sato-Tate le groupe symplectique compact $\mathrm{Sp}(6)$ apparaissent en poids motivique 23 et pas moins. Leurs poids de Hodge en poids motivique 23 sont*

$$(23, 13, 5), (23, 15, 3), (23, 15, 7), (23, 17, 5), (23, 17, 9), (23, 19, 3), (23, 19, 11).$$

²⁰Au sens du §1 Ch. I, mentionnons également que la représentation $\pi| \cdot |^{-w(\pi)/2}$ est algébrique.

²¹Il faut au plus une dizaine de minutes à mon ordinateur pour évaluer cette formule pour un r -uplet (w_1, \dots, w_r) donné satisfaisant $w_1 < 100$.

²²Car $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est simplement connexe !

(2) Des π de $\mathrm{GL}(7)$ de groupe de Langlands-Sato-Tate le groupe compact $\mathrm{SO}(7, \mathbb{R})$ apparaissent en poids motivique 26 et pas moins. Leurs poids de Hodge en poids motivique 26 sont

$$(26, 20, 10), (26, 20, 14), (26, 24, 10), (26, 24, 14), (26, 24, 18).$$

(3) Des π de $\mathrm{GL}(8)$ de groupe de Langlands-Sato-Tate le groupe symplectique compact $\mathrm{Sp}(8)$ apparaissent en poids motivique 25 et pas moins. En poids motivique 25 il y en a exactement 33.

(4) Un π de $\mathrm{GL}(8)$ de groupe de Langlands-Sato-Tate le groupe compact $\mathrm{SO}(8)$ apparaît en poids motivique 24 et pas moins. Il y en a un seul de ce poids, de poids de Hodge $(24, 20, 14, 2)$.

Il serait intéressant de déterminer des paramètres de Satake de ces représentations. Je voudrais rajouter que je n'ai trouvé aucune trace dans la littérature des représentations ci-dessus, hormis dans le cas (2) où de telles représentations ont été mises également en évidence indépendamment par Bergström, Faber et van der Geer dans leur analyse de la variété de Siegel de genre 3 [BFV11]. Lorsque $n = 7$, nous donnons aussi le nombre conjectural exact des π de $\mathrm{GL}(7)$ dont le groupe de Langlands-Sato-Tate est le groupe G_2 en fonction de leurs poids de Hodge. On retrouve ainsi comme cas particuliers quelques prédictions de [BFV11]. La question de l'existence de motifs sur \mathbb{Q} de groupes de Galois de type G_2 remonte au moins à Serre [SER94]. Elle a été étudiée par plusieurs auteurs dont Gross et Savin dans [GS98] par des méthodes automorphes, qui considèrent cependant des représentations qui sont Steinberg en une place.

(5) Le premier π de $\mathrm{GL}(7)$ de groupe de Langlands-Sato-Tate le groupe compact G_2 apparaît en poids motivique 24. Il n'y en a qu'un de ce poids qui est de poids de Hodge $(24, 16, 8)$.

Je termine ce paragraphe en donnant quelques conséquences qui me semblent intéressantes de nos résultats. L'application qui m'est la plus chère concerne la question de la détermination, dans l'esprit de mon travail avec Lannes, des 121 représentations automorphes de conducteur 1 et à coefficients triviaux d'une \mathbb{Z} -forme semisimple du groupe $\mathrm{SO}(25, \mathbb{R})$. Ces représentations sont en bijection avec les réseaux pairs de covolume $\sqrt{2}$ de l'espace euclidien \mathbb{R}^{25} , et Borchers a démontré dans [BOR84] qu'il y a exactement 121 classes d'isométrie de tels réseaux (on en obtient des exemples en considérant la somme orthogonale de n'importe quel réseau de Niemeier avec la forme quadratique $2x^2$). Soit ρ le caractère infinitésimal de la représentation triviale de $G(\mathbb{R})$.

THÉORÈME* 3.3. Soit G un \mathbb{Z} -groupe classique tel que $G(\mathbb{R})$ soit le groupe compact $\mathrm{SO}(25, \mathbb{R})$. Il existe exactement 121 paramètres d'Arthur pour G de caractère infinitésimal ρ dont les constituants sont les représentations suivantes satisfaisant (i), (ii) et (iii) :

- la représentation triviale de $\mathrm{GL}(1)$,
- les 7 représentations de $\mathrm{GL}(2)$ de poids motivique ≤ 23 ,
- les 7 représentations symplectiques de $\mathrm{GL}(4)$ de poids motivique ≤ 23 ,

- les 7 représentations symplectiques de $GL(6)$ de poids motivique 23 mentionnées dans le (1) ci-dessus,
- le carré symétrique de la représentation de $GL(2)$ associée à la forme $\Delta \in S_{12}(SL(2, \mathbb{Z}))$.

De plus, ces paramètres sont exactement les paramètres des représentations automorphes de conducteur 1 de G de caractère infinitésimal ρ .

Je renvoie à notre article pour une liste des paramètres en question. Le même phénomène se produit donc que dans le travail avec Lannes : il y a non seulement exactement 121 paramètres d'Arthur "acceptables" et une analyse au cas par cas de ces paramètres montre que la formule de multiplicité d'Arthur vaut toujours 1. Cette coïncidence me semble assez formidable d'un point de vue numérolgique, encore plus que celle dans le travail avec Lannes. Je voudrais rajouter qu'en dimension plus grande, par exemple dans le cas juste après où G un \mathbb{Z} -groupe classique tel que $G(\mathbb{R})$ soit le groupe compact $SO(31, \mathbb{R})$, il existe des paramètres d'Arthur pour G de caractère infinitésimal ρ dont la multiplicité est nulle : c'est par exemple le cas pour le paramètre

$$\Delta_{29}^{(2)} \oplus \Delta_{27}^{(2)} \oplus \Delta_{17}[9] \oplus [8]$$

où $\Delta_w^{(k)}$ désigne l'une quelconque des k représentations de $GL(2)$ associée à une forme propre de poids $w + 1$ pour $SL(2, \mathbb{Z})$, notée simplement Δ_w s'il n'y a qu'une telle forme.

Une deuxième application concerne la construction d'une fonction L dans la classe de Selberg qui me semble remarquable. Si $\underline{w} = (w_1, \dots, w_r)$ est une suite décroissante d'entiers impairs positifs, j'utiliserai la notation $\Delta_{\underline{w}}$ pour désigner l'unique représentation automorphe cuspidale de $GL(2r)$ sur \mathbb{Q} satisfaisant (i), (ii), (iii), symplectique, et de poids de Hodge les w_i , sous réserve qu'il existe une et une seule telle représentation. Une mise en garde : ces indexations ne sont pas compatibles avec les notations utilisées au chapitre précédent, où l'on notait plutôt Δ_{22} pour ce qui est ici Δ_{21} , ou encore $\Delta_{4,10}$ pour ce qui est ici $\Delta_{21,5}$, mais ce sont les seules vraiment raisonnables dans leurs contextes respectifs.

THÉORÈME* 3.4. *Il existe une représentation automorphe tempérée non cuspidale de $GL(28)$, de caractère infinitésimal ρ , satisfaisant (i), (ii) et (iii) plus haut, à savoir :*

$$\Delta_{27,23,9,1} \oplus \Delta_{25,13,3} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}.$$

Observer en effet que tous les nombres impairs de 1 à 27 apparaissent une et une seule fois dans la "formule" ci-dessus. L'assertion non-triviale, qui résulte de nos tables, est l'existence de $\Delta_{27,23,9,1}$ et $\Delta_{25,13,3}$, qui sont des représentations de $GL(8)$ et $GL(6)$ respectivement. Un autre miracle se produit : en utilisant tout ce qu'il y a dans mes tables, je ne peux construire aucune autre représentation symplectique π de $GL(2m)$ ayant les propriétés ci-dessus quand $2m \leq 28$ (donc aucune quand $2m \leq 26$). Il est intéressant de comparer ce résultat avec ce que donnent les formules explicites de Weil. En effet, les travaux de Fermigier [FER96] (contrairement à ceux de Miller [MIL02]) s'appliquent aussi aux formes tempérées non cuspidales, et montrent que l'existence d'un π de $GL(2m)$ comme dans le théorème ci-dessus nécessite $2m \geq 26$, qui est très proche de 28!

Une dernière application de notre travail concerne la dimension des espaces $S_V(\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}))$ de formes de Siegel. Nous donnons en effet une recette explicite pour la dimension de cet

espace en fonction des divers $X(w_1, \dots, w_r)$. Je ne voudrais pas faire croire ici que nous retrouvons par nos calculs les dimensions des espaces de formes de Siegel vectorielles de genre pour $g = 1, 2$ et 3 . Nous utilisons ces dimensions pour démontrer le théorème principal, précisément pour déterminer les quantités $S(w)$, $S(w_1, w_2)$ et $O^*(w_1, w_2, w_3)$. En fait, par un "coup de chance" notre méthode permet quand même de déterminer $O^*(w_1, w_2, w_3)$ pour toute une collection de poids de Hodge (w_1, w_2, w_3) , par exemple tout ceux < 28 . Nos résultats confirment les calculs délicats et indépendants de Bergström, Faber et Van der Geer déjà mentionnés.

3.5. Idées de la démonstration. La démonstration du Théorème 3.2 se découpe en trois étapes que je vais maintenant détailler :

- (a) Exprimer, grâce à la théorie d'Arthur, la dimension de l'espace des formes automorphes de niveau 1 pour un \mathbb{Z} -groupe classique G donné, et de composante archimédienne une série discrète π_∞ donnée, en fonction des $S(-)$, $O(-)$ et $O^*(-)$.
- (b) Calculer indépendamment, pour des groupes G éventuellement bien choisis, la dimension de l'espace des formes automorphes en questions.
- (c) En extraire, par récurrence, les valeurs de S , O et O^* .

Pour le (a), le problème est de comprendre, si $\psi \in \Psi_{\text{glob}}(G)$ est un paramètre d'Arthur de G donné, à quelle condition il existe une représentation automorphe discrète π de G ayant ce paramètre et dont la composante archimédienne est le π_∞ prescrit. Il s'agit donc d'examiner la formule de multiplicité d'Arthur. Nous en aurons notamment besoin notamment quand $G(\mathbb{R})$ est compact, et aussi quand $G = \text{Sp}(2g)$ et π_∞ est une série discrète holomorphe. Je soupçonne que c'est la difficulté à comprendre ce point qui a fait que notre approche n'a pas été considérée plus tôt historiquement. En effet, bien que la littérature sur les formes de Siegel semble profondément imprégnée des conjectures d'Arthur (qui datent des années 80), le lien entre les divers "relèvements" considérés (Saito-Kurokawa, Ikeda, Miyawaki, et d'autres qui ont suivi) et la forme exacte de la formule de multiplicité d'Arthur exacte n'est jamais considérée à ma connaissance (hors du cadre de $\text{PGSp}(4)$ ou des cas stables), et ce même conjecturalement. La difficulté à extraire ces formules des résultats très généraux d'Arthur est sans doute responsable de cette "paresse".

Pour le (b), l'idée est de n'effectuer ce calcul de dimensions, dont on a déjà expliqué la difficulté quand $G = \text{Sp}(2g)$, que dans le cas où $G(\mathbb{R})$ est un groupe compact, ce qui se ramène à un problème de théorie des invariants. Dans les dimensions qui nous intéressent, le groupe G est nécessairement le groupe spécial orthogonal des réseaux de racines E_7 , E_8 et $E_7 \times A_1$. Ces réseaux sont uniques dans leur genre (pairs de déterminants respectifs 2, 1 et 2), de sorte que le groupe G est de nombre de classes 1, et on est donc ramené à déterminer la dimension des $G(\mathbb{Z})$ -invariants dans chaque représentation irréductible du groupe compact $G(\mathbb{R})$, i.e. $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ avec respectivement $n = 7, 8$ et 9 . J'expliquerai ci-après comment nous avons procédé.

Comme nous le verrons, les calculs de dimension effectués au (b) donnent des relations linéaires entre certains $S(-)$, $O(-)$ et $O^*(-)$. Ces relations ne permettent pas à elles

seules de démontrer le théorème, car elles renferment des inconnues. J'expliquerai enfin comment nous déterminons ces inconnues, en se ramenant d'une part à d'autres calculs de dimensions connues pour les $\mathrm{Sp}(2g)$ avec $g = 1, 2$ et 3 , et aussi en démontrant des cas "nouveaux" de functorialité à la Langlands. Ces résultats se déduisent en fait simplement des résultats d'Arthur et sont basés sur l'idée que le groupe de Langlands de \mathbb{Z} , sur lequel je reviendrai au §3.6, est simplement connexe (ce que nous "démonstrons" !). Par exemple, nous prouvons que toute représentation de $\mathrm{GL}(5)$ satisfaisant (i), (ii) et (iii) est un Λ^2 "réduit" d'une et une seule représentation symplectique de $\mathrm{GL}(4)$ satisfaisant (i), (ii) et (iii).

