Représentations non ramifiées de GL_2 (corps local) et isomorphisme de Satake

(1)

plan :
I Généralités sur l'algèbre de Hecke non ramifiée/sphérique et les représentations nr/sphériques
II GL_2 : rappels sur ses décompositions et les mesures de Haar de certains s-gpes
III Induits de caractères de B à $G = GL_2(F)$
IV Isomorphisme de 佐武 (Satake)

On fixe un corps C de caract. nulle, ou plus généralement de car. première au procardinal des groupe profini K ci-dessous (Au III on le supposera contenir $\sqrt{q}$ où $q = \mathrm{card}(\mathcal{O}_F/m_F)$)

I

1) représentations lisses et admissibles : rappels

Soit G un gpe localement profini, càd $\exists$ s-gpe ouvert profini
càd $\exists$ syst fond de voisinages de 1 compacts ouverts (co)

fixons $\underset{co}{K \subset G}$.

def Une repr lisse de G est une représentation C-lin de G $G \to \mathrm{Aut}_C(V)$
tq $\forall v \in V, \exists K_v$ co tq $v = kv$ $\forall k \in K_v$ càd $V = \bigcup_{K' co} V^{K'}$

On a un foncteur $\mathrm{Rep}\, G \to \mathrm{Rep\ lisses}(G)$
$V \mapsto V^\infty := \bigcup_{K' co} V^{K'}$
adjoint à dte au foncteur d'oubli de la lissité (il n'est pas exact en général)

ex a) $C_c(G)$ = fcts cont $G \to C$ à support compact ; G agit par transl à dte
(si G non discret) $C_c(G)^\infty$ = fcts loc constants $G \to C$ à support compact. Notées $C_c^\infty(G)$

b) Un caractère $G \xrightarrow{\chi} C^\times$ est lisse ssi χ est continu (ssi $\mathrm{Ker}\,\chi$ ouvert)

Si V est une repr lisse de G, on note $V^\vee$ son dual lisse : $V^\vee = \mathrm{Hom}_C(V, C)^\infty$
(action de G par $\langle g\check{v}, v\rangle = \langle \check{v}, g^{-1}v\rangle$)

fait a) $(V^\vee)^K \simeq (V^K)^\vee$: la dualité commute aux K-inv.
// $V = V^K \oplus V(K)$ //

b) Si G/K est dénombrable on a :
- tf (comme $C[G]$-mod) $\Rightarrow$ dim dénombrable
- Supposons $C = \bar{C}$ indénombrable. lemme de Schur : $\mathrm{End}_G(V \text{ lisse irréd}) = C1_V$

// sinon $\mathrm{End}_G(\ ) = $ corps gauche contenant $C(X)$ mais irréd $\Rightarrow$ endo déterminé par son action sur un vecteur $v \neq 0$. Donc $\mathrm{End}_G(V)$ de $\dim_C \leq \dim_C V$ dén. //
($\dim_C$ indénombrable)

cor (sous ces hyp.) $Z(G)$ agit par un caractère, dit « caractère central »

rem lisse $\not\Rightarrow$ ½ simple si G compact mais pas en général.
En effet, $C_c^\infty(G)^G = 0$ si G non compact mais $\exists \int C_c^\infty(G) \to C \neq 0$ invariante à dte (Haar)
($\Rightarrow C_c^\infty(G)$ pas ½ simple)

def repr admissible : $\dim_C V^{K'} < \infty$ $\forall$ co K'. ($\Rightarrow$ $\pi(f)$ a une trace) $f \in \mathcal{H}_K$
(Automatique pour les repr que nous allons considérer ds les parties suivantes)

digression | existence et unicité de la mesure de Haar pr les gps loc profinis

$\forall K'$ co, notons $C_c^\infty(G)^{K'} = \{ f \in C_c^\infty(G),\ \delta(g)f = f\ \forall g \in K' \}$ $((\delta(g)f)(\delta(g)g') = f(g'))$
$\delta(g)(g') = g'g$

On a $K' \subset K'' (\subset K) \Rightarrow C_c^{\infty\, K''} \subset C_c^{\infty\, K'}$
et $C_c^\infty(G) = \bigcup C_c^{\infty\, K'}$ (limite)
δ droite, γ gauche
donc is. définir $\mu_{K'} \in \underbrace{C_c^\infty(G)^{K'\vee}}_{\langle \text{transl à gauche de } 1_{K'} \rangle}$ compatibles. ($\Rightarrow$ au plus une à scal près)

$$\mu_{K'}(f) := \frac{1}{(K : K')} \sum_{\bar{g} \in G/K'} f(\bar{g})$$

En particulier, μ est rationnelle pour ce choix.

2) Algèbre de Hecke sphérique et une équivalence de catégories

Posons $\mathcal{H}(G) = (C_c^\infty(G), *)$ C-algèbre (non unifère si G non compact)
convolution ; mes. Haar à gauche

C'est l'analogue de l'algèbre de gpe $C[G]$ pour les repr lisses : (coïncident si G fini !)

prop $\mathrm{Rep}_\ell(G) \to \mathcal{H}(G)\text{-mod}$
$\underset{\text{(lisse)}}{V} \mapsto \left(f \cdot v = \int f(g) gv\, dg = \mu(K_v) \sum_{G/K_v} f(g) gv \right)$
induit éq de catégories $\mathrm{Rep}_\ell(G) \to \{\mathcal{H}(G)\text{-mod non dégénérés}\}$ (càd $\forall v, \exists a$ $v = av$)

// quasi inverse : M $H(G)$ mod nd. $m \in M$. $\exists \underset{H}{\overset{\Uparrow}{a}}$ tq $m = am$

$\Rightarrow \exists K'_{co}$ $m = e_{K'} m$. En effet, $\exists K'$ tq a soit K'invariant donc $e_{K'}a = a$, où $e_{K'} = \frac{1}{\mu(K')} 1\!\!1_{K'}$. On pose alors, $\forall g$ $g m = \underbrace{(\mathrm{Dirac}_g * e_{K'})}_{\text{pdt ds } H} m$

On vérifie sans peine que cela est indép du choix de K' et induit une quasi-inverse. //

<u>déf</u> $H(G,K) := e_K H e_K \simeq C_c^\infty(G//K)$ = fcts loc constants bi K invariantes, à supp compact

C'est un anneau unifère, engendré comme $\mathbb{C}$-algèbre par les fcts caractéristiques de doubles classes $1\!\!1_{KgK}$ $\quad \mu(K) = 1$

<u>rem</u> $1\!\!1_{KgK} \cdot 1\!\!1_{Kg'K} = \sum c_{g,g'}(g'') 1\!\!1_{Kg''K}$ où, si l'on pose $KgK = \coprod_{i \in I} g_i K$, $Kg'K = \coprod_{j \in J} g_j' K$

$c_{g,g'}(g'') = \#\{(i,j)$, $g'' \in g_i K g_j' K\}$

le lemme suivant est extrêment utile :

<u>lemme</u> 1) le foncteur $V \mapsto V^K$ est exact

$\mathrm{Rep}_e(G) \to (\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ ou $H(G,K)$-modules$)$

2) Soit V lisse <u>irréd</u>. Alors, $V^K = 0$ ou est un $H(G,K)$-mod simple.