3.5.1. *Étape (b) : calculs de dimensions d'espaces d'invariants.* Je commence par cette étape car c'est la plus facile. Le cadre est le suivant. Soit H un groupe de Lie compact connexe et soit Γ un sous-groupe fini de H . Il est bien connu que les représentations irréductibles de H sont paramétrées par leur poids dominant. Cela suppose d'avoir fixé un tore maximal T et une chambre de Weyl dans $X^*(T) \otimes \mathbb{R}$, et je noterai V_λ la représentation irréductible de H de plus haut poids λ . On se pose la question de déterminer la dimension

$$d(\lambda) = \dim(V_\lambda^\Gamma)$$

de l'espace des invariants de Γ agissant sur V_λ . Comme déjà dit plus haut, les cas particuliers de paires (H, Γ) qui nous intéressent sont les paires :

$$(\mathrm{SO}(7, \mathbb{R}), W^+(\mathrm{E}_7)), \quad (\mathrm{SO}(8, \mathbb{R}), W^+(\mathrm{E}_8)), \quad \text{et} \quad (\mathrm{SO}(9, \mathbb{R}), W(\mathrm{E}_8)),$$

où $W(R) \subset \mathrm{O}(V)$ désigne le groupe de Weyl d'un système de racines R de l'espace euclidien V et où $W^+(R) = W(R) \cap \mathrm{SO}(V)$. Pour les applications à G_2 on considère aussi la paire $(\mathrm{G}_2(\mathbb{R}), \mathrm{G}_2(\mathbb{Z}))$ où G_2 est l'unique \mathbb{Z} -groupe semisimple tel que $\mathrm{G}_2(\mathbb{R})$ est compact (Gross [GRO96]).

Dans tous ces exemples, Γ est intuitivement un très gros sous-groupe de H , on s'attend donc à ce que $d(\lambda)$ soit petit pour des petites valeurs de $|\lambda|$. En revanche, même pour λ petit $\dim(V_\lambda)$ peut être assez gros, auquel cas V_λ est vraisemblablement ingérable pour un ordinateur. Par exemple, dans le cas $H = \mathrm{SO}(8, \mathbb{R})$ et $\lambda = (15, 6, 5, 4)$ dans les notations standards, V_λ est de dimension 143503360 alors que $d(\lambda) = 0$ (est-ce le record?). Pour calculer $d(\lambda)$ nous partons plutôt de la relation triviale

$$d(\lambda) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Trace}(\gamma, V_\lambda),$$

et utilisons une version dégénérée de la formule du caractère de Weyl permettant d'évaluer $\mathrm{Trace}(t, V_\lambda)$ pour tout $t \in T$, y compris quand t n'est pas régulier. Nous avons établi et utilisé une telle formule dans mon travail [CC09] avec Clozel dont j'ai d'ailleurs déjà parlé. Le second ingrédient pour appliquer cette formule est de déterminer des représentants dans T de toutes les classes de conjugaison de Γ . Heureusement, ce travail délicat avait déjà été fait par Carter dans [CAR72], et ce pour tous les groupes de Weyl dans leur représentation de réflexion. Dans le cas supplémentaire du groupe $\Gamma = \mathrm{G}_2(\mathbb{Z})$, nous utilisons plutôt des générateurs de ce dernier comme sous-groupe de $\mathrm{SO}(7, \mathbb{R})$ donnés par A. Cohen, G. Nebe et W. Plesken dans [CNP96].

Les formules finales sont monstrueuses (voir par exemple la discussion page 9 de l'introduction de notre article pour quelques précisions). Cependant, nous les avons implémentées sur ordinateur et au final il faut par exemple environ 5 minutes à l'ordinateur pour calculer une dimension pour $H = \mathrm{SO}(7)$ pour un poids dominant standard $a \geq b \geq c \geq 0$ avec $a \leq 100$, ce qui va déjà bien au delà des valeurs qui m'intéressent pour l'instant ! Je renvoie à la Table 4 qui suit pour les premières valeurs.

Mentionnons pour finir que les erreurs possibles lors de l'implémentation sont multiples, mais il y a de nombreux moyens de vérifier que nos calculs sont exacts. Par exemple, les dimensions doivent être des entiers (alors qu'elles sont dans un corps cyclotomique gigantesque par notre procédé de calcul), elles doivent être compatibles avec la série de Poincaré des groupes de Coxeter [BOU81, Chap. V §6] dans le cas des représentations sur les polynômes harmoniques, ou encore être compatibles aux formules de multiplicité d'Arthur...

3.5.2. *Étape (a) : explicitation de la formule de multiplicité d'Arthur.* Fixons G un \mathbb{Z} -groupe classique semisimple. Nous avons déjà rappelé comment Arthur associe à chaque $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ une unique classe d'équivalence de paramètres globaux $\psi(\pi)$ dans $\Psi_{\mathrm{glob}}(G)$. Fixons donc réciproquement un paramètre d'Arthur global $\psi = (k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$. La formule de multiplicité d'Arthur donne une condition précise sous laquelle ce paramètre est celui d'une représentation.

La discussion de cette formule dans le cas général nous conduirait ici bien trop loin. C'est pourquoi je propose de se restreindre dans ce texte au cas des groupes G tels que $G(\mathbb{R})$ est compact, et de renvoyer à mon article [CR11] pour plus de généralité. Une condition alors nécessaire pour que ψ soit de la forme $\psi(\pi)$ est que le caractère infinitésimal z_ψ de ψ (voir § 2.13) soit dans l'image, par la représentation standard

$$\mathrm{St} : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{SL}(n(\widehat{G}), \mathbb{C}),$$

du caractère infinitésimal μ d'une représentation irréductible de dimension finie du groupe compact $G(\mathbb{R})$. Le cas $\widehat{G} = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{C})$ est un peu plus simple et je vais d'abord me concentrer sur ce cas. Par exemple, G peut être le groupe spécial orthogonal de la forme quadratique E_7 ou $E_8 \times A_1$, des cas très importants pour la discussion ici. Sous l'hypothèse $\widehat{G} = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{C})$, la représentation St induit une injection de l'ensemble des classes de conjugaison semisimples de \widehat{G} dans celles de $\mathrm{SL}(n(\widehat{G}), \mathbb{C})$. Ainsi, Satake et Harish-Chandra assurent qu'il existent *un et un seul* $\pi \in \Pi(G)$ tel que (voir § 2.11)

$$\mathrm{St}(c(\pi)) = \rho_\psi(e \times \prod_i c(\pi_i)).$$

La question est alors de déterminer la multiplicité $m(\pi)$ de ce π dans le spectre automorphe du G . La formule d'Arthur, faite pour cela, comporte trois ingrédients. Le premier est le groupe fini $C_\psi \subset \widehat{G}$. On observe pour cela que le morphisme ρ_ψ défini au § 2.11 se factorise par St , de sorte que l'on peut même supposer qu'il est à valeurs dans \widehat{G} . Le groupe C_ψ est alors le centralisateur de $\mathrm{Im}(\rho_\psi)$ dans \widehat{G} . Il s'identifie ici naturellement au groupe $\{\pm 1\}^{\{1, \dots, k\}}$.

$$G = \mathrm{SO}(7, \mathbb{R}), \Gamma = W^+(\mathrm{E}_7).$$

λ	$d(\lambda)$	λ	$d(\lambda)$	λ	$d(\lambda)$	λ	$d(\lambda)$	λ	$d(\lambda)$
(0, 0, 0)	1	(9, 6, 3)	2	(10, 7, 2)	1	(10, 10, 10)	2	(11, 9, 0)	2
(4, 4, 4)	1	(9, 6, 4)	1	(10, 7, 3)	3	(11, 3, 0)	1	(11, 9, 1)	1
(6, 0, 0)	1	(9, 6, 6)	1	(10, 7, 4)	2	(11, 3, 2)	1	(11, 9, 2)	4
(6, 4, 0)	1	(9, 7, 2)	1	(10, 7, 5)	2	(11, 4, 1)	1	(11, 9, 3)	4
(6, 6, 0)	1	(9, 7, 3)	1	(10, 7, 6)	2	(11, 4, 3)	2	(11, 9, 4)	5
(6, 6, 6)	1	(9, 7, 4)	2	(10, 7, 7)	1	(11, 4, 4)	1	(11, 9, 5)	4
(7, 4, 3)	1	(9, 7, 6)	1	(10, 8, 0)	3	(11, 5, 0)	2	(11, 9, 6)	5
(7, 6, 3)	1	(9, 8, 1)	1	(10, 8, 2)	3	(11, 5, 2)	2	(11, 9, 7)	3
(7, 7, 3)	1	(9, 8, 3)	1	(10, 8, 3)	1	(11, 5, 3)	1	(11, 9, 8)	2
(7, 7, 7)	1	(9, 8, 4)	1	(10, 8, 4)	4	(11, 5, 4)	1	(11, 9, 9)	1
(8, 0, 0)	1	(9, 8, 5)	1	(10, 8, 5)	1	(11, 6, 1)	2	(11, 10, 1)	3
(8, 4, 0)	1	(9, 8, 6)	1	(10, 8, 6)	3	(11, 6, 2)	1	(11, 10, 2)	3
(8, 4, 2)	1	(9, 9, 0)	1	(10, 8, 7)	1	(11, 6, 3)	4	(11, 10, 3)	5
(8, 4, 4)	1	(9, 9, 3)	1	(10, 8, 8)	1	(11, 6, 4)	2	(11, 10, 4)	4
(8, 6, 0)	1	(9, 9, 4)	1	(10, 9, 1)	2	(11, 6, 5)	2	(11, 10, 5)	6
(8, 6, 2)	1	(9, 9, 6)	1	(10, 9, 2)	1	(11, 6, 6)	2	(11, 10, 6)	5
(8, 6, 4)	1	(9, 9, 9)	1	(10, 9, 3)	3	(11, 7, 0)	1	(11, 10, 7)	5
(8, 6, 6)	1	(10, 0, 0)	1	(10, 9, 4)	2	(11, 7, 1)	1	(11, 10, 8)	3
(8, 7, 2)	1	(10, 2, 0)	1	(10, 9, 5)	3	(11, 7, 2)	4	(11, 10, 9)	2
(8, 7, 4)	1	(10, 4, 0)	2	(10, 9, 6)	2	(11, 7, 3)	3	(11, 10, 10)	2
(8, 7, 6)	1	(10, 4, 2)	1	(10, 9, 7)	2	(11, 7, 4)	4	(11, 11, 1)	1
(8, 8, 0)	1	(10, 4, 3)	1	(10, 9, 8)	1	(11, 7, 5)	3	(11, 11, 2)	2
(8, 8, 2)	1	(10, 4, 4)	2	(10, 9, 9)	1	(11, 7, 6)	3	(11, 11, 3)	3
(8, 8, 4)	1	(10, 5, 1)	1	(10, 10, 0)	2	(11, 7, 7)	2	(11, 11, 4)	2
(8, 8, 6)	1	(10, 5, 3)	1	(10, 10, 2)	2	(11, 8, 1)	3	(11, 11, 5)	3
(8, 8, 8)	1	(10, 6, 0)	2	(10, 10, 3)	2	(11, 8, 2)	2	(11, 11, 6)	3
(9, 3, 0)	1	(10, 6, 2)	2	(10, 10, 4)	4	(11, 8, 3)	5	(11, 11, 7)	3
(9, 4, 3)	1	(10, 6, 3)	1	(10, 10, 5)	2	(11, 8, 4)	4	(11, 11, 8)	2
(9, 4, 4)	1	(10, 6, 4)	3	(10, 10, 6)	4	(11, 8, 5)	5	(11, 11, 9)	1
(9, 5, 0)	1	(10, 6, 5)	1	(10, 10, 7)	2	(11, 8, 6)	4	(11, 11, 10)	1
(9, 5, 2)	1	(10, 6, 6)	2	(10, 10, 8)	2	(11, 8, 7)	3	(11, 11, 11)	1
(9, 6, 1)	1	(10, 7, 1)	2	(10, 10, 9)	2	(11, 8, 8)	1	(12, 0, 0)	2

TAB. 4. Valeurs non nulles de $d(\lambda) = \dim V_\lambda^\Gamma$ pour $\lambda = (n_1, n_2, n_3)$ avec $n_1 \leq 11$.