// 1) resulte de l'égalité $V^K = e_K V$: si $V \twoheadrightarrow V'$, $v \mapsto \overset{\Uparrow}{v'} \in V'^K$ alors $e_K v \mapsto v'$

2) Si $V^K \neq 0$ et $\underset{\underset{0}{\#}}{M} \subset V^K$ H_K-module on a $HM = V$ par irréd

donc $\underbrace{e_K \underbrace{HM}_{V}}_{V^K} = e_K \underbrace{H(e_K}_{H_K} M) = M$. //

rem (réciproque à 1)) : une suite $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est exacte <u>ssi</u> $\forall$ co K', $0 \to V'^{K'} \to V^{K'} \to V''^{K'} \to 0$ l'est

(résulte immédiatement de la lissité pour l'implication inverse à 1))

Il en résulte que $V \mapsto V^\vee$ est exact (car $V^{\vee K} = V^{K\vee}$)

En fait, on a mieux que 2) :

<u>proposition</u> $V \mapsto V^K$ induit une bijection entre :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{(classes d'isom de)}\\ \text{Représentations} \\ \text{lisses irréd} \\ \text{tq } V^K \neq 0\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{(classes d'isom de)}\\ H(G,K)\text{-mod} \\ \text{simples}\end{array}\right\}$$

<u>Rem</u> Si $G = GL_n(F)$ local, K = Iwahori

On a éq <u>catégories</u> $\{V^K \neq 0\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}H(G,K)\\ \text{mod nd}\end{array}\right\}$

// essentielle surjectivité : soit M un H_K-module simple.

Posons $N := H \underset{H_K}{\otimes} M$ et V la repr de G correspondante (via action de G par translation sur H)

On a $V^K = e_K V \cong M$. Le problème est que V n'est pas néc irréductible

$(e_K(h \otimes m) = (e_K h e_K) \otimes m)$

Soit $W \subset V$, on a $W^K \subset V^K = M$ donc $W^K = 0$ ou M. il est unique.

Considérons $W \subset V$ max tq $W^K = 0$ (Zorn). On vérifie sans peine que $V_M := V/W$ est irréductible (et $(V/W)^K = V^K/W^K = V^K = M$)

De plus V_M ne dép que de M : si $M \simeq M'$, $V \simeq V'$ envoie W sur W' //

3) <u>représentations sphériques et fcts (zonals) sphériques ds le cas abélien</u>

Hyp On suppose : G/K dénombrable
$H(G,K)$ abélien

<u>lemme</u> Cette seconde hyp est satisfaite dès qu'il existe un antiautom $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G^{op}$ tq $\varphi^2 = id$ et agissant trivialement sur les doubles classes : $\varphi(KgK) = KgK$.

// $(f_1 * f_2)(g) = (f_2^\varphi * f_1^\varphi)(\varphi(g))$ (où $f_1^\varphi(\cdot) = f_1(\varphi(\cdot))$)

$\int f_1(g'^{-1}) f_2(g'g)\, dg'$ $\qquad f_2 \qquad f_1$ $\qquad$ même double classe que g

$(f_2 * f_1)(g) = (f_2 * f_1)(\varphi(g))$

$\int f_1^\varphi(\varphi(g')^{-1}) f_2^\varphi(\varphi(g)\varphi(g'))\, dg' = \int f_2(\varphi_{g'}\varphi_g) f_1(\varphi_{g'^{-1}})\, dg' = \int f_2(g'\varphi(g)) f_1(g'^{-1})\, dg'$

$\int f(\varphi(g'))\, dg' = \int f(g')\, dg'$ (OPS $f = 1\!\!1_{KhK}$ et c'est trivial) //

<u>ex</u> $\underset{G}{GL_n(F)}$ $\underset{K}{GL_n(O)}$ $g \mapsto {}^t g$. Cartan : $K \backslash G / K = T \leftarrow$ diagonale

②

déf Une fonction sphérique sur G rel. à K est une fct $\underbrace{\varphi : G \to \mathbb{C}}_{\text{bi } K \text{ inv}}$ tq $\varphi(1)=1$ et satisfaisant les cond équivalents suivants :

(dual de $\mathcal{H}_K$)

(i) $\hat{\varphi} : \mathcal{H}_K \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f\varphi$ (« transformée de Fourier sphérique ») est un morphisme d'algèbres

(ii) $\forall f \in \mathcal{H}_K$, $\exists\, \lambda(f) \in \mathbb{C}$ tq $f * \varphi = \varphi * f = \lambda(f)\varphi$

(iii) $\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \int_K \varphi(g_1 k g_2)\, dk$

ex (vaseux) Soit $V \subset C^\infty(K\backslash G)$ sphérique. On a donc V^K de dim 1 (Schur) [modulo hyp sur $\mathbb{C}, \mathcal{H}$].

donc si $\exists\, \varphi \in V^K$ tq $\varphi(1) \neq 0 \in \mathbb{C}$ et $f\varphi = \lambda(f)\varphi$ $\forall f \in \mathcal{H}_K$

où $f \mapsto \lambda(f)$ déf. un morph d'algèbres. | OPS $\varphi(1)=1$ — on a alors

(cf $\mathrm{Ind}_B^{GL_2}(\chi \otimes \omega)$ en $\mathrm{III}\,2_1$)

rem (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$$\hat{\varphi}(f) = (\check{f} * \varphi)(1) \overset{(ii)}{=} \lambda(\check{f}) \quad \text{où} \quad \check{f}(g) = f(g^{-1})$$

$$\hat{\varphi}(f_1 * f_2) = \int f_2(g)\, \underbrace{(\check{f}_1 * \varphi)(g)}_{\lambda(\check{f}_1)\varphi}\, dg = \underset{\hat{\varphi}(f_1)}{\lambda(\check{f}_1)}\, \hat{\varphi}(f_2)$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii)

$$\hat{\varphi}(f_1 * f_2) = \iint \varphi(g_1 g_2) f_1(g_1) f_2(g_2)\, dg_1 dg_2 = \int f_1(g_1) f_2(g_2) \left(\int_K \varphi(g_1 k g_2)\, dk\right) dg_1 dg_2$$

À tte fct sphérique on peut associer une représentation sphérique

$$\varphi \rightsquigarrow V_\varphi := \{ f : G \to \mathbb{C},\ \exists\, n, g_1, \dots, g_n \in G,\ c_i \in \mathbb{C},\ f(\cdot) = \sum c_i \varphi(\cdot\, g_i) \}$$

fait V_φ est sphérique et $V_\varphi^K = \mathbb{C}\varphi$

// **lisse** si $f \in V_\varphi \leftarrow g_1 \dots g_n$ $\exists\, K'$ tq $\varphi(g') = \varphi(g' g_i^{-1} k g_i)$ $\forall i$ $\forall k \in K'$

donc $f \in V_\varphi^{K'}$

irréd si $f(g') \neq 0$, $\varphi = f(g')^{-1}(1_{Kg'} \cdot f)$

(car $\int_K f(gkg')\, dk = \varphi(g) f(g')$; cf (iii))

$V_\varphi^K = \mathbb{C}\varphi$: $\underset{f(g)}{\int f(gk)\, dk} = \varphi(g) f(1)$ //

Réciproquement,

Th (Ss hyp) Soit V une repr sphérique. Il existe une unique fct sphérique φ tq $V \simeq V_\varphi$

// Soit $\lambda : \mathcal{H}_K \to \mathbb{C}$ caractère correspondant à V (car V^K dim 1) :

$f v = \lambda(f) v$ $\forall v \in V^K$, $f \in \mathcal{H}_K$

$(V^\vee)^K$ est aussi de dim 1 donc $\exists\, \check{v} \in V^{\vee K}$ tq $\langle \check{v}, v \rangle = 1$

Posons $\varphi(g) := \langle \check{v}, gv \rangle$ ($\varphi(1) = 1$, bi K inv)

On a bien $\lambda(f) = \int f(g)\varphi(g)$ car $\lambda(f) = \langle \check{v}, f \cdot v \rangle$, $f\cdot v = \int f(g)\, gv\, dg$

L'application $v' \mapsto (g \mapsto \langle \check{v}, gv' \rangle)$, $V \longrightarrow V_\varphi$ induit un isomorphisme (exercice) //

II GL_2 (notations, décompositions, mesures de Haar)

F corps local, $\mathcal{O}$, π, q

1) $\underline{G} = GL_2$ $\quad G = \underline{G}(F)$ gpe topologique ($\subset F^4$) loc. profini

$\underline{B} = \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}$ $\quad K = \underline{G}(\mathcal{O}) \ni w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (compact)

$\underline{T} = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$

$\underline{U} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ (Iwahori ...)

rappels
- tt ss gpe compact de G est conjugué à un ssgpe de K (on ne s'en servira pas) (cf p.ex Serre, Lie groups and Lie algebras, p121)
- Cartan $\quad G = \coprod_{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{Z}} K \pi^\lambda K$ où $\pi^\lambda = \begin{pmatrix} \pi^{\lambda_1} & \\ & \pi^{\lambda_2} \end{pmatrix}$

rem importante : $g \in K\pi^\lambda K$ ssi $\begin{cases} v(\det(g)) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \min v(g_{ij}) = \lambda_2 \end{cases}$

$\boxed{\text{cor } \begin{pmatrix} \pi^\alpha & \pi^\gamma \\ & \pi^\beta \end{pmatrix} \in K\pi^\lambda K \text{ ssi } \begin{array}{l} \alpha+\beta = \lambda_1+\lambda_2 \\ \min\{\alpha,\beta,\gamma\} = \min\{\lambda_1,\lambda_2\} \end{array}}$

cor G/K dénombrable (car chaque dble classe $KgK = \coprod_{\text{finie}} g_i K$)

- Iwasawa $\quad G = BK$ $\quad$ // si $g = \begin{pmatrix} & \\ * & *' \end{pmatrix}$ et $* \neq 0$ (càd $\notin B$) OPS $*' | *$ (cf gw) et $g \begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{*}{*'} & 1 \end{pmatrix} \in B$ //

cor G/B compact ($\mathbb{P}^1(F)$) $\quad$ (cf B = stab drapeau standard)

$= TUK$ car $B = T \ltimes U$

(déc « NAK »)

- Bruhat

$G = B \cup \underbrace{BwB}_{\begin{pmatrix} * & * \\ \neq 0 & * \end{pmatrix}} \xleftarrow{\sim} \begin{array}{l} B \times U \\ b, u \mapsto bwu \end{array}$

2) mesures de Haar, formules intégrales.

caractères de GL_2 = $\chi \circ \det$ (car trivial sur SL_2). On en déduit que le
χ : $F^\times \to$

module $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$ est trivial ($\because$ χ_Δ est néc trivial sur $\det(F^\times) = F^{\times 2}$ (car $F^\times/F^{\times 2}$ finie, $F^\times/F^{\times 2} \to \mathbb{R}_{>0}$) $= 1$)

G est unimodulaire

(rappel) $\Delta_G(g) = \dfrac{\mu_\gamma(Xg)}{\mu_\gamma(X)} = \mathrm{mod}(x \mapsto g^{-1}xg)$ où $\mathrm{mod}\,\varphi$ tq $\mu_\gamma(\varphi(X)) = \mathrm{mod}(\varphi)\, \mu_\gamma(X)$

$\int f(gg')dg = \Delta(g')^{-1} \int f$

variante Tte rep de dim finie de G est de dim 1

// $\operatorname{Ker} \rho$ = ouvert (lissité) donc contient

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ax \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ aussi petit que l'on veut

gén de SL_2, avec $\begin{pmatrix} 1 & \\ x & 1 \end{pmatrix}$ donc

$\operatorname{Ker} \supset SL_2$ //

$GL_2(F)$ est unimodulaire, de m̂ que K (compact), T, U (ab.) (mesures tq $\mu_K(K) = \mu_T(T \cap K) = \mu_U(U \cap K) = 1$)

mais B ne l'est pas

déf $\quad \int_B f\, d_g b := \int_T \int_U f(tu)\, dt\, du$

C'est une mesure inv à gauche.

// $\int f(b'tu)\, dt\, du = \int f(\overbrace{u't'}^{b'} t u)\, dt\, du$

$= \int f(u'tu)\, dt\, du = \int f(tu)\, dt\, du$ //

(inv. dt) $\underbrace{t u' t}_{\tilde{u}} u$ $\quad$ (inv. du)

lemme $\quad \int f(bb')\, d_g b = \left|\frac{t_1'}{t_2'}\right| \int f(b)\, d_g b$ où $b' \mapsto \begin{pmatrix} t_1' & \\ & t_2' \end{pmatrix}$ ds $T = B/U$

En d'autres termes $\Delta_B(b') = \left|\frac{t_1'}{t_2'}\right|^{-1}$.