Arthur définit ensuite deux caractères $C_\psi \rightarrow \{\pm 1\}$. Le premier, noté ε_ψ , dépend des facteurs epsilon des paires $\{\pi_i, \pi_j\}$ pour $1 \leq i < j \leq k$. Ces facteurs ici sont des signes explicitement calculables en terme des poids de Hodge des π_i et π_j (car on est en conducteur 1), je renvoie à [CR11, §3.20] pour un formulaire. Un examen de la recette

d'Arthur montre que l'on a la formule

$$\varepsilon_\psi(s_i) = \prod_{j \neq i} \varepsilon(\pi_i \times \pi_j)^{\text{Min}(d_i, d_j)}$$

où $s_i \in C_\psi = \{\pm 1\}^{\{1, \dots, k\}}$ désigne l'élément tel que $s_i(x) = -1$ si $x = i$ et 1 sinon.

Le dernier ingrédient, d'une certaine manière le plus subtile, est un caractère de C_ψ associé à $(G(\mathbb{R}), \pi_\infty)$. Dans le cas qui nous intéresse, il s'est avéré très simple. Partons du caractère infinitésimal z_ψ de ψ . Par hypothèse, il est l'image d'une classe de conjugaison semisimple bien définie dans $\text{Lie}(\text{Im}(\rho_\psi))$. Fixons μ dans cette dernière classe et désignons par \widehat{T} son centralisateur dans \widehat{G} , qui est donc un tore maximal de ce dernier. On a une inclusion évidente

$$C_\psi \subset \widehat{T}.$$

On considère l'unique système de racines positives pour $(\widehat{G}, \widehat{T})$ pour lequel $\mu \in X_*(\widehat{T})$ est un co-caractère dominant, et ρ^\vee la demi-somme des racines associée. Ici, $\rho^\vee \in X^*(\widehat{T})$, il y a donc un sens à restreindre ρ^\vee à C_ψ . J'affirme que la formule de multiplicité d'Arthur s'écrit simplement

$$(9) \quad m(\pi) \neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon_\psi = \rho|_{C_\psi}^\vee$$

et de plus que la multiplicité est 1 si elle est non nulle. Avant de "justifier" cet énoncé, je voudrais signaler d'ores et déjà que l'établissement de cette formule est encore conditionnel à certains résultats non démontrés de la théorie d'Arthur pour les formes intérieures des groupes classiques [ART11, Chap. 9], et que tous nos théorèmes "étoilés" en dépendent notamment.

Avec un peu d'entraînement il est quasiment instantané de vérifier la relation $\varepsilon_\psi = \rho|_{C_\psi}^\vee$ pour un paramètre $\psi \in \Psi_{\text{glob}}(G)$ donné. De plus, les conditions obtenues (d'ailleurs, quelque soit la formule raisonnable précise comme on pourrait le voir!) portent toujours uniquement sur les positions relatives des poids de Hodge des différents π_i (à cause de ρ^\vee) et de congruences modulo 4 sur ces nombres (à cause de ε_ψ).

Le cas particulier le plus important est celui où $k = 1$, i.e. $C_\psi = Z(\widehat{G}) = \{\pm 1\}$ (cas "stable"). Dans ce cas la multiplicité est trivialement 1 (quelque soit la formule de multiplicité exacte) et en particulier toutes les représentations cuspidales symplectiques de $\text{GL}(n(\widehat{G}))$ satisfaisant (i), (ii) et (iii) vont contribuer au spectre discret de G . Cependant, la compréhension de tous les cas est nécessaire pour pouvoir estimer le nombre de ces représentations en fonction de la dimension des espaces de formes automorphes! Je renvoie à notre article pour des formules explicites, dont le nombre augmente rapidement avec $n(\widehat{G})$ (il y en a au moins autant que de partitions de l'entier $\frac{n(\widehat{G})}{2}$). Dans le cas de $\text{SO}(9)$, il y a par exemple 16 formules de multiplicités différentes. Je renvoie par exemple à la figure 5 pour une description des paramètres d'Arthur obtenus en petits poids dans le cas de $\text{SO}(7)$.

La découverte de la formule (9) a été l'un des aspects les plus excitants de ce travail. Pour être honnête, nous l'avons tout d'abord devinée "à l'envers" par extrapolation du cas tempéré en examinant les valeurs que nous avons obtenues en calculant (étape

TAB. 5. Paramètres d'Arthur des représentations automorphes de niveau 1 de $\mathrm{SO}(7)$ dont le caractère infinitésimal, dans $\mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$, a pour valeurs propres $\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3$ avec $23 \geq w_1 > w_2 > w_3 > 0$.

(w_1, w_2, w_3)	$\Pi_{w_1, w_2, w_3}(\mathrm{SO}(7))$	(w_1, w_2, w_3)	$\Pi_{w_1, w_2, w_3}(\mathrm{SO}(7))$
(5,3,1)	[6]	(21,19,17)	$\Delta_{19}[3]$
(13,11,9)	$\Delta_{11}[3]$	(23,9,1)	$\Delta_{23,9} \oplus [2]$
(17,3,1)	$\Delta_{17} \oplus [4]$	(23,11,7)	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{11}$
(17,11,1)	$\Delta_{17} \oplus \Delta_{11} \oplus [2]$	(23,11,9)	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{11}$
(17,15,1)	$\Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [2]$	(23,13,1)	$\Delta_{23,13} \oplus [2]$
(17,15,13)	$\Delta_{15}[3]$	(23,13,5)	$\Delta_{23,13,5}$
(19,11,7)	$\Delta_{19,7} \oplus \Delta_{11}$	(23,15,3)	$\Delta_{23,15,3}$
(19,15,7)	$\Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}$	(23,15,7)	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15}, \Delta_{23,15,7}$
(19,17,7)	$\Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17}$	(23,15,9)	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{15}$
(19,17,15)	$\Delta_{17}[3]$	(23,15,13)	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{15}$
(21,3,1)	$\Delta_{21} \oplus [4]$	(23,17,5)	$\Delta_{23,17,5}$
(21,11,1)	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{11} \oplus [2]$	(23,17,7)	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{17}$
(21,11,5)	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{11}$	(23,17,9)	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{17}, \Delta_{23,17,9}$
(21,11,9)	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{11}$	(23,17,13)	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{17}$
(21,15,1)	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{15} \oplus [2]$	(23,19,3)	$\Delta_{23,19,3}$
(21,15,5)	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{15}$	(23,19,7)	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{19}$
(21,15,9)	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}$	(23,19,9)	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{19}$
(21,15,13)	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{15}$	(23,19,11)	$\Delta_{23,19,11}$
(21,17,5)	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{17}$	(23,19,13)	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19}$
(21,17,9)	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{17}$	(23,21,1)	$\mathrm{Sym}^2 \Delta_{11}[2]$
(21,17,13)	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}$	(23,21,7)	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21}$
(21,19,1)	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [2]$	(23,21,9)	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21}$
(21,19,5)	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19}$	(23,21,13)	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21}$
(21,19,9)	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19}$	(23,21,19)	$\Delta_{21}[3]$
(21,19,13)	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19}$		

précédente) les dimensions des espaces de formes automorphes pour $\mathrm{SO}(7)$ et $\mathrm{SO}(9)$, le point étant que quand la dimension est nulle alors tous les paramètres d'Arthur candidats doivent être de multiplicité nulle.

En effet, je rappelle que si ψ est tempéré, ce qui correspond au cas très particulier où $d_i = 1$ pour tout i , alors les séries discrètes de caractère infinitésimal μ de toutes les formes intérieures de $G(\mathbb{R})$ sont en bijection canonique avec les caractères de la 2-torsion $\widehat{T}[2]$ de \widehat{T} (nous renvoyons par exemple aux articles d'Adams [ADA11] et de Shelstad [SHE08] à ce sujet). Observons qu'un tel caractère induit bien un caractère de C_ψ car $C_\psi \subset \widehat{T}[2]$. La canonicité dans la bijection précédente est subtile et faite de sorte que l'unique série discrète générique de caractère infinitésimal μ de la forme intérieure déployée de $G(\mathbb{R})$ corresponde au caractère trivial de $\widehat{T}[2]$ (on utilise ici que $\mathrm{SO}(2m+1, \mathbb{C})$ est adjoint sinon il faut modifier un peu les énoncés en utilisant la notion de forme intérieure forte [ABV92], [ADA11]). Ceci étant fait, on vérifie que la représentation de dimension finie du groupe compact correspond bien au caractère de $\widehat{T}[2]$ induit par ρ^\vee .

Dans le cas d'un ψ général, il fallait comprendre la paramétrisation analogue à celle ci-dessus pour le paramètre d'Arthur archimédien ψ_∞ de caractère infinitésimal μ associé à ψ , qui est aussi un paramètre d'Adams-Johnson [AJ87]. Nous avons travaillé sous l'hypothèse standard que les paquets associés par Arthur à ces paramètres dans [ART11], pour toutes les formes intérieures de $G(\mathbb{R})$, coïncident avec ceux définis par Adams et Johnson dans [AJ87], ce qui rend nos résultats conditionnels à ce fait. À chaque tel paramètre ψ_∞ est associé un unique paramètre tempéré ψ'_∞ de même caractère infinitésimal, et on dispose d'une inclusion naturelle sur les centralisateurs $C_{\psi_\infty} \subset C_{\psi'_\infty} = \widehat{T}[2]$. Le fait fondamental est alors que si une série discrète π_0 d'une forme intérieure H de $G(\mathbb{R})$ est dans le paquet d'Arthur associé à ψ_∞ , le caractère de C_{ψ_∞} qui lui correspond est la restriction du caractère de $\widehat{T}[2]$ associé à (H, π_0) par le paragraphe précédent. Cela démontre (9) dans le cas très particulier de la forme compacte et de sa représentation de dimension finie de caractère infinitésimal μ . Nous avons tardé à réaliser que ce fait, qui me semble tout à fait fondamental aux applications arithmétiques, a été compris depuis longtemps par Kottwitz dans [KOT88, §9]. Cela nous a permis aussi, toujours dans [CR11], d'étendre la discussion de [ADA11] au cas de tous les paramètres d'Adams-Johnson.

Lorsque $\widehat{G} = \mathrm{SO}(2m, \mathbb{C})$ (auquel cas en fait $4|m$) la situation est presque la même que dans le cas précédent, si ce n'est que la représentation standard de \widehat{G} ne permet que de séparer les classes de $\mathrm{O}(2m, \mathbb{C})$ -conjugaison de $\mathrm{SO}(2m, \mathbb{C})$, ce qui introduit quelques modifications mineures. Au final, la formule de multiplicité est la même que la formule (9), à ceci près que les multiplicités non nulles peuvent être 1 ou 2 d'après Arthur. Plus généralement, cette même formule est la formule de multiplicité d'Arthur explicite pour tout \mathbb{Z} -groupe semisimple G tel que $G(\mathbb{R})$ est compact. Nous l'avons par exemple aussi utilisée comme point de départ dans notre discussion conjecturale sur G_2 . Je renvoie enfin à mon article pour le cas de $\mathrm{Sp}(2g)$, pour lequel ce n'est pas le caractère ρ^\vee qui intervient.

On déduit de la formule (9) la vérification manquante du Théorème 2.14 avec Lannes, ainsi que le Théorème 3.3. Des critères assez simples permettent d'éviter de faire cette vérification au cas par cas : voir par exemple la démonstration du Thm. 1.13 dans [CR11].

3.5.3. Étape (c) : détermination des termes manquants et simple connexité du groupe de Langlands de \mathbb{Z} . Expliquons maintenant brièvement comment déduire le Théorème 3.2 des étapes précédentes. Un rôle important est joué par les \mathbb{Z} -isogénies centrales exceptionnelles $\mathrm{SL}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(2, 1) = \mathrm{PGL}(2)$, $\mathrm{SO}(2, 2) \rightarrow \mathrm{PGL}(2) \times \mathrm{PGL}(2)$, et $\mathrm{Sp}(4) \rightarrow \mathrm{SO}(3, 2) = \mathrm{PGSp}(4)$. Grâce aux travaux d'Arthur et à un lemme élémentaire de relèvement de formes automorphes pour les isogénies entre groupes de Chevalley, ces isogénies nous permettent de démontrer les égalités suivantes, qui sont des manifestations de cas particuliers de functorialité de Langlands :

- (i) $O^*(w) = S(\frac{w}{2})$,
- (ii) $O(w, v) = S(\frac{w+v}{2}) \cdot S(\frac{w-v}{2})$ si $v \neq 0$, et $O(w, 0) = \frac{S(w/2) \cdot (S(w/2)-1)}{2}$,
- (iii) $O^*(w, v) = S(\frac{w+v}{2}, \frac{w-v}{2})$.

Le (i) n'est autre que la functorialité carré symétrique de Gelbart-Jacquet [GJ78], le (ii) est la functorialité "carré tensoriel" et le (iii) est le "carré alterné réduit" déjà mentionné.

Je dois rajouter aussi que la trivialité des facteurs epsilon des représentations orthogonales (Arthur) entraîne que les termes $O(w_1, \dots, w_r)$ et $O^*(w_1, \dots, w_r)$ sont nuls hors d'une certaine congruence sur $\frac{1}{2}(\sum_i w_i)$, qui fait notamment que les énoncés ci-dessus ont un sens. Enfin, un argument de caractère central montre que $O(w_1, \dots, w_r)$ est nul si $r \equiv 1 \pmod{2}$.

J'ai déjà dit que $S(w)$ est la dimension de l'espace des formes modulaires paraboliques pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. La formule de multiplicité d'Arthur et le travail de Tsushima déjà cité permet d'en déduire $S(w, v)$. Les étapes (a) et (b) dans le cas du groupe $\mathrm{SO}(7)$ permettent alors de tirer la valeur des $S(w_1, w_2, w_3)$. Ces même étapes dans le cas de $\mathrm{SO}(8)$ permettent de déterminer $O^*(w_1, w_2, w_3, w_4)$ si $w_4 \neq 0$, ainsi que les

$$O^*(w_1, w_2, w_3) + 2O(w_1, w_2, w_3, 0).$$

Quand ce dernier est ≤ 1 , on en déduit $O^*(w_1, w_2, w_3)$ et $O(w_1, w_2, w_3, 0) = 0$. Cela se produit tout le temps quand $w_1 \leq 26$ et c'est ce qui nous a permis de confirmer les calculs de [BFV11], qui eux permettent de déterminer $O^*(w_1, w_2, w_3)$ en général. Enfin, les étapes (a) et (b) pour $\mathrm{SO}(9)$ conduisent à la détermination de $S(w_1, w_2, w_3, w_4)$!

3.6. Une ouverture : structure du groupe de Langlands de \mathbb{Z} motivique.

Je voudrais terminer cette partie en revenant un peu sur ce groupe conjectural, qui est au coeur des considérations précédentes.

Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ le groupe conjectural de Langlands, que l'on verra à la Kottwitz [KOT84] comme un groupe topologique localement compact muni de classes de conjugaison d'homomorphismes de groupes topologiques $\iota_v : W'_{\mathbb{Q}_v} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$, où v parcourt les places de \mathbb{Q} (on rappelle que $W'_{\mathbb{Q}_v}$ est le groupe de Weil-Deligne de \mathbb{Q}_v sous sa forme $\mathrm{SU}(2)$, cf. §1.1). Une construction conjecturale axiomatique de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ a notamment été proposée par Arthur dans [ART02]. Désignons par $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ le plus grand quotient de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ dans lequel :

- (i) (conducteur 1) l'image de $\iota_p(I_p \times \mathrm{SU}(2))$ est triviale pour tout nombre premier p , I_p désignant le groupe d'inertie de $W_{\mathbb{Q}_p}$,
- (ii) (essentielle algébricité) l'image de $\iota_\infty(Z(W_{\mathbb{R}}))$ est centrale, où $Z(W_{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^*$ désigne le centre de $W_{\mathbb{R}}$.

Pour tout entier $n \geq 1$ les classes d'isomorphie de représentations irréductibles continues $\rho : \mathcal{L}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sont en bijection avec les représentations automorphes cuspidales π de $\mathrm{GL}(n)$ sur \mathbb{Q} qui sont non ramifiées à toutes les places finies et telles que $\pi \otimes |\cdot|^s$ est algébrique pour un certain $s \in \mathbb{C}$ (§1.2). Le lecteur voulant vérifier cette affirmation observera que d'après le lemme de pureté de Clozel, si π est une représentation automorphe algébrique cuspidale de $\mathrm{GL}(n)$ sur \mathbb{Q} , alors $Z(W_{\mathbb{R}})$ agit par des scalaires dans $L(\pi_\infty)$.

L'épimorphisme norme $|\cdot| : \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ se factorise par $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ et induit un isomorphisme $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$. De plus, $|\cdot|$ admet une section centrale canonique au dessus de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ par la condition (ii). On dispose donc d'un isomorphisme canonique ("décomposition polaire")

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$$

où $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1 = \{g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, |g| = 1\} \simeq \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}/\iota_\infty(\mathbb{R}_{>0})$, de sorte que le groupe parfait $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$ paramètre aussi les π comme plus haut de caractère central trivial.

Une structure supplémentaire importante que $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$, identifié à $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}/\iota_\infty(\mathbb{R}_{>0})$, hérite de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$, est la collection des ι_v . D'une part, si $W_{\mathbb{R}}^1$ désigne le sous-groupe des éléments de $W_{\mathbb{R}}$ de norme 1, i.e. une extension de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par \mathbb{S}^1 , on dispose enfin d'une classe de conjugaison canonique $\iota_\infty : W_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$. La classe de conjugaison de cocaractères induite

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$$

est particulièrement importante ("cocaractère de Hodge"). D'autre part, on dispose pour chaque premier p , d'une classe de conjugaison de Frobenius dans $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$. On conjecture depuis Sato, Tate et Langlands qu'elles sont équi-réparties dans l'espace des classes de conjugaison de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$ muni de sa mesure de probabilité invariante (voir aussi l'exposé de Serre [SER68, Ch. 1, appendice]). Ce dernier apparaît donc comme le groupe de Sato-Tate universel pour les "motifs de conducteur 1".

Concrètement, si ρ et π se correspondent comme plus haut, alors le groupe compact $\rho(\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1)$ est aussi le groupe de Sato-Tate conjectural de π , nous le noterons \mathcal{L}_π . Par définition, c'est donc un sous-groupe compact connexe et irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bien défini modulo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -conjugaison.

On peut démontrer que le groupe $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$ est compact, connexe, et même simplement connexe. La compacité est en effet essentiellement dans les axiomes, la connexité est un analogue automorphe du théorème de Minkowski se déduisant des formules explicites de Weil (Serre, Mestre [MES86]), et la simple connexité a été discutée au §3.5.3 (voir aussi [ART02]). C'est donc un produit direct de groupes de Lie compacts connexes, simplement connexes, quasi-simples (en quantité dénombrable).

À ma connaissance, on ne connaît pas actuellement la structure exacte de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$. Une conjecture naïve, quoiqu'assez naturelle, est d'espérer que tous les groupes de Lie compacts, connexes, parfaits, et simplement connexes (mais pas forcément quasi-simples)

sont facteurs direct de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$. Par manque d'arguments totalement probants je la pose ici comme une question.

QUESTION 3.7. *Est-ce que tout groupe de Lie compact, connexe, égal à son groupe dérivé, et simplement connexe, est facteur direct de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$?*

Bien que je n'ai pas trouvé de trace de cette question dans la littérature, elle est probablement du folklore, et au moins assez proche de questions que posent Serre dans [SER94]. L'existence d'une infinité de formes modulaires paraboliques propres et normalisées pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ montre par exemple que $\mathrm{SU}(2)^m$ est facteur direct de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^1$ pour tout $m \geq 1$.

Plus généralement, les résultats de ce chapitre montrent que la question ci-dessus admet une réponse affirmative pour les groupes dont les facteurs simples sont de type $A_1, B_2, G_2, B_3, C_3, C_4$ et D_4 . Mieux, pour chaque groupe quasi-simple H de ce type, nous donnons le nombre des π tels que $\mathcal{L}_{\pi} \simeq H$ et dont le cocaractère de Hodge est un cocaractère régulier donné quelconque de H .

Il me semble qu'il ne devrait pas être trop difficile de démontrer que la question admet une réponse affirmative plus généralement pour les groupes H dont les facteurs simples ne sont ni de type A_n ou D_{2n+1} avec $n > 1$, ni de type E_6 , autrement dit pour les H de centre un 2-groupe abélien élémentaire. C'est quelque chose que j'aimerais vérifier dans un futur proche. Le point est que sous cette condition, -1 est un élément dans le groupe de Weyl de H et donc le \mathbb{Z} -groupe semisimple G de Chevalley de dual de Langlands le complexifié de H a la propriété que $G(\mathbb{R})$ admet des séries discrètes.

La vraie question intéressante me semble plutôt de construire des facteurs de type A_n, D_{2n+1} avec $n > 1$, ou de type E_6 . Je ne connais aucun π tel que \mathcal{L}_{π} est de ce type. Seul le cas du type A_2 a été étudié à ma connaissance, par Ash et Pollack dans [AP08]. Dans le langage adopté ici, ces auteurs ont cherché des π algébriques de conducteur 1 telles que $\mathcal{L}_{\pi} \simeq \mathrm{SU}(3)$. Leurs cocaractères de Hodge sont de la forme $u \mapsto (u^{2k}, 1, u^{-2k})$ avec k entier. Il est remarquable que ces auteurs n'aient trouvé aucun tel π pour $|k| \leq 121$, ce qui était contraire à leurs attentes. Ils ont alors avancé l'hypothèse qu'il n'existerait aucun tel π , ce qui est contraire à la croyance naïve avancée plus haut. Comme le font remarquer ces auteurs, il est remarquable que si l'on exclut l'hypothèse de conducteur 1, le problème analogue admet des solutions pour des petits k , comme l'ont montré van Geemen et Top dans [VBT94] (voir aussi [DR04]), qui donnent des exemples où le conducteur est une puissance de 2 et où $k = 1$.

4. Quelques cas des conjectures de Bloch-Kato

Dans cette dernière partie, je vais exposer de manière très succincte les théorèmes principaux de mon livre avec Bellaïche [BC09, Ch. 8,9]. Ces résultats sont dans la lignée des travaux de Ribet [RIB76] sur la réciproque du fameux théorème de Herbrand, ou encore de la démonstration par Mazur-Wiles [MW84] de la conjecture principale d'Iwasawa, et plus particulièrement de l'approche de Wiles [WIL90]. Je renvoie à l'article d'exposition de Mazur [MAZ11] pour un tour d'horizon de ce sujet.

Soit F un corps quadratique imaginaire et soit π une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière de GL_n sur F telle que²³ $\pi^\vee \simeq \pi^c | \cdot |^{-1}$. Soit $L(s, \pi)$ La fonction L de π , qui est une fonction entière de s , et soit $L^*(s, \pi)$ sa fonction L complétée à la place archimédienne (voir [SER69],[TAT79],[COG00]). Elle satisfait

$$L^*(s, \pi) = \varepsilon(s, \pi) L^*(-s, \pi).$$

En particulier, le facteur $\varepsilon(\pi) := \varepsilon(0, \pi)$ est un signe ± 1 . Sous nos hypothèses, $L(s, \pi)$ et $L^*(s, \pi)$ ont même ordre d'annulation en 0, ce signe dicte donc la parité de l'ordre d'annulation de $L(s, \pi)$ en $s = 0$.

Bien que la représentation π ne soit pas tout-à-fait polarisée au sens du §1, elle le devient après torsion par un caractère de Hecke algébrique de F bien choisi, de sorte que l'on peut également lui associer des représentations galoisiennes $\rho_{\pi, \iota}$. Fixons un nombre premier p ainsi qu'une réalisation p -adique $\rho_{\pi, \iota}$ de π . Bloch et Kato définissent dans [BK90] un sous-espace de dimension finie

$$H_f^1(F, \rho_{\pi, \iota}) \subset H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), \rho_{\pi, \iota}).$$

Ce sous-espace est par définition celui paramétrant les classes d'extensions U de la représentation triviale 1 par $\rho_{\pi, \iota}$, dont la restriction U_v à un groupe de décomposition en v a les propriétés suivantes : $U_v^{I_v} \rightarrow 1$ est surjectif si v ne divise pas p , I_v désignant le groupe d'inertie en v , et $D_{\mathrm{cris}}(U_v) \rightarrow D_{\mathrm{cris}}(1)$ est surjectif si $v|p$.

Les conjectures de Bloch et Kato [BK90], reprises par Fontaine et Perrin-Riou dans [FP94], sont des généralisations d'une variante ... de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.²⁴ Je renvoie à [BC09, Ch. 5] pour une discussion détaillée de ces conjectures dans le contexte adopté ici.

CONJECTURE 4.1. (*Bloch-Kato*) $\mathrm{ord}_{s=0} L(s, \pi) = \dim H_f^1(F, \rho_{\pi, \iota})$.