// $\int f(bb')\, d_g b = \int f(\underbrace{tub'}_{tt'\,t'^{-1}u\,t'\,u'})\, dt\, du$ $\quad b' = t'u'$

Il suffit donc de mq $\int_U \varphi(t'^{-1}u\,t')\, du = \left|\frac{t_1'}{t_2'}\right| \int \varphi$

or, $t'^{-1}u\,t' = \begin{pmatrix} 1 & t_1'^{-1} u\, t_2' \\ & 1 \end{pmatrix}$ //

Autres formules utiles :

$$\int_G f = \int_K \int_B f(bk)\, dk\, d_\gamma b = \iint f(kb)\, dk\, d_\gamma b$$
$$= \int_{T \cup K} f(tuk)\, dt\, du\, dk$$

Exercice (On rappelle qu'on cherche des caractères de $\mathcal{H}(G,K)$, cf I 3))

Les applications $\mathcal{H}(G,K) \to \mathcal{H}_\gamma(B, B(\mathcal{O}))$ et $\mathcal{H}_\gamma(B,B(\mathcal{O})) \to \mathcal{H}(T, T(\mathcal{O}))$

$f \mapsto f_{|B}$ $\qquad f \mapsto (t \mapsto \int f(tu)\,du)$

sont des morphismes d'anneaux

Solution peu éclairante :

- $$(f_1 * f_2)(b) = \int_G f_1(g') f_2(g'^{-1}b)\, dg' = \int_{KB} \underbrace{f_1(b'k')}_{f_1(b')} \underbrace{f_2(k'^{-1}b'^{-1}b)}_{f_2(b'^{-1}b)} dk'\, d_\gamma b'$$
$$= (f_{1|B} \underset{\gamma, B}{*} f_{2|B})(b)$$
(car $\mu(K) = 1$)

- notons provisoirement $f^\circ = t \mapsto \int f(tu)\,du$

$$(f_1^\circ \underset{T}{*} f_2^\circ)(t) = \int_T f_1^\circ(t') f_2^\circ(t'^{-1}t)\, dt' = \int_{t', u, u'} f_1(t'u) f_2(t'^{-1}tu')\, dt'\, du\, du'$$

$$(f_1 \underset{\gamma, B}{*} f_2)^\circ(t) = \int (f_1 \underset{\gamma,B}{*} f_2)(tu')\, du' = \int_{u', b} f_1(b) f_2(b^{-1}tu')\, du'\, d_\gamma b$$

$$= \int_{t', u, u'} f_1(t'u) f_2(\underbrace{u^{-1}}_{\tilde{u}} \underbrace{t'^{-1}t}_{\tilde{t}} u')\, dt'\, du\, du'$$

On utilise : $\int \varphi(\tilde{u}\tilde{t}u')\, du' = \int \varphi(\tilde{t}u')\, du'$ pour conclure //

III Induits de caractères de B à G

1) rappels sur les induits

G loc profini $\qquad W$ H-rep lisse / $\mathbb{C}$

$H \subseteq G$ fermé (donc loc profini)

déf (induction lisse) $\operatorname{Ind}_H^G W = \{$ fcts lisses $G \xrightarrow{f} W$ tq $f(hg) = hf(g)$ $\forall h \in H$, $\forall g \in G \}$

lisses : $\exists K_f$ tq $f(gk) = f(g)$ $\forall k \in K_f$

$= (\operatorname{Ind}$ usuelle$)^\infty$

Frobénius $\quad \operatorname{Hom}_G(V, \operatorname{Ind}_H^G W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_H(V_{|H}, W)$ via $\operatorname{Ind} W \to W$, $f \mapsto f(1)$

$(\operatorname{Ind} = i_* W)$

déf' $\quad \operatorname{ind}_H^G = \ldots$ à support compact ds $H\backslash G$

Si H est ouvert on a $W \to \operatorname{ind}_H^G W$

$w \mapsto \begin{pmatrix} h \mapsto hw \\ 0 \text{ ailleurs} \end{pmatrix}$

$(\operatorname{ind} = i_!)$

Frobénius' $\quad \operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind} W, V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_H(W, V_{|H})$

On a (sous l'hyp. H ouvert) $\operatorname{ind} \hookrightarrow \operatorname{Ind}$ (càd $i_! \hookrightarrow i_*$)

C'est un isom si $H\backslash G$ est compact. Ce sera le cas ds nos applications car $\underset{B(F) = H}{\backslash} GL_2(F) = G$ est compact.

Rem • ${}^K C_c^\infty(G) = \operatorname{ind}_K^G(1)$ • dualité échange Ind et ind, à torsion par un module près. (cf infra)

2) $\operatorname{Ind}_B^{GL_2}$; une formulation de l'isom de Satake

On suppose $\sqrt{q} \in \mathbb{C}$.

déf''' $\quad i_B^G - = \operatorname{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2})$

rem $\operatorname{Ind}(\chi) \otimes \chi' = \operatorname{Ind}(\chi\chi')$

Fait $({}^{i}\mathcal{L}_B^G \chi)^\vee \simeq {}^{i}\mathcal{L}_B^G \chi^{-1}$

(exercice)

Soit χ caractère de T, vu comme car de B, à val ds $(\mathbb{C}\text{-alg})^\times$

$$({}^{i}\mathcal{L}_B^G \chi)^K = \left\{ f : G \to A \ \text{tq}\ f(bg) = \chi(b)\,\delta_B^{1/2}(b)\, f(g),\ f(gk) = f(g)\ \forall k \in K,\ g \in G \right\}$$

$G = BK$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \ker\chi \not\supseteq K\cap T = \underline{T}(\mathcal{O}) \\ A\,\Phi_{\chi_\Delta} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \chi_\Delta = \chi\Delta^{1/2} \qquad (\Phi_{\chi_\Delta}(tuk) = \chi_\Delta(t))$$

Cette repr est donc sphérique si elle est irréd et χ nr (càd trivial sur $\underline{T}(\mathcal{O})$)

ex $\chi_{gén} : T \twoheadrightarrow T/\underline{T}(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathbb{C}[T/T^0]$, $T/\underline{T}(\mathcal{O}) = T^0$, $T/T^0 \cong \mathbb{Z}^2$ («caractère non ramifié générique»)

Induit $\mathcal{H}(G,K) \to \mathbb{C}[T/T^0]$ morph d'algèbres

$f \mapsto \mathcal{S}(f)$

On verra en IV qu'il induit isom (Th) $\mathcal{H}_K \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[T/T^0]^W$.

rem ${}^{i}\mathcal{L}_B^G \chi_{gén}$ gén irréd $\not\Rightarrow$ $i(\chi)$ irréd $\forall \chi$ nr

$$\mathcal{S}(f) = (f * \Phi_{\chi_{gén}\Delta})(1)$$
$$= \int f(g)\,\Phi_{\chi_{gén}\Delta^{1/2}}(g)\,dg \qquad K \text{ inv de } \chi \text{ à dte } f$$
$$= \int_T \underbrace{\left(\Delta_B(t)^{1/2} \int_U f(tu)\,du\right)}_{} \chi_{gén}(t)\,dt$$
$$= \sum_{t \in T/T^0} \mathcal{S}(f)(t)\ t \quad (\text{somme finie})$$

pour Satake 佐武

modulo ce thm, une repr sphérique est du type $V_{\varphi_\chi} = V_\chi$ où φ_χ correspond à un car nr de T

$$\varphi_\chi(g) = \int_K \Phi_{\chi_\Delta}(kg)\,dk$$ est une fct sphérique (on rend χ_Δ K inv à gauche)

Si Ind χ long finie (via $V \mapsto V^K$ exact), on voit que celle-ci apparaît ds ${}^{i}\mathcal{L}_B^G \chi$.