En particulier, la version très affaiblie ci-dessous devrait être également vraie.

CONJECTURE 4.2. (*Conjecture du signe*) Si $\varepsilon(\pi) = -1$ alors $H_f^1(F, \rho_{\pi, \iota}) \neq 0$.

Pour résumer mes travaux avec Bellaïche, nous pouvons dire que nous avons fait un progrès certain vers la conjecture du signe, et un tout petit progrès vers la conjecture de Bloch-Kato.

²³On se place donc en "poids motivique -1 ".

²⁴Elles entraînent la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer "modulo" la finitude du groupe de Tate-Shafarevich.

Commençons par décrire brièvement notre résultat concernant la conjecture du signe. Nous faisons d'abord les hypothèses supplémentaires suivantes :

- (i) $n \not\equiv 0 \pmod{4}$,
- (ii) p est décomposé dans F et π est non ramifiée aux places divisant p ,
- (iii) les entiers $p_{i,\sigma}$ associés à π_∞ (voir §1 Ch. 1) sont différents de 0 et 1,
- (iv) si v est une place finie non décomposée de F telle que π_v est ramifiée, alors π_v est une série principale suffisamment régulière au sens de [BC09, §9.2.1].

Nous avons également deux autres hypothèses importantes, que l'on note $AC(\pi)$ et $Rep(n+2)$ *loc.cit.*, et que je décris maintenant brièvement. Sous l'hypothèse (i), il existe une forme hermitienne sur F^{n+2} relative à F/\mathbb{Q} qui est définie positive sur \mathbb{R} et d'indice $[n/2 + 1]$ à toutes les places finies de \mathbb{Q} , notons $U(n+2)$ son \mathbb{Q} -groupe unitaire. L'hypothèse $Rep(n+2)$ est la généralisation au groupe $U(n+2)$ des résultats de Labesse [LAB11] (qui suppose "pour simplifier" que son groupe unitaire est défini sur un corps totalement réel de degré ≥ 2) concernant le changement de base des représentations automorphes de $U(n+2)$ à $GL(n+2)$ sur F . Cette hypothèse assure notamment l'existence de représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes de $U(n+2)$.

L'hypothèse $AC(\pi)$ est un cas particulier des conjectures d'Arthur [ART89]. Elle affirme l'existence d'une certaine représentation automorphe π' de $U(n+2)$, choisie "aussi peu ramifiée que possible" (je renvoie à [BC09, §6.9] pour la recette précise), dont la représentation galoisienne $\rho_{\pi',\iota}$ vaut

$$\rho_{\pi,\iota} \oplus 1 \oplus \omega$$

après torsion convenable par un caractère, ω désignant le caractère cyclotomique p -adique. Les conjectures générales d'Arthur, tout-à-fait dans l'esprit de celles déjà discutées dans mes travaux avec Lannes et avec Renard aux §2 et 3 de ce chapitre, montrent qu'une telle représentation π' doit exister précisément sous l'hypothèse $\varepsilon(\pi) = -1$.

Le résultat suivant est démontré dans le chapitre 8 de mon livre avec Bellaïche.

THÉOREME 4.3. *Supposons que π satisfasse les conditions (i) à (iv), ainsi que les hypothèses $AC(\pi)$ et $Rep(n+2)$. Alors la conjecture du signe est vraie pour π .*

Quelques remarques s'imposent. Tout d'abord, lorsque $n = 1$ les hypothèses (i), (iv) sont trivialement vérifiées, ainsi que $AC(\pi)$ et $Rep(3)$ d'après Rogawski [ROG90], [LR92]. Le théorème dans ce cas était le résultat principal de mon article avec Bellaïche [BC04]. Il était d'ailleurs déjà connu ! car il se déduit des résultats bien antérieurs de Rubin sur la "conjecture principale d'Iwasawa" pour les corps quadratiques imaginaires [RUB91]. L'intérêt de [BC04] consistait donc plutôt dans l'approche que dans le résultat.

L'idée de la démonstration, pour n général, est de construire des congruences modulo une puissance de p entre la représentation π' de $U(n+2)$ et des représentations automorphes π'' de représentation galoisienne irréductible, soit encore de déformer irréductiblement la représentation galoisienne

$$(10) \quad \rho_{\pi,\iota} \oplus 1 \oplus \omega.$$

Il s'agit ensuite de comprendre comment étendre "l'argument de réseaux de Ribet" [RIB76] dans ce contexte pour produire une extension globalement non triviale de 1 par $\rho_{\pi,\iota}$ ayant les propriétés locales requises.

Cette stratégie avait été menée à bien par Bellaïche dans sa thèse [BEL02], toujours quand $n = 1$. Il construit ses congruences par la méthode "d'augmentation du niveau" de Ribet et observe qu'un contrôle soigneux de la ramification en toutes les places permet de construire une extension avec toutes les propriétés désirées. Le fait que F soit quadratique imaginaire plutôt que CM quelconque joue un rôle très sérieux dans son argument, et explique aussi cette hypothèse ici, car il doit à un moment éliminer la possibilité de construire à la place une unité d'ordre infinie de \mathcal{O}_F (par la théorie de Kummer!), ce qui n'existe pas si F est imaginaire. Le problème est l'apparition du caractère cyclotomique dans (10), qui n'a pas d'analogue chez Ribet, qui travaille avec des séries d'Eisenstein plutôt que des représentations automorphes discrètes non-tempérées. Une faiblesse de l'approche de Bellaïche est qu'elle ne construit l'extension cherchée que modulo certains nombres premiers, et donc n'obtient pas tout-à-fait l'énoncé ci-dessus même quand $n = 1$.

Un second progrès substantiel a été alors réalisé par Skinner et Urban [SU02], [SU06A], dans un contexte proche où le \mathbb{Q} -groupe $U(3)$ est remplacé par $\mathrm{Sp}(4)$. Ces auteurs, inspirés sans doute par la méthode de Wiles [WIL90], montrent comment produire des extensions "en caractéristique 0" en utilisant des familles de formes modulaires à la Coleman comme argument de déformation. Les travaux de Kisin [KIS03] que nous avons rappelés au §3.21 Ch. 1 jouent alors un rôle important dans l'établissement des propriétés en p des extensions construites.

Dans l'article [BC04], nous mettions ensemble les deux approches ci-dessus pour démontrer le cas $n = 1$ du Théorème 4.3, à l'aide notamment de mon travail antérieur [CHE04] sur les familles de Coleman pour $U(3)$ (§3.15 Ch. 1). Le théorème ci-dessus est une généralisation de cette méthode. Les difficultés principales sont d'ordre technique. Nous ne supposons pas, notamment, que $\rho_{\pi,\iota}$ est irréductible. En revanche, comme le lecteur l'aura remarqué, notre travail est soumis à un certain nombre d'autres d'hypothèses!

Il y a lieu cependant de ne pas être trop pessimiste sur ces hypothèses. Tout d'abord, les travaux récents d'Arthur [ART11], et notamment leurs généralisations par Mok [MOK12] au cas des groupes unitaires, autorisent un certain optimisme sur $\mathrm{AC}(\pi)$. De plus, il semblerait que $\mathrm{Rep}(n+2)$ soit connue des spécialistes (voir par exemple les travaux de Morel [MOR10]). L'hypothèse (i) d'apparence importante pourrait sans doute être contournée via d'autres cas des conjectures d'Arthur (cela vient de ce que l'on n'a pas besoin de supposer que $\rho_{\pi,\iota}$ est irréductible dans notre argument). L'hypothèse (ii) est faite par commodité et l'hypothèse (iv) nous a été nécessaire principalement pour formuler de manière non ambiguë $\mathrm{AC}(\pi)$ aux places ramifiées dans F : on pourrait vraisemblablement procéder maintenant autrement étant donné les résultats récents de Mok suscités sur la conjecture de Langlands locale pour les groupes unitaires. Enfin, Bellaïche a compris dans [BEL12B] comment s'affranchir de (iii) également. Je voudrais rajouter pour finir cette interminable discussion qu'il ne sera peut-être pas nécessaire de faire tout

cela, car Skinner et Urban ont annoncé à l'I.C.M. [SU06B] une généralisation de notre théorème.

Je voudrais terminer ce mémoire en expliquant le second résultat principal de notre livre, qui est un raffinement du résultat précédent. Je suppose désormais que $\pi = \chi$ est un caractère de Hecke algébrique du corps quadratique imaginaire F tel que $\chi(z\bar{z}) = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{A}_F^*$, et tel que $\chi_\infty(z) = z^q \bar{z}^{1-q}$ avec $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Je suppose aussi que le nombre premier p est décomposé dans F et que χ est non-ramifié en p .

On peut alors considérer la variété de Hecke unitaire

$$\mathcal{E}_3 \subset Y_3^\perp \times \mathcal{T}^3$$

que nous avons introduite au §3.15 Ch. 1. Elle est associée au groupe $U(3)$ relativement à F défini ci-dessus et à l'ensemble S des nombres premiers en lesquels soit F , soit χ , est ramifié. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, sous l'hypothèse $\varepsilon(\chi) = -1$ l'assertion AC(χ) démontrée par Rogawski assure l'existence d'une représentation automorphe π' de $U(3)$ "minimalement ramifiée" et telle que $\rho_{\pi', \iota}$ soit à une torsion près la représentation

$$\chi_\iota \oplus 1 \oplus \omega,$$

où χ_ι est la réalisation ι -adique de χ . Fixons v l'une des deux places de F divisant p et choisissons en cette place le raffinement de π' tout particulier suivant : à la même torsion près que ci-dessus c'est le raffinement $\Phi_v = (1, *, p^{-1})$. La représentation raffinée $(\pi', \{\Phi_v\})$ nous fournit donc un point

$$x \in \mathcal{E}_3$$

ainsi que nous l'avons expliqué au §3.15 du Chapitre 1. Nous l'appelons le *point d'Arthur anti-ordinaire* associé à χ . L'hypothèse de ramification minimale dans le choix de π' assure que ce point appartient également au sous-espace

$$\mathcal{E}_3^{\min} \subset \mathcal{E}_3$$

obtenu en prenant l'adhérence Zariski des points automorphes raffinés qui paramétrisent les représentations Π de GL_3 sur F de paramètre de Langlands $L(\Pi_u)$ trivial sur le facteur $\mathrm{SU}(2)$ pour toute place finie u de F . Des arguments de K -type en théorie des variétés de Hecke montrent que ce sous-espace est encore d'équidimension 3, autrement dit que c'est une réunion de composantes irréductibles de \mathcal{E}_3 . Nous démontrons alors le résultat suivant [BC09, Ch. 9].

THÉOREME 4.4. *On suppose $\varepsilon(\chi) = -1$. Soit $x \in \mathcal{E}_3^{\min}$ le point d'Arthur anti-ordinaire associé à χ . Soit t la dimension de l'espace tangent de \mathcal{E}_3^{\min} en x et soit $h = \dim H_f^1(F, \chi_\lambda)$. On a alors l'inégalité*

$$t \leq \frac{(h+1)(h+2)}{2}.$$

En particulier $h \geq 1$, et si \mathcal{E}_3^{\min} n'est pas lisse en x alors $h \geq 2$.

À notre connaissance, ce type d'énoncé est le premier de la sorte. Il n'a notamment pas d'analogue en théorie d'Iwasawa. Notre démonstration consiste en une étude des différents lieux de réductibilité, au voisinage du point x , de la famille de pseudo-caractères

galoisien (locaux et globaux) portée par \mathcal{E}_3^{\min} . Nos résultats mentionnés au Chapitre 1 §2.2 et §3.21 y jouent un rôle important. Il n'est pas clair actuellement comment relier la géométrie de \mathcal{E}_3^{\min} en x aux fonctions L (vraisemblablement p -adiques), encore moins à la conjecture exacte de Bloch-Kato, qui rappelons-le n'est même pas connue dans ce cas particulier. Il serait notamment intéressant de savoir, par exemple par des calculs dans des cas concrets, s'il faut s'attendre à ce que la réciproque de la dernière assertion du théorème soit également vraie!