De plus $V_\chi \simeq V_{\chi'}$ ssi $\chi' = \chi$ ou χ^w.

3) dévissage des induites de caractères

On va voir que : $\mathrm{Ind}_B^G \chi$ $\lg_G \le 3$, presque tjs irréd

On commence par étudier $\mathrm{Ind}_B^G \chi|_B$. On va voir qu'elles ont de long $= 3$ avec un gr de dim ∞ et 2 gr de dim 1.

$(L^\infty i_\chi \to id)$

$$0 \to V' \to V = (\mathrm{Ind}_B^G \chi)|_B \to \mathbb{C}_\chi \to 0, \qquad f \mapsto f(1)$$

Bruhat $G = B \sqcup BwU$ $\Downarrow$

$V' \simeq C_c^\infty(U)$

$f(bwu) = \chi(b)\varphi(u) \leftarrow \varphi$

Regardons les coinvariants sous U

$W_U = W/W(U)$, $W(U) = \langle w - uw \rangle$

car $0 \to V'_U \to V_U \to \mathbb{C}_\chi \to 0$

lemme $W \mapsto W_U$ est exact $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} B \to \mathrm{Rep}\, T$

/!\ $w \in W(U)$ ssi $\int_{U_a} uw\,du = 0$ pour a suff petit, $a \in \mathbb{Z}$

$U_a = \begin{pmatrix} 1 & \pi^a\mathcal{O} \\ & 1 \end{pmatrix}$, $U = \bigcup_{a \le 0} U_a$ ss gpe

$\Rightarrow$ trivial

$\Leftarrow$ analogue de $V = V^G \oplus V(G)$ pr G fini (exercice)

L'application $\underset{\substack{\wr\wr \\ C_c^\infty(U)}}{V'} \xrightarrow{\int} \mathbb{C}$ induit un isomorphisme $V'_U \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$

// On peut le faire à la main en écrivant $f = \sum c_i \mathbb{1}_{a_i+U_0}$, U_0 assez petit

ou bien en utilisant le lemme précédent

et le fait que si $\int f = 0$, f étant à support dans un U_a,

on a $\int_{U_a} f = 0$. Cette égalité entraîne $\int_{U_a} u.f\,du = \left(x \mapsto \int_{U_a} f(x+u)\,du\right)$ $= 0$. (soit $x \in U_a$ et $x+U_a = U_a$, soit $x \notin U_a$ et $x+U_a \cap \operatorname{Supp} f = \emptyset$) //

$$\int_{U_a} f(x+u)\,du = \int_{x+U_a} f$$

On a donc montré que l'on a :

$$0 \to V' \to V \to \mathbb{C}_\chi \to 0 \quad \text{comme repr de } B$$

$$\text{et} \quad 0 \to V'_0 \to V' \xrightarrow{\int} V'_U \simeq \mathbb{C} \to 0 \quad \text{comme repr de } U$$

fait $\int : V' \to \mathbb{C}$ induit $V' \to \mathbb{C}_{\chi^w \Delta_B^{-1}}$ comme repr de B, où

$$\chi^w\begin{pmatrix}t_1 & \\ & t_2\end{pmatrix} = \chi\begin{pmatrix}t_2 & \\ & t_1\end{pmatrix}$$

// Regardons l'action de $t \in T$: $(t.f)(bwu) \overset{def}{=} f(bwut)$

sur $f \in V' \simeq C_c^\infty(U)$

$\simeq$ fcts sur G à support ds BwU tq $f(b'\dots) = \chi(b')f(\dots)$

$$= f(\underbrace{bwtw^{-1}}_{\in B}\, w\, \underbrace{t^{-1}ut}_{\in U})$$

$$= \chi^w(t)\, \underbrace{f(bwt^{-1}ut)}_{\chi(b)\varphi(t^{-1}ut)}$$

Comme $\int \varphi(t^{-1}ut)\,du = \Delta^{-1}(t) \int \varphi$ $\quad (\varphi \in C_c^\infty(U))$

on a le résultat //

Pour conclure il suffit d'observer que le noyau

$$V'' = \ker\left(V' \to \mathbb{C}_{\chi^w\Delta^{-1}}\right)$$ est, comme repr de B, irréductible. De façon équivalente :

fait Soit $X = \{f \in C_c^\infty(U),\ \int f = 0\}$ muni de l'action de B suivante :

$$(tu)f(u') = \chi^w(t)\, f\left(\tfrac{t_2}{t_1}u' + u\right)$$

X est irréductible.

// OPS $\begin{cases}\chi = 1\\ M_\infty \subset \mathbb{C} \quad (\text{et on } \mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}})\end{cases}$. Soit $f \in X$, $f \neq 0$

On veut mq $M.f$, où $M = \begin{pmatrix} * & * \\ & 1\end{pmatrix}$, engendre X.

Puisque f est C_c^∞, $\exists\, s$ suff petit tq f soit à support ds U_s (le ssgp de U)

$\exists\, e$ (suff grand) tq f soit U_e périodique.

Le groupe (fini abélien) U_s/U_e agit sur f ; il existe donc ds $\langle U_s/U_e\, f\rangle = Y$ une fonction $g \in Y$ qui soit une fonction propre $\neq 0$: il existe un caractère ψ de U_s/U_e tq $(\bar u g) = \psi(\bar u) g$. ($g$ est à support ds U_s et U_e périodique)

Puisqu'il existe u_0 tq $g(u_0) \neq 0$ OPS $g(0) \neq 0$ et finalement $\psi \in X$, vu comme prolongement par zéro de la fonction $U_s \to U_s/U_e \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^\times$.

Comme $\int f = 0$ et que l'action de U_s/U_e sur Y est diagonalisable, on peut en supposer $\psi \neq 1$ (car sinon $\int \psi \neq 0$). En résumé, il existe un caractère non trivial d'un U_s/U_e ds X. (Ou plutôt son prolongement par zéro).

La conclusion résulte des trois lemmes ci-dessous. (Nous avons déjà utilisé les 2 premiers).

Lemme 1 Toute fonction de $C_c^\infty(F)$ est le prolongement par zéro d'une fct
$$\pi^\alpha\mathcal{O}\to\pi^\alpha\mathcal{O}/\pi^\beta\mathcal{O}\to\mathbb{C}$$
$$\beta\geq\alpha$$

Lemme 2 Toute fct sur $\pi^\alpha\mathcal{O}/\pi^\beta\mathcal{O}\ (\simeq\mathcal{O}/\pi^{\beta-\alpha}\mathcal{O})$ est combinaison linéaire de caractères de ce groupe. De plus, le caractère trivial apparaît avec coeff $\neq 0$ ssi $\int f\neq 0$.