Bibliographie

- [ADA11] J. Adams, *Discrete series and characters of the component group*, dans [GRFA11, Ch. 4.2].
- [ABV92] J. Adams, D. Barbasch and D. Vogan, *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics 104, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin (1992).
- [AJ87] J. Adams & J. Johnson, *Endoscopic groups and packets of non-tempered representations*, Compositio Mathematica, 64 no. 3, 271–309 (1987).
- [AMI80] S. A. Amitsur, *On the characteristic polynomial of a sum of matrices*, J. Linear and Multilinear Algebra 8, 177–182 (1980).
- [ART88] J. Arthur, *The invariant trace formula II. Global theory*, J. Amer. Math. Soc. 1, 501–554 (1988).
- [ART89] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations : Conjectures*, in *Orbites unipotentes et représentations II : Groupes p -adiques et réels*, Astérisque 171–172 (1989).
- [ART02] J. Arthur, *A note on the automorphic Langlands group*, Canad. Math. Bull. Vol. 45 (4), 466–482 (2002).
- [ART04] J. Arthur, *Automorphic representations of $\mathrm{GSp}(4)$* , dans *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, 65/81, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore (2004).
- [ART05] J. Arthur, *An introduction to the trace formula*, dans *Harmonic analysis, the trace formula and Shimura varieties*, A.M.S., Clay Math. Institute (2005).
- [ART11] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic groups*, disponible à l'adresse <http://www.claymath.org/cw/arthur/>.
- [AC89] J. Arthur & L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Princeton university press (1989).
- [ART69] M. Artin, *On Azumaya algebras and finite-dimensional representations of rings*, J. Algebra 11, 532–563 (1969).
- [AP08] A. Ash & D. Pollack, *Everywhere unramified automorphic cohomology for $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$* , Int. Journal of Number Theory 4, 663–675 (2008).
- [AS97] A. Ash & G. Stevens, *p -adic deformations of cohomology classes of subgroups of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$* , Journées Arithmétiques, (Barcelona, 1995) Collect. Math. 48 no. 1-2, 1–30 (1997).
- [AS00] A. Ash & G. Stevens, *p -Adic deformations of cohomology on $\mathrm{GL}(n)$: the non-ordinary case*, preprint non publié, disponible à l'adresse <http://math.bu.edu/people/ghs/research.d/> (2000).
- [AS01] M. Asgari & R. Schmidt, *Siegel modular forms and representations*, Manuscripta math. 104, 173–200 (2001).
- [BBC07] T. Banica, J. Bichon & G. Chenevier, *Graphs having no quantum symmetry*, Ann. Inst. Fourier 57, 955–971 (2007).

- [BLGGT12] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty & R. Taylor, *Local-global compatibility for $\ell = p$, I & II*, prépublications (2012).
- [BEL02] J. Bellaïche, *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*, thèse de l'université Paris 11 (2002).
- [BEL12a] J. Bellaïche, *Pseudodeformations*, Math. Z. 270, 1163–1180 (2012).
- [BEL12b] J. Bellaïche, *Ranks of Selmer groups in an analytic family*, Trans. Amer. Math. Soc. 364, 4735–4761 (2012).
- [BC04] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Formes non tempérées pour $U(3)$ et conjectures de Bloch-Kato*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 37/4, 611–662 (2004).
- [BC06] J. Bellaïche & G. Chenevier *Lissité de la courbe de Hecke de $GL(2)$ aux points Eisenstein critiques*, Journal Inst. Math. Jussieu vol. 5.2 (2006).
- [BC09] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque 324, Soc. Math. France, 331 p. (2009).
- [BC11] J. Bellaïche & G. Chenevier, *The sign of Galois representations attached to automorphic forms for unitary groups*, Compositio Math. 147, 1337–1352 (2011).
- [BC05] J. Bellaïche, G. Chenevier, C. Khare & M. Larsen, *Converging sequences of p -adic Galois representations and density theorems*, Int. Math. Research Notices 59 (2005).
- [BER02] L. Berger, *Représentations p -adiques et équations différentielles*, Invent. Math. 148, 219–284 (2002).
- [BER08] L. Berger, *Équations différentielles p -adiques et (ϕ, N) -modules filtrés*, Représentations p -adiques de groupes p -adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ) -modules. Astérisque 319, 13–38 (2008).
- [BER11] L. Berger, *Trianguline representations*, Bulletin of the London Mathematical Society 43, no. 4, 619–635 (2011).
- [BeC10] L. Berger & G. Chenevier, *Représentations potentiellement triangulines de dimension 2*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux 22 no. 3, 557–574 (2010).
- [BeC08] L. Berger & P. Colmez, *Familles de représentations de de Rham et monodromie p -adique*, Astérisque 319, 303–337 (2008).
- [BFV11] J. Bergström, C. Faber & G. V. D. Geer, *Siegel modular forms of degree three and the cohomology of local systems*, arXiv preprint <http://lanl.arxiv.org/abs/1108.3731v2> (2011).
- [BeK11] T. Berger & K. Klosin, *On deformation rings of residually reducible Galois representations and $R=T$ theorems*, à paraître à Math. Annalen.
- [BK90] S. Bloch & K. Kato, *L -functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I., Birkhäuser Boston (1990).
- [BEN09] D. Benois, *A generalization of Greenberg's \mathcal{L} -invariant*, prépublication (2009).
- [BER96] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, première partie (version provisoire 1991), Prépublication de l'Inst. Rech. Math. Rennes (1996).
- [BOE01] G. Boeckle, *On the density of modular points in universal deformation spaces*, Amer. J. Math. 123, 985–1007 (2001).
- [BOE10] G. Boeckle, *Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of \mathbb{Q}_3* , dans *Représentations p -adiques de groupes p -adiques II*, Astérisque 330, 529-542 (2010).

- [BGR83] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert, *Non-archimedean analysis*, Springer Verlag, Grundlehren der math. wissenschaften 261 (1983).
- [BOR84] R. Borcherds, *The Leech lattice and other lattices*, Ph. D. Dissertation, University of Cambridge (1984).
- [BOR85] R. Borcherds, *The Leech lattice*, Proc. R. Soc. Lond. A 398, 365–376 (1985).
- [BFW98] R. Borcherds, E. Freitag & R. Weissauer, *A Siegel cusp form of degree 12 and weight 12*, J. reine angew. Math 494, 141–153 (1998).
- [BOR77] A. Borel, *Automorphic L-functions*, dans *Automorphic forms, representations, and L-functions*, P.S.P.M. 33 Part 2, conférence de Corvallis (1977).
- [BOU81] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV, V, VI*, Masson, Paris (1981).
- [BRE10] C. Breuil, *The emerging p-adic Langlands programme*, Proceedings of I.C.M. 2010, Vol. II, 203–230.
- [BCDT] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond & R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : wild 3-adic exercises*, J.A.M.S. 14, 843–939 (2001).
- [BUZ04] K. Buzzard, *On p-adic families of automorphic forms*, dans *Modular curves and abelian varieties*, 23–44, Progr. Math., 224, Birkhauser, Basel (2004).
- [BUZ07] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, in *L-functions and Galois representations*, 59–120, LMS Lecture Note Ser., 320, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).
- [BG11] K. Buzzard & T. Gee, *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations*, Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011, à paraître.
- [BuC05] K. Buzzard & F. Calegari, *Slopes of overconvergent 2-adic modular forms*, Compositio Math. 141, 591–604 (2005).
- [BuC06] K. Buzzard & F. Calegari, *The 2-adic eigencurve is proper*, Documenta Mathematica, Extra Vol., 211–232 (2006).
- [BuK05] K. Buzzard & L. Kilford, *The 2-adic eigencurve at the boundary of the weight-space*, Compositio Math. 141, 605–619 (2005).
- [CAL06] F. Calegari, *Eisenstein deformation rings*, Compositio Math. 142, 63–83 (2006).
- [CAL08] F. Calegari, *The Eigencurve is proper at integral weights*, Algebra and Number Theory 2, 209–215 (2008).
- [CG11] F. Calegari & T. Gee, *Irreducibility of automorphic Galois representations of $GL(n)$, n at most 5*, à paraître aux Annales de l’Institut Fourier.
- [CAR12a] A. Caraiani, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, à paraître à Duke Math. J.
- [CAR12b] A. Caraiani, *Monodromy and local-global compatibility for $\ell=p$* , prépublication arXiv :1202.4683.
- [CAR72] R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compositio Math. 25, 1–59 (1972).
- [CHE04] G. Chenevier, *Familles p-adiques de formes automorphes pour $GL(n)$* , Journal für die reine und angewandte Mathematik 570, 143–217 (2004).
- [CHE05] G. Chenevier, *Une correspondance de Jacquet-Langlands p-adique*, Duke math. journal 126 no. 1, 161–194 (2005).

- [CHE07] G. Chenevier, *On number fields with given ramification*, *Compositio Mathematica* 143 no. 6, 1359–1373 (2007).
- [CHE08a] G. Chenevier, *Quelques courbes de Hecke se plongent dans l'espace de Colmez*, *Journal of Number Theory* 128 no. 8, 2430–2449 (2008).
- [CHE08b] G. Chenevier, *The p -adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudo-representations over arbitrary rings*, prépublication (2008).
- [CHE08c] G. Chenevier, *Variétés de Hecke des groupes unitaires*, Cours Peccot, Collège de France (2008).
- [CHE09a] G. Chenevier, *Une application des variétés de Hecke des groupes unitaires*, article prévu pour le second tome du livre [GRFA11].
- [CHE09b] G. Chenevier, *Sur la variété des caractères p -adique du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p* , prépublication 2009.
- [CHE10] G. Chenevier, *Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p* , à paraître à *Math. Annalen*.
- [CHE11] G. Chenevier, *On the infinite fern of Galois representations of unitary type*, *Annales Scientifiques de l'É.N.S.* 44, 963–1019 (2011).
- [CHE12] G. Chenevier, *Sur les déterminants de dimension 2*, lettre à J.-P. Serre (2012).
- [CC09] G. Chenevier & L. Clozel, *Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales*, *Journal of the A.M.S.* 22 Vol 2, 467–519 (2009).
- [CH09] G. Chenevier & M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations*, article de 2009 initialement destiné au tome 2 du livre [GRFA11] mais au final soumis à publication en 2012.
- [CL11] G. Chenevier & J. Lannes, *Kneser neighbours and orthogonal Galois representations in dimensions 16 and 24*, *Algebraic Number Theory*, Oberwolfach Report 31/2011. Version plus complète à venir. Voir la page <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/niemeier/niemeier.html> pour une collection de tables.
- [CR08] G. Chenevier & D. Renard, *Characters of Speh representations and Lewis Carroll identity*, *Represent. Theory* 12, 447–452 (2008).
- [CR10] G. Chenevier & D. Renard, *On the vanishing of some non semisimple orbital integrals*, *Expositiones Math.* 28, 276–289 (2010).
- [CR11] G. Chenevier & D. Renard, *Level one algebraic cusp form of classical groups of small ranks*, prépublication disponible sur arXiv. Nombreuses tables disponibles à l'adresse <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/levelone.html>.
- [CC98] F. Cherbonnier & P. Colmez, *Représentations p -adiques surconvergentes*, *Invent. Math.* 133, 581–611 (1988).
- [CLO90] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité*, dans *Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions, Vol. I* (Ann Arbor, MI, 1988), *Perspect. Math.*, vol. 10, Academic Press, Boston, MA (1990).
- [CLO91] L. Clozel, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$* , *Publ. Math. I.H.É.S.* 73, 97–145 (1991).
- [CHL11a] L. Clozel, M. Harris & J.-P. Labesse, *Endoscopic transfert*, dans [GRFA11, Ch. I.5.2].
- [CHL11b] L. Clozel, M. Harris & J.-P. Labesse, *Construction of automorphic Galois representations I*, dans [GRFA11, Ch. I.5.3].

- [CHT08] L. Clozel, M. Harris & R. Taylor, *Automorphy for some ℓ -adic lifts of automorphic mod ℓ representations*, Pub. Math. I.H.É.S. 108, 1–181 (2008).
- [CL98] L. Clozel & J.-P. Labesse, *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*, appendice à *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, SMF, Astérisque (1998).
- [COL96] R. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. 124, 214–241 (1996).
- [COL97] R. Coleman, *p -adic Banach spaces & families of modular forms*, Invent. Math. 127, 417–479 (1997).
- [CM98] R. Coleman & B. Mazur, *The eigencurve*, dans *Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry* (Durham, 1996), London. Math. Soc. Lecture Notes 254, Cambridge univ. press (1998).
- [COL08] P. Colmez, *Représentations triangulines de dimension 2*, Astérisque 319, 213–258 (2008).
- [COL10a] P. Colmez, *Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 330, 281–509 (2010).
- [COL10b] P. Colmez, *Invariants L et dérivées de valeurs propres de Frobenius*, Astérisque 331, 13–28 (2010).
- [COL12] P. Colmez, *Le programme de Langlands p -adique*, E. C. M. Cracovie (2012).
- [COG00] J. Cogdell, *Notes on L -functions for $GL(n)$* , cours de l'école d'été *Automorphic Forms on $GL(n)$* , Trieste (2000). Disponible à l'adresse http://users.ictp.it/~pub_off/lectures/lns021/Cogdell/Cogdell.pdf.
- [CNP96] A. Cohen, G. Nebe & W. Plesken, *Cayley orders*, Compositio Math. 103, 63–74 (1996).
- [CON99] B. Conrad, *Irreducible components of rigid spaces*, Ann. Inst. Fourier 49, 473–541 (1999).
- [CON11] B. Conrad, *Reductive group schemes*, notes de l'école d'été SGA3 (Luminy, 2011), notes disponibles à l'adresse <http://math.stanford.edu/~conrad/papers/>.
- [CS99] J. Conway & N. Sloane, *Sphere packings, lattices, and groups*, 3 ed, Springer Verlag, Grundlehren der math. wiss. 290 (1999).
- [CS82] J. Conway & N. Sloane, *23 constructions of the Leech lattice*, Proc. R. Soc. Lond. vol. 381, p. 275–283 (1982).
- [CS83] M. Culler & P. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Annals of Math. 117, 109–146 (1983).
- [DCPRR05] C. De Concini, C. Procesi, N. Reshetikhin & M. Rosso, *Hopf algebras with trace and representations*, Invent. Math. 161, 1–44 (2005).
- [DEL68] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations ℓ -adiques*, Séminaire Bourbaki vol. 1968/69 Exposés 347–363.
- [DEM09] L. Dembele, *A non-solvable Galois extension of \mathbb{Q} ramified at 2 only*, Comptes Rendus Ac. Sciences 347, 3-4, 111–116 (2009).
- [DGV11] L. Dembele, M. Greenberg & J. Voight, *Nonsolvable number fields ramified only at 3 and 5*, Compositio Math. 147, 716–734 (2011).
- [DR04] M. Dettweiler & S. Reiter, *On three dimensional Galois representations*, prépublication disponible à l'adresse <http://www.zahlentheorie.uni-bayreuth.de/publications/three.pdf>.
- [DJO95] A.J. De Jong, *Crystalline and module Dieudonné theory via formal and rigid geometry*, Pub. Math. I.H.É.S. 82, 5–96 (1995).

- [DIE12] L. Dieulefait, *A non-solvable extension of \mathbb{Q} unramified outside 7*, *Compositio Mathematica* 148, 669–674 (2012).
- [DON92] S. Donkin, *Invariants of several matrices*, *Invent. Math.* 110, 389–410 (1992).
- [EME06] M. Emerton, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, *Invent. Math.* 164 no.1, 1–84 (2006).
- [EME09] M. Emerton, *p -adic families of modular forms*, *Séminaire Bourbaki* 1013 (2009-2010).
- [EME11] M. Emerton, *Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for GL_2 over \mathbb{Q}* , prépublication (2011).
- [ERO79] V. Erokhin, *Theta series of even unimodular 24-dimensional lattices* (in Russian), *Zap. Naučn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 86 (1979), 82–93. ; English translation in *J. Soviet Math.* 17 (1981), 1999–2008.
- [FER96] S. Fermigier, *Annulation de la cohomologie cuspidale de sous-groupes de congruence de $GL_n(\mathbb{Z})$* , *Math. Annalen* 306, 247–256 (1996).
- [FON90] J.-M. Fontaine, *Représentations p -adiques des corps locaux*, *The Grothendieck Festschrift Vol. II*, Birkhäuser PM 87 (1990).
- [FM95] J.-M. Fontaine, B. Mazur, *Geometric Galois representations*, in Coates, John; Yau, S.-T., *Elliptic curves, modular forms, & Fermat’s last theorem*, Series in Number Theory 1, Int. Press, Cambridge, MA, 41-78 (1995).
- [FP94] J.-M. Fontaine & B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L* , *Motives* (Seattle, WA, 1991), 599–706, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [FRO96] F. G. Frobenius, *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, *Ges. Abh. III* (1968) (S’ber. Akad. Wiss. Berlin 1343–1382).
- [GJ78] S. Gelbart & H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$* , *Annales Sci. É.N.S.* 11, 1–73 (1978).
- [GOL04] W. Goldman, *An exposition of results of Fricke and Vogt*, <http://arxiv.org/abs/math/0402103>.
- [GW98] R. Goodman & N. Wallach *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge U. Press, (1998).
- [GM92] F. Gouvêa & B. Mazur, *Families of modular eigenforms*, *Math. Comp.* 56 (1992), 793–806.
- [GRO96] B. Gross, *Reductive groups over \mathbb{Z}* , *Invent. math.* 124, 263–279 (1996).
- [GRO98a] B. Gross, *Modular forms mod p and Galois representations*, *Int. Math. Research Notices Vol. 1998*, 865–875 (1998).
- [GRO98b] B. Gross, *On the Satake isomorphism*, dans *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, A. Scholl & R. Taylor Ed., Cambridge university press (1998).
- [GRO99] B. Gross, *Algebraic modular forms*, *Israel J. Math.* 113, 61–93 (1999).
- [GRO08] B. Gross, *Odd Galois representations*, prépublication disponible à http://abel.math.harvard.edu/~gross/preprints/Galois_Rep.ps (2008).
- [GS98] B. Gross & G. Savin, *Motives with Galois group of type G_2 : an exceptional theta correspondence*, *Compositio Math.* 114, 153–217 (1998).

- [GRFA11] *Stabilization of the Trace Formula, Shimura Varieties, and Arithmetic Applications*, édité par L. Clozel, M. Harris, J.-P. Labesse et B.-C. Ngô, International Press (2011).
- [HAR08] G. Harder, *A congruence between a Siegel and an elliptic modular form*, dans *The 1-2-3 of modular forms* édité par J.H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder et D. Zagier. Springer universitext (2008).
- [HL04] M. Harris & J.-P. Labesse, *Conditional base change for unitary groups*, Asian J. Math. Vol. 8, 653–684 (2004).
- [HT01] M. Harris & R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies 151 (2001).
- [HSBT10] M.Harris, N. Shepherd-Barron & R.Taylor, *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy*, Annals of Math. 171, 779–813 (2010).
- [HEL12] E. Hellmann, *Families of trianguline representations and finite slope spaces*, Preprint 2012 disponible sur arXiv.
- [HEN83] G. Henniart, *La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$* , mémoire S.M.F. 11-12, 1–186 (1983).
- [HEN00] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique*, Invent. Math. 139, 439–455 (2000).
- [HEN10] G. Henniart, *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, I. M. R. N., 633-673 (2010).
- [HER98] L. Herr, *Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques*, Bull. Soc. Math. France 126 (1998).
- [HER01] L. Herr, *Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate*, Math. Ann. 320 (2001).
- [HID86] H. Hida, *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. 85, 545–613 (1986).
- [HID95] H. Hida, *Control theorems of p -nearly ordinary cohomology groups for $SL(n)$* , Bull. Soc. Math. France 123, 139–166 (1995).
- [HID04] H. Hida, *p -adic automorphic forms on Shimura varieties*, Springer Monographs in Mathematics (2004).
- [IKE01] T. Ikeda, *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$* , Ann. of Math. (2) 154, 641–681 (2001).
- [IKE06] T. Ikeda, *Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki’s conjecture*, Duke Math. J. 131, 469–497 (2006).
- [JS81] H. Jacquet & J. Shalika, *On Euler Products and the Classification of automorphic representations I,II*, American Journal of Mathematics 103, I. 499–558, II. 777–815 (1981).
- [JON11] O. Jones, *An analogue of the BGG resolution for locally analytic principal series*, Journal of Number Theory 131, 1616–1640 (2011).
- [KAT73] N. Katz, *p -adic properties of modular schemes and modular forms*, dans *Modular functions of one variable, III*, Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 69-190 (1972). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 350, Springer, Berlin (1973).
- [KED04] K. Kedlaya, *A p -adic local monodromy theorem*, Ann. of Math. 160, 93–184 (2004).
- [KED10] K. Kedlaya, *Slope filtrations and (φ, Γ) -modules in families*, cours au trimestre Galoisien à l’Institut Henri Poincaré, Paris (2010).

- [KL10] K. Kedlaya & R. Liu, *On families of (φ, Γ) -modules*, Algebra & Number Theory 4.7, 943–967 (2010).
- [KPX12] K. Kedlaya, J. Pottharst & L. Xiao, *Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ) -modules*, preprint 2012 disponible sur arXiv.
- [KHA07] C. Khare, *Modularity of Galois representations and motives with good reduction property*, J. Ramanujan math. soc. 22, 1–26 (2007).
- [KW09] C. Khare & J.-P. Wintenberger, *Serre’s modularity conjecture I & II*, Invent. Math. 178, 485–586 (2009).
- [KIN03] O. King, *A mass formula for unimodular lattices with no roots*, Mathematics of Computation 72 (242), 839–863 (2003).
- [KLS08] C. Khare, M. Larsen & G. Savin, *Functoriality and the inverse Galois problem*, Compositio Math. 144, 541–564 (2008).
- [KIS03] M. Kisin, *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math. 153, 373–454 (2003).
- [KIS08] M. Kisin, *Potentially semi-stable deformation rings*, J.A.M.S. 21, 513–546 (2008).
- [KIS09] M. Kisin, *The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2* , J.A.M.S. 22, 641–690 (2009).
- [KIS10] M. Kisin, *Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ representations*, Astérisque 330, 511–528 (2010).
- [KNA86] A. W. Knap, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Univ. Press (1986).
- [KNE57] M. Kneser, *Klassenzahlen definiter quadratischer formen*, Archiv der Math. 8, 241–250 (1957).
- [KNE67] M. Kneser, *Lineare relationen zwischen darstellungsanzahlen quadratischer formen*, Math. Ann. 168, 31–39 (1967).
- [KOS59] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the betti numbers of a complex simple Lie group*, American J. of Math. 81, 973–1032 (1959).
- [KOT84] R. Kottwitz, *Stable trace formula : Cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 no. 3, 611–650 (1984).
- [KOT88] R. Kottwitz, *Shimura varieties and λ -adic representations*, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Ann Arbor conference, Vol. I (1988).
- [KOT92] R. Kottwitz, *On the λ -adic representations associated to some simple shimura varieties*, Invent. Math. 108, 653–665 (1992).
- [KV95] A. Knap & D. Vogan, *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Univ. Press (1995).
- [LAB11] J.-P. Labesse, *Changement de base CM et séries discrètes*, dans [GRFA11, Ch. 5.1].
- [LAN67] R. Langlands, *Letter to André Weil*, <http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/functoriality.html> (1967).
- [LAN70] R. Langlands, *Problems in the theory of automorphic forms*, Springer Lecture Notes 170 (1970).
- [LAN73a] R. Langlands, *A little bit of number theory*, lettre à A. Weil <http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/functoriality.html> (1973).
- [LAN73b] R. Langlands, *The classification of representations of real reductive groups*, A.M.S. Math. Surveys and Monographs 31 (1973).
- [LAN78] R. Langlands, *L-functions and automorphic representations*, conférence I.C.M. Helsinki (1978).

- [LAN79] R. Langlands, *Ein Märchen*, in *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives*, dans P.S.P.M. 33, AMS Providence, 205–246 (1979).
- [LAN97] R. Langlands, *Where stands functoriality today ?*, A.M.S. P.S.P.M. 61, proceedings de la conférence d'Edinburgh (1997).
- [LR92] *The zeta function of Picard modular surfaces*, édité par R. Langlands et D. Ramakrishnan, publications C.R.M. Montreal (1992).
- [LN08] G. Laumon & B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, Annals of Math. 168, 477–573 (2008).
- [LEE67] J. Leech, *Notes on sphere packings*, Canad. J. Math. 19, 251–267 (1967).
- [LIU08] R. Liu, *Cohomology and duality for (ϕ, Γ) -modules over the Robba ring*, Int. Math. Res. Not. no. 3 (2008).
- [LIU12] R. Liu, *Triangulation of refined families*, preprint 2012 disponible sur arXiv.
- [LOE11] D. Loeffler, *Overconvergent algebraic automorphic forms*, Proc. London Math. Soc. 102, 193–228 (2011).
- [LM85] A. Lubotsky & A. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Memoirs of the A.M.S. 58 (1985).
- [MAZ63] B. Mazur, *Remarks on the Alexander polynomial*, disponible à l'url http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/alexander_polynomial.pdf.
- [MAZ87] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, in Galois groups over \mathbb{Q} , Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre eds, MSRI Publ. 16, 385–437 (1987).
- [MAZ97] B. Mazur, *An "infinite fern" in the universal deformation space of Galois representations*, Collect. Math. 48, No.1-2, 155–193 (1997).
- [MAZ00] B. Mazur, *The theme of p -adic variation*, Math. : Frontiers and perspectives, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax & B. Mazur Ed., AMS (2000).
- [MAZ11] B. Mazur, *How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields ?*, Bull. Amer. Math. Soc. 48, 155–210 (2011).
- [MAZ12] B. Mazur, *Primes, Knots and Po*, conférence en l'honneur du 80ème anniversaire de Valentin Poenaru (2012), notes disponibles à l'adresse <http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/Po8.pdf>.
- [MW84] B. Mazur & A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of \mathbb{Q}* , Invent. Math. 76, 179–320 (1984).
- [MES86] J.-F. Mestre, *formules explicites et minorations de conducteurs des variétés algébriques*, Compositio Math. 58, 209–232 (1986).
- [MEZ11] P. Mezo, *Character identities in the twisted endoscopy of real reductive groups*, <http://people.math.carleton.ca/~mezo/twisted2.pdf> (2011).
- [MIL02] S. Miller, *The highest-lowest zero and other applications of positivity*, Duke Math. J. 112, 83–116 (2002).
- [MIL86] J. Milne, *Arithmétique duality theorems*, Perspectives in Math. 1, Academic Press (1986).
- [MOE07] C. Moeglin, *Classification et changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p -adiques*, Pacific J. Math. 233, 159–204 (2007).
- [MW89] C. Moeglin & J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de $GL(n)$* , Ann. Sci. É.N.S. 22, 605–674 (1989).