Lemme 3 Soit ψ un caractère non trivial de $\mathcal{O}/\pi^c$. $c>0$

a) $\mathcal{O}/\pi^c\to\widehat{\mathcal{O}/\pi^c}$ est un isomorphisme
$\quad y\mapsto\psi(y\,\cdot)$

b) [trivial]
l'application composée $\mathcal{O}/\pi^{c'}\to\mathcal{O}/\pi^c\xrightarrow{\psi}\mathbb{C}^\times$ est un caractère non trivial ψ' de $\mathcal{O}/\pi^{c'}$.

On a donc montré que $\mathrm{Ind}_B^G\chi|_B$ est de lg 3 (avec un gr dim ∞, 2 de dim finie $\mathbb{C}_{\chi^w\Delta}$ et $\mathbb{C}_\chi$) de sorte que $\mathrm{Ind}_B^G\chi$ est de longueur au plus 3 et, s'il est réductible, possède un qt ou un sobjet de dim 1. D'où la question suivante :

__Quand__ $\dim 1\hookrightarrow\mathrm{Ind}_B^G\chi$?

On a vu que tt caractère de G est de la forme $\chi'\circ\det$ donc on veut savoir si $\mathbb{C}_{\chi'\det}\hookrightarrow\mathrm{Ind}\,\chi$. Comme $f\left(\begin{pmatrix}t_1&\\&t_2\end{pmatrix}g\right)=\chi_1(t_1)\chi_2(t_2)f(g)$ si $f\in\mathrm{Ind}$

et $f\left(\begin{pmatrix}t_1&\\&t_2\end{pmatrix}g\right)=\chi'(t_1t_2)f(g)$ si $f\in\mathbb{C}_{\chi'\det}$ on a nécessairement
$$\chi_1=\chi_2=\chi'\quad\text{(la réciproque est aisée.)}$$

__Quand__ $\mathrm{Ind}_B^G\chi\twoheadrightarrow\dim 1$?

Par dualité et torsion par un car : $\mathrm{Ind}\,\chi\twoheadrightarrow\mathbb{C}_{\chi'}\iff\mathrm{Ind}(\chi\underline{\chi}'^{-1})\twoheadrightarrow\mathbb{C}$
$$\mathrm{Ind}(\chi\underline{\chi}'^{-1})=L(\chi\underline{\chi}'^{-1}\Delta^{1/2})$$
$$\mathbb{C}\hookrightarrow L(\chi^{-1}\underline{\chi}'\Delta^{-1/2})\iff$$
$$\Updownarrow\quad L(\chi^{-1}\underline{\chi}'\Delta^{-1/2})=\mathrm{Ind}(\chi^{-1}\underline{\chi}'\Delta^{-1})$$
$$\underline{\chi_1|\,|^{-1}=\chi_2|\,|}$$

Ainsi : $\chi=\begin{pmatrix}\chi_1&\\&\chi_2\end{pmatrix}$

__Thm__
- si $\chi_1\neq\chi_2$, $\chi_1|\,|^{-1}\neq\chi_2|\,|$, $\mathrm{Ind}_B^G\chi$ est irréductible
- si $\chi_1=\chi_2=\chi'$, $\mathrm{Ind}_B^G\chi$ contient $\chi'\circ\det$, de qt irréductible $(\chi'\,\mathrm{St}_G)$ $\quad[\mathrm{St}_G=\mathrm{Ind}\,1/1]$
- (dualement) si $\chi_1|\,|^{-1}=\chi_2|\,|=\chi'$ $\mathrm{Ind}_B^G\chi\twoheadrightarrow\chi'\det$ de noyau irréductible $(\chi'\,\mathrm{St}_G)$

Modulo l'isom de Satake, on a vu que ceux sont les seuls représentations sphériques de G
($\exists$ autre approche utilisant l'algèbre de Hecke-Iwahori mais là encore, il faut connaître un peu de sa structure)

IV Isomorphisme de Satake (佐武 sa take)

On rappelle qu'il s'agit de montrer que le morphisme
$$\mathcal{H}(G,K)\to\mathbb{C}[T/T(\mathcal{O})]$$
$$K=G(\mathcal{O}),\quad T(\mathcal{O})=T^0$$
$$f\mapsto\sum_{\overline{t}\in T/T(\mathcal{O})}佐(f)(t)\,\overline{t}\quad(t\mapsto\overline{t})$$
où
$$佐(f)(t):=\underbrace{\Delta_B(t)^{-1/2}}_{\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{-1/2}}\int_U f(tu)\,du$$

induit un isomorphisme sur $\mathbb{C}[T/T^0]^W$. (où $w.\begin{pmatrix}t_1 & \\ & t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_2 & \\ & t_1\end{pmatrix}$)

(Observons que le terme de droite $\mathbb{C}[T/T^0]$ est isomorphe à $\mathcal{H}(T,T^0)$ via l'application $f \in \mathcal{H}(T,T^0) \longmapsto \sum_{\bar t \in T/T^0} f(t)\bar t \in \mathbb{C}[T/T^0]$.)

1) mq 佐 a son image dans $\mathbb{C}[T/T^0]^W$

a) première démonstration.

$\mathcal{H}(G,G(\mathcal{O}))$ est libre de base les $1_{K\pi^\lambda K}$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{Z}^2$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$; il s'agit donc de mq

$$\overset{f}{\overset{\parallel}{\text{佐}(1_{K\pi^\lambda K})}}\Big(\underset{\underset{t}{\parallel}}{\begin{pmatrix}\pi^i & \\ & \pi^j\end{pmatrix}}\Big) = \text{佐}(1_{K\pi^\lambda K})\Big(\underset{\underset{w.t}{\parallel}}{\begin{pmatrix}\pi^j & \\ & \pi^i\end{pmatrix}}\Big)$$

$$q^{\frac{j-i}{2}}\int_U 1_{K\begin{pmatrix}\pi^{\lambda_1} & \\ & \pi^{\lambda_2}\end{pmatrix}K}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}\pi^i & \\ & \pi^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ & 1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\pi^i & u\pi^i\\ & \pi^j\end{pmatrix}}\Big)\,du$$

Posons $r=\lambda_1+\lambda_2$. L'intégrande est nul sauf si $\begin{cases} i+j=r \\ \min\{i,j,v(u)+i\} = \min\{\lambda_1,\lambda_2\}=\lambda_2\end{cases}$

auquel cas ($i+j=r$) l'intégrale vaut,

$$q^{\frac{j-i}{2}}\ \mathrm{vol}\{u\in U,\ \min\{i,j,v(u)+i\}=\lambda_2\}$$

Cette quantité est égale à

$$q^{i-j/2}\ \mathrm{vol}\{u' \ \ldots\ v(u')+j=\lambda_2\}$$ comme le montre

le chgt de variables $u'=\pi^{j-i}u$ (qui multiplie les volumes par q^{i-j}).