- [MOK12] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups I & II*, prépublications disponibles à l'url <http://www.math.mcmaster.ca/~cpmok/>.
- [MOR10] S. Morel, *On the cohomology of certain non-compact Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies 173, Princeton University Press (2010).
- [MOR11] M. Morishita, *Knots and Primes*, Springer (2011).
- [NAK09] K. Nakamura, *Classification of two dimensional split trianguline representations of p -adic fields*, Compositio Math. 145 (4), 865–914 (2009).
- [NAK10] K. Nakamura, *Déformations of trianguline B -pairs and Zariski-density of two-dimensional crystalline representations*, prépublication (2010).
- [NAK11] K. Nakamura, *Zariski density of crystalline representations for any p -adic field*, prépublication (2011).
- [NYS96] L. Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Annalen 306, 257-283 (1996).
- [NV01] G. Nebe & B. Venkov, *On Siegel modular forms of weight 12*, J. reine angew. Math. 351, 49–60 (2001).
- [NSW00] J. Neukirch, A. Schmidt & K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren des mathematischen Wissenschaften 323 (2000).
- [NGO10] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. I.H.É.S. 111, 1–169 (2010).
- [NIE73] H.-V. Niemeier, *Definite quadratische formen der dimension 24 und diskriminante 1*, Journal of Number Theory 5 (2), 142–178 (1973).
- [PAP66] C.D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. 1–26 (1966).
- [PARI] PARI/GP, version 2.5.0, Bordeaux, 2011, <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.
- [PAS08] V. Paksunas, *The image of Colmez's Montreal functor*, prépublication (2008).
- [PP88] *Périodes p -adiques*, séminaire de Bures sur Yvette (1988), Astérisque 223 (1994).
- [POL98] D. Pollack, *Explicit Hecke actions on modular forms*, PhD. Thesis Harvard univ. (1998).
- [PR12] D. Prasad & D. Ramakrishnan, *Self-dual representations of division algebras and Weil groups*, American J. Math. 134, 749–772 (2012).
- [PY96] C. Poor & D. S. Yuen, *Dimensions of spaces of Siegel modular forms of low weight in degree four*, Bull. Austral. Math. Soc. 54 no. 2, 309–315 (1996).
- [PRO74] C. Procesi, *Finite dimensional representations of algebras*, Israel Journal of Mathematics 19, 169–182 (1974).
- [PRO76] C. Procesi, *Invariant theory of $n \times n$ matrices*, Advances in Math 19, 306–381 (1976).
- [PRO87] C. Procesi, *A formal inverse to the Cayley Hamilton theorem*, Journal of Algebra 107, 63–74 (1987).
- [PRO97] C. Procesi, *Deformations of representations*, Methods in ring theory (Levico Terme, 1997), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 198, Dekker, New York, (1998), 247–276.
- [RAL82] S. Rallis, *Langlands' functoriality and the Weil representation*, Amer. J. Math. 104 no. 3, 469–515 (1982).

- [RS87] C. Reutenauer & M.-P. Schützenberger, *A formula for the determinant of a sum of matrices*, Letters in Mathematical Physics 13, 299–302 (1987).
- [RIB76] K. Ribet, *A modular construction of unramified p -extensions of $\mathbb{Q}(\mu_p)$* , Invent. Math. 34, 151–162 (1976).
- [ROB63] N. Roby, *Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules*, Ann. Sci. É.N.S 80, 213–348 (1963).
- [ROB80] N. Roby, *Lois polynômes multiplicatives universelles*, C.R.A.S. Paris 290, 869–871 (1980).
- [ROG90] J. Rogawski, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of math. studies 123, Princeton univ. press (1990).
- [ROU96] R. Rouquier, *Caractérisation des caractères et pseudo-caractères*, J. Algebra 180, 571–586 (1996).
- [RUB91] K. Rubin, *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Invent. math. 103, 25–68 (1991).
- [SAT63] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields*, Publ. math. I.H.É.S. 18, 5–69 (1963).
- [SCH90] A. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. 100, 419–430 (1990).
- [SCA53] *Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes*, séminaire H. Cartan, tome 6, É.N.S. Paris (1953/54).
- [SCA57] *Fonctions automorphes*, séminaire H. Cartan, tome 10, É.N.S. Paris (1957/58).
- [SEL92] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), 367–385 (1992).
- [SEN93] S. Sen, *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*, Bull. Soc. math. France 121, 13–34 (1993).
- [SER62] J.-P. Serre, *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques*, Publ. Math. I.H.É.S. 12 (1962).
- [SER67] J.-P. Serre, *Une interprétation des congruences relatives à la fonction de Ramanujan*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 9 no. 1, 1–17 (1967-1968).
- [SER68] J.-P. Serre, *Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves*, W. A. Benjamin, New York (1968).
- [SER69] J.-P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, théorie des nombres 11 no. 2 (1969-70), 1–15.
- [SER70] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, P.U. F., Paris (1970).
- [SER73] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques*, dans *Modular functions of one variable, III*, Lecture Notes in Mathematics 350, Springer-Verlag, 191–268 (1973).
- [SER75] J.-P. Serre, *Valeurs propres des opérateurs de Hecke modulo ℓ* , *Journées Arithmétiques de Bordeaux* (1974), Astérisque S.M.F. 24-25, 109–117 (1975).
- [SER87] J.-P. Serre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Duke Math. Journal 54, 179–230 (1987).
- [SER94] J.-P. Serre, *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ -adiques*, Motives, P.S.P.M. 55, AMS Providence, RI (1994).
- [SER97] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Springer Lecture notes in Math. 5, édition 5 (1997).

- [SES77] C. S. Seshadri, *Geometric reductivity over arbitrary bases*, Adv. in Math. 26, 225–274 (1977).
- [SGA3] M. Demazur & A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1962-64 - Schémas en groupes - (SGA 3) - vol. 3*. Lecture notes in mathematics 153 (1970).
- [SKO92] N. Skoruppa, *Computations of Siegel modular forms of genus 2*, Mathematics of Computation 58, 381–398 (1992).
- [SHI11] S.-W. Shin, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Annals of Math. 173, 1645–1741 (2011).
- [SHA92] F. Shahidi, *Twisted endoscopy and reducibility of induced representations for p -adic groups*, Duke Math. J. 66, 1–41 (1992).
- [SHE82] D. Shelstad, *L -indistinguishability for real groups*, Math. Ann. 259, 385–430 (1982).
- [SHE08] D. Shelstad, *Examples in endoscopy for real groups*, notes d'exposés, Banff summer school and workshop on stable trace formula, Galois representations and Shimura varieties, 59 p. disponibles à l'adresse <http://andromeda.rutgers.edu/~shelstad/>.
- [SHE11] D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups I : geometric transfer with canonical factors*, disponible à l'adresse <http://andromeda.rutgers.edu/~shelstad/shelstadtemperedendoscopy1.pdf>.
- [SIK12] A. Sikora, *Character varieties*, Trans. Amer. Math. Soc 364, 5173–5208 (2012).
- [SU02] C. Skinner & E. Urban, *Sur les déformations p -adiques des formes de Saito-Kurokawa*, C.R.A.S. 335, 581–586 (2002).
- [SU06a] C. Skinner & E. Urban, *Sur les déformations p -adiques de certaines représentations automorphes*, Journal Inst. Math. Jussieu 5 (4) (2006).
- [SU06b] C. Skinner & E. Urban *Vanishing of L -functions and ranks of Selmer groups*, I.C.M. vol II, 473–500, Eur. Math. Soc., Zurich (2006).
- [SOR09] C. Sorensen, *A patching lemma*, à paraître dans le tome 2 du livre [GRFA11].
- [SWI73] H. Swinnerton-Dyer, *On ℓ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms*, Antwerp Conference, Springer Lectures Notes, 350 (1973).
- [TAI12] O. Taïbi, *Eigenvarieties for classical groups and complex conjugations in Galois representations*, prépublication arXiv <http://arxiv.org/abs/1203.0225>.
- [TAT71] J. Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. 12, 257–289 (1971).
- [TAT79] J. Tate, *Number theoretic background*, in Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. XXXIII Part 2, 3–26 (1979).
- [TAT93] J. Tate, *The non-existence of certain Galois extensions of \mathbb{Q} unramified outside 2*, in Arithmetic geometry (Tempe, AZ, 1993), Contemp. Math. 174, 153–156.
- [TAY91] R. Taylor, *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. 63, 281–332 (1991).
- [TW95] R. Taylor & A. Wiles, *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Math 141, 553–572 (1995).
- [TAY04] R. Taylor, *Galois representations*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 13, 73–119 (2004).
- [TAY08] R. Taylor, *Automorphy for some ℓ -adic lifts of automorphic mod ℓ representations. II*, Publ. Math. I.H.É.S. 108, 183–239 (2008).

- [TAY12] R. Taylor, *The image of complex conjugation in ℓ -adic representations associated to automorphic forms*, A.N.T. Vol. 6, 405–435 (2012).
- [TY07] R. Taylor & T. Yoshida, *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J.A.M.S. 20, 467–493 (2007).
- [TSU83] T. Tsushima, *An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$* , Proc. Japan Acad. 59 (1983).
- [TSU86] S. Tsuyumine, *Siegel modular forms of degree 3*, American Journal of Mathematics 108, 755–862 (1986).
- [URB11] E. Urban, *Eigenvarieties for reductive groups*, Annals of Math. 174, 1685–1784 (2011).
- [VAC04] F. Vaccarino, *On the invariants of matrices and the embedding problem*, preprint (2004), arXiv :math/0406203v1.
- [VAC08] F. Vaccarino, *Generalized symmetric functions and invariants of matrices*, Math. Z. 260, 509–526 (2008).
- [VAC09] F. Vaccarino, *Homogeneous multiplicative polynomial laws are determinant*, J. Pure Appl. Algebra 213, 1283–1289 (2009).
- [VEN80] B. Venkov, *On the classification of integral even unimodular 24-dimensional quadratic forms*, dans [CS99].
- [VBT94] B. van Geemen & J. Top, *A non-selfdual automorphic representation of $\mathrm{GL}(3)$ and a Galois representation*, Invent. Math. 117, 391–402 (1994).
- [VdG08] G. van der Geer, *Siegel modular forms and their applications*, The 1-2-3 of modular forms, 181–245, Universitext, Springer, Berlin (2008).
- [WAL08] L. Walling, *Action of Hecke operators on Siegel theta series II*, Int. J. Number Theory 4, 981–1008 (2008).
- [WAL97] J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. 105, 153–236 (1997).
- [WAL06] J.-L. Waldspurger, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu 5, 423–525 (2006).
- [WES04] T. Weston, *Unobstructed modular deformation problems*, American Journal of Mathematics 126, 1237–1252 (2004).
- [WIL88] A. Wiles, *On ordinary λ -adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. 94, 529–573 (1988).
- [WIL90] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. 131 (1990).
- [WIL95] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem*, Ann. of Math. 141, 443–551 (1995).
- [ZUB99] A. N. Zubkov, *Adjoint action invariants of classical groups*, Algebra and Logic 38 no 5, 549–584 (1999).