CQFD

b) seconde démonstration

prop Soit $t\in T$ régulier, càd à vap $\neq$, de sorte que son centralisateur G_t soit égal à T (le centralisateur de g est typ $F[g]^\times$ sauf si g dans le centre)

Alors $\forall f \in \mathcal{H}_K$

$$O_t(f) := \int_{G_t=T\backslash G} f(g^{-1}tg)\,\frac{dg}{dg_t=dt'}$$

$$= \frac{|t_1t_2|^{1/2}}{|t_1-t_2|}\ \text{佐}(f)(t).$$

// f étant bi K invariante et K de volume 1, on a ($g=t'uk$)

$$O_t(f) = \int_U f(\underbrace{u^{-1}tu}_{t.(t^{-1}u^{-1}tu)})\,du.$$

L'application $U\to U$, $u\mapsto t^{-1}u^{-1}tu$ est bijective $\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ & 1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1 & (1-\frac{t_2}{t_1})u\\ & 1\end{pmatrix}\right)$

de Jacobien constant $= |1-\frac{t_2}{t_1}|$. Ainsi, $O_t(f) = \underbrace{\int_U f(tu')\,du'}_{|\frac{t_1}{t_2}|^{-1/2}\text{佐}(f)(t)}\,|1-\frac{t_2}{t_1}|^{-1}$ //

Puisqu'il est clair que $O_t(f) = O_{t^w}(f)$ (t et t^w sont conjugués (par w)), on a bien $\text{佐}(f) \in \mathbb{C}[T/T^0]^W$ (on passe du cas régulier au cas général par continuité)

2) fcts de Drinfel'd

$r\geq 1$. Posons $f_r := 1\!\!1_{K\begin{pmatrix}\pi^r & \\ & 1\end{pmatrix}K} + (1-q)\sum_{i\geq 1}^{[r/2]} 1\!\!1_{K\begin{pmatrix}\pi^{r-i} & \\ & \pi^i\end{pmatrix}K}$

proposition $\text{佐}(f_r) = q^{r/2}(z_1^r+z_2^r)$

(on identifie $\mathbb{C}[T/T^0]$ à $\mathbb{C}[z_1^{\pm1}, z_2^{\pm1}]$)

Cor si t st régulier

On a $O_t(f_r)=0$ $\forall r\geq 1$

$=\begin{pmatrix} a & \\ & b\end{pmatrix}$ avec $\{v(a), v(b)\} \neq \{0, r\}$

// trivial car $\underbrace{\text{佐}(f_r)}_{(cte\neq 0)\underbrace{z_1^r+z_2^r}_{=\text{coeff de } z_1^{v(a)} z_2^{v(b)}}}(t) = (cte\neq 0)\, O_t(f_r)$ //

<u>démonstration de la proposition</u>

// exercice : $\text{佐}(1\!\!1_K) = 1$ (ne sera pas utilisé ds la démonstration)

$\text{佐}(1\!\!1_{\pi K}) = z_1 z_2$

Calculons : • $\text{佐}(f_r)\begin{pmatrix}\pi^r & \\ & 1\end{pmatrix} \overset{\text{(cf calcul ci-dessus)}}{=} \underbrace{q^{-r/2}\times \mathrm{vol}\{u, v(u)\geq -r\}}_{q^{r/2}} + 0$

• $\text{佐}(f_r)\begin{pmatrix}\pi^{r-i'} & \\ & \pi^{i'}\end{pmatrix} = \underbrace{q^{i'-r/2}\times \mathrm{vol}\{v(u) = -(r-i')\}}_{(1-q^{-1})\,q^{r-i'}}$ [premier terme]

OPS $1\leq i'\leq [r/2]$

$$+(1-q)\Big(\underbrace{\mathrm{vol}(v\geq -(r-2i'))}_{q^{r-2i'}} + \underbrace{\sum_{i<i'} \mathrm{vol}(v = -(r-(i+i')))}_{q^{r-(i+i')}(1-q^{-1})}\Big)$$

[terme $i=i'$ ds la Σ] [termes pr $i<i'$ ds la Σ, les autres sont nuls]

$$= 1^*\Big(1-q^{-1} + (1-q)\big(q^{-i'} + \sum_{0<i<i'} q^{-i}(1-q^{-1})\big)\Big) = \dots 0.$$ //

<u>exemple</u> ($r=2$)

$$\text{佐}(f_2)\begin{pmatrix}\pi & \\ & \pi\end{pmatrix} = \underbrace{\int 1\!\!1_{K\begin{pmatrix}\pi^2 & \\ & 1\end{pmatrix}K}\begin{pmatrix}\pi & u\pi\\ & \pi\end{pmatrix} du}_{\mathrm{vol}(v(u)=-1) = q(1-q^{-1})} + (1-q)\underbrace{\int 1\!\!1_{K\begin{pmatrix}\pi & \\ & \pi\end{pmatrix}K}\begin{pmatrix}\pi & u\pi\\ & \pi\end{pmatrix} du}_{\mathrm{vol}\{v\geq 0\} = 1}$$

$$= q(1-q^{-1}) + (1-q) = 0.$$

3) <u>surjectivité de Satake ; isom</u>

• l'image est stable par $t\to t^{-1}$ (càd $z_i\mapsto z_i^{-1}$)

En effet, un calcul trivial* montre que $\text{佐}(\check f)(t^{-1}) = \text{佐}(f)(t)$ où $\check f(g) := f(g^{-1})$

Ainsi, l'image, qui contient $\mathbb{C}[z_1,z_2]^W$ et est stable par $z\mapsto z^{-1}$ est égale à $\mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}]^W$ (via thm sur les fcts symm)

(* remarque : $\Delta^{-1/2}(t^{-1})\int \check f(t^{-1}u)\,du = \Delta^{1/2}(t)\int f(t\,\underbrace{t^{-1}u^{-1}t}_{u'})\,du$
$= \Delta^{1/2}(t)\,\Delta(t)^{-1}\int f(tu')\,du'$)

• <u>injectivité</u> Il résulte immédiatement du calcul explicite de $\text{佐}(1\!\!1_{\text{dble classe}})$ que si $f = \sum c_J 1\!\!1_{K\pi^J K}$ et J tq $\begin{cases} c_J\neq 0 ; \\ J_1+J_2 \text{ max parmi ceux-ci} ; \\ J_1-J_2 \text{ max parmi ceux-ci}, \end{cases}$

On a $\text{佐}(f)\left(\begin{pmatrix}\pi^{J_1} & \\ & \pi^{J_2}\end{pmatrix}\right) = q^* c_J \neq 0.$

<u>Rem</u> (à déplacer) $\forall f\in \mathcal{H}_K$, $\forall V$ repr irréd lisse de G, (sqt irréd de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_z)$)

$$\underset{V^K\to V^K}{\mathrm{Tr}(\pi(f))} = \begin{cases} \text{佐}(f)(z_1,z_2) & \text{si } V\simeq V_{\chi_z} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où $\chi_z : T\to T/T^\circ \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}^\times$ (nr)
$e_i \mapsto z_i$

a) rappels

4) Réinterprétation à la Langlands de l'ism de 佐武 (6)

• Soit $\underline{G}$ un groupe réductif déployé sur S-schéma (càd : affine lisse$/S$ à fibres géom connexes et réductives (pas ssgp $\triangleleft$, unipot.) tq $\exists$ tore max diagonalisable. $\underline{T} \simeq D_S(M)$, M S-gp ab libre.

Soit $\underline{B}$ un Borel contenant $\underline{T}$.

$\mathrm{Lie}\,\underline{G} = \mathrm{Lie}(\underline{T}) \oplus \bigoplus_{r} \mathrm{Lie}(G)_r$. On a $\dim \mathrm{Lie}(G)_r = 1$

action adjointe de $\underline{T}$

$r \in R$ (racines)

$R \subset X^*(\underline{T}) = \mathrm{Hom}(\underline{T}, \mathbb{G}_m) \setminus \{0\} = M$

et on note R_+ l'ens. des racines apparaissant ds $\mathrm{Lie}(B)$.

On a $R = R_+ \cup R_-$ où $R_- = -R_+$.

$\rightsquigarrow$ relation d'ordre sur M : $m_1 \geq m_2$ si $m_1 - m_2$ = comb lin à coeff. $\in \mathbb{N}$ d'élts de R_+

On a accouplement naturel : $X^* \otimes X_* \to \mathbb{Z}$
$= M \otimes \check{M}$
provenant de $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$

fait $\exists\, \check{R} \subset \check{M}$ tq
et appl $R \xrightarrow{\sim} \check{R}$, $r \mapsto \check{r}$

a) $\langle \check{r}, r \rangle = 2$

b) $s_r : M \to M$, $m \mapsto m - \langle \check{r}, m \rangle r$ et $s_{\check{r}} : \check{M} \to \check{M}$, $\check{m} \mapsto \check{m} - \langle \check{m}, r \rangle \check{r}$

envoient R ds R et $\check{R}$ ds $\check{R}$.

libre tf$/\mathbb{Z}$ — satisfont a), b)

Le quadruplet $(M, R, \check{M}, \check{R})$ est une donnée radicielle ("réduite" si $r \in R \Rightarrow 2r \notin R$)

Th • Pour toute donnée radicielle réduite $\mathcal{R}$, $\exists$ gpe réductif déployé $/\mathbb{Z}$ de donnée rad $\mathcal{R}$.
• deux gpes réductifs sur $S \neq \emptyset$ à données rad isom sont isom.

(Chevalley, Grothendieck, Demazure)

• Posons $P \subset M$ l'ensemble des éléments dominants et notons
$P = \{m \in M, \langle \check{r}, m \rangle \geq 0 \ \forall \check{r} \in \check{R}\}$

$\mathrm{ch} : K(\mathrm{Rep}(\underline{T})) \to \mathbb{Z}[M]$ l'application donnée par les composants isotypiques :
$\bigoplus_{\chi \in M} E_\chi \mapsto \sum \dim(E_\chi) \cdot \chi$ (c'est un hom d'anneau).

Th (v Grothendieck $S \overset{\text{supp}}{=} \mathrm{Spec}(k)$)

$$\begin{array}{ccc} K(\mathrm{Rep}\,\underline{G}) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & \mathbb{Z}[M] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & \nearrow & \\ K(\mathrm{Rep}(\underline{T})) & & \end{array}$$

induit isom $\boxed{K(\mathrm{Rep}\,\underline{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[M]^W}$

C'est une variante du thm de Chevalley : (variante thm Cartan-Weyl sur les repr algèbres de Lie)

Th • $\forall p \in P$, $\exists !$ $\underline{G}$ mod simple E_p tq
$\mathrm{ch}(E_p) = p + \sum_{m_i < p} m_i$

• Tt $\underline{G}$ mod simple est isom à l'un des E_p.

(Les $\mathrm{ch}(E_p)$ forment une base de $\mathbb{Z}[M]^W$).

b) 佐武-Langlands

Soit $\underline{G}$ gpe réductif déployé sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, $G = \underline{G}(F)$, $T = \underline{T}(F)$, $K = \underline{G}(\mathcal{O})$, $T^\circ = \underline{T}(\mathcal{O})$

Th (Satake) $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}] \otimes \mathcal{H}(G,K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[T/T^\circ]^W \otimes \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$

fait $T/T^\circ \xleftarrow{\sim} X_*(T) = \check{M}$
$\chi(\varpi)T^\circ \mapsfrom (\chi : \mathbb{G}_m \to T)$

D'après les rappels précédents, $\exists$ gpe réductif, noté $\widehat{G}$, sur $\mathbb{C}$ dont la donnée radicielle soit duale de celle de $\underline{G}$.
(càd $(M, R, \check{M}, \check{R}) \rightsquigarrow (\check{M}, \check{R}, M, R)$). Ils ont m gpe de Weyl

Ainsi, on a : $\mathcal{H}(G,K)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}[\check{M}]^W = \overline{\mathbb{Q}}[X_*(\widehat{T})]^W$
$\simeq K(\mathrm{Rep}(\widehat{G}))_{\overline{\mathbb{Q}}}$

Finalement, l'ism de Satake se réécrit :

$$\boxed{\mathcal{H}(G,K)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq K(\mathrm{Rep}\,\widehat{G})_{\overline{\mathbb{Q}}}}$$

via

γ classe conj $\mapsto$ $K(\mathrm{Rep}) \to \mathbb{C}$, $V \mapsto \mathrm{Tr}(\gamma | V)$

d'où $\mathrm{Specmax}(\mathcal{H}(G,K)) \simeq \{\widehat{G}(\mathbb{C})$ classes de conj ½ simples$\}$

théorie fcts sphériques

$\cong$ {classes d'ism de repr K-sphériques de G}

« propriété de Satake »

Références

I – III : exposé Cartier à Corvallis
livre Bushnell-Henniart

IV livre de Laumon
article de Serre « Groupe de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés »
Gross « On the Satake isomorphism »

Rem Ginzburg a une interprétation très intéressante de l'isom de Satake et du groupe $\widehat{G}$ en terme de faisceaux pervers équivariants sur le $\mathbb{F}_q$-schéma

(de dim ∞) $Gr_{\underline{G}} = \underline{G}(\mathbb{F}_q((t)))/\underline{G}(\mathbb{F}_q[[t]])$ (considéré par Lusztig) :

$$\underbrace{\text{ces faisceaux pervers sur } Gr_{\underline{G}}}_{\text{catégorie tensorielle}} \xrightarrow[\text{hypercohomologie}]{\sim} \mathrm{Rep}\,\widehat{G}(\mathbb{C})$$

(L'intérêt de $Gr_{\underline{G}}$ vient du fait que $\overset{\mathcal{H}}{\overset{\shortparallel}{C_c^\infty(\underline{G}(\mathbb{F}_q((t)))//\underline{G}(\mathbb{F}_q[[t]]))}}$ n'est autre l'ens des fcts $\underline{G}(\mathbb{F}_q[[t]])$-inv sur $Gr_{\underline{G}}$.)