GT
Points des courbes modulaires
09/03/2009

Formes modulaires et formes automorphes pour $GL(2)$

__Notations__ : $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ adèles de $\mathbb{Q}$.

$G_p = GL_2(\mathbb{Q}_p)$ $\qquad K_p = GL_2(\mathbb{Z}_p) \subset G_p$.

G_p muni de la mesure de Haar telle que K_p soit de volume 1.

$G_\infty = GL_2(\mathbb{R})$ $\qquad K_\infty = SO_2(\mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$

G_∞ ——————— K_∞ ———

$G = GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ produit restreint des G_p et G_∞ relativement aux $K_p \subset G_p$

$\mathbb{A}_f$ adèles finis $\qquad \mathbb{A}_\mathbb{Q} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}$.

$K_f = \prod_p K_p$ $\qquad K = K_f \times K_\infty$.

$\Rightarrow$ mesure de Haar sur G telle que $\mathrm{vol}(K) = 1$.

représentation unitaire d'un groupe topologique
= représentation continue sur un espace de Hilbert par des isométries.

On fixe ω un caractère unitaire du centre $Z(\mathbb{A})$ de G, trivial sur $Z(\mathbb{Q})$ et sur la composante connexe de 1 dans $Z(\mathbb{A})$, c'est-à-dire $\left\{ \begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

__Rappel__ : On note $L^2_0 \left(GL_2(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), \omega \right)$ l'ensemble des fonctions $f : GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $\forall g \in G$ $\forall z \in Z(\mathbb{A})$ $\forall \gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$,

$$f(z\gamma g) = \omega(z) f(g), \ \cancel{\text{et}} \ |f|^2 \in L^2\left(Z(\mathbb{A}) GL_2(\mathbb{Q}) \backslash G \right).$$

~~G agit par~~ et $\int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} f(ng) = 0$ pour presque tout $g \in G$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset GL_2$.

G agit sur $L^2_0\left(\,{}_{GL_2(\mathbb{Q})}\backslash^{G}, \omega\right)$ isométriquement par translation à droite.

<u>Théorème</u> : La représentation $L^2_0(\omega)$ est discrète, c'est-à-dire $L^2_0(\omega) \simeq \widehat{\bigoplus} \pi$, chaque π étant une représentation irréductible unitaire de G et apparaissant avec une multiplicité finie.

<u>But de l'exposé</u> : Donner un sens à la notation $L(\pi, s)$ vue dans l'exposé d'introduction et montrer que cette fonction possède un ~~équation fonctionnelle~~ prolongement analytique à $\mathbb{C}$.

<u>I. Représentations admissibles de G</u>

<u>Définition</u> : Une représentation unitaire irréductible π de G est dite <u>admissible</u> si pour toute représentation irréductible σ de K, la multiplicité de σ dans π est finie.

<u>Exemple</u> : les représentations unitaires irréductibles <u>automorphes</u> (i.e apparaissant dans $L^2_0(\omega)$) sont admissibles.

<u>Preuve</u> Fixons σ une représentation irréductible de K. σ est de dimension finie, et comme $GL_n(\mathbb{C})$ ~~ne contient~~ n'a pas de base de voisinages de 1 constituée de sous-groupes, on peut trouver S un ensemble fini de nombres premiers tels que $\prod_{p \notin S} K_p \subset \operatorname{Ker} \sigma$ et voir σ comme une représentation de $\prod_{p \in S} K_p \times SO_2(\mathbb{R})$.

La formule de Plancherel pour les groupes compacts montre alors que $\sigma \simeq \bigotimes_{p \in S} \sigma_p \otimes \sigma_\infty$ avec σ_v représentation irréductible de K_v $(v \in S \cup \{\infty\})$.

Soit $K_0 = \prod_{p \notin S} K_p$. La composante σ-isotypique de π est donc contenue dans la composante σ_∞-isotypique de π^{K_0}. Nous allons montrer que cet espace $\pi^{K_0}(\sigma_\infty)$ est de dimension finie.

π^{K_0} est une représentation unitaire de $GL_2(\mathbb{R})$. De plus, si $f_\infty \in C_c^\infty(GL_2(\mathbb{R}), \mathbb{C})$, $f = 1_{K_0} \otimes f_\infty \in C_c^\infty(G, \mathbb{C})$.

$$\pi(f)\phi(g) = \int_G \phi(gh) f(h)\, dh = \mathrm{vol}(K_0)\, \pi(f_\infty)\phi(g).$$

$\pi(f)$ opérateur compact $\Rightarrow$ $\pi(f_\infty)$ opérateur compact.

Donc le même raisonnement que pour démontrer le caractère discret à multiplicité finie de $L_0^2(\omega)$ montre π^{K_0} est une somme hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de $GL_2(\mathbb{R})$, toutes les multiplicités étant finies.

$\Rightarrow$ les vecteurs K_∞-finis de π^{K_0} sont lisses et sont munis d'une structure de (g, K)-module.

De plus, remarquons que $\Delta \in Z(g)$ agit par multiplication par un scalaire λ sur les vecteurs K_∞ de π^{K_0}.

En effet ~~Δ preserve~~ si λ est une valeur propre de Δ agissant sur π^∞, $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda)$ est stable par G, donc dense dans π. Comme Δ ~~préserve le produit hermitien~~ est autoadjoint, l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda)$ dans π^∞ est nul.

Or il n'y a qu'un nombre fini de $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-modules irréductibles ayant λ pour caractère infinitésimal et σ_∞, dans chacun d'eux, le type σ_∞ apparaît avec multiplicité 1. Ainsi $\dim_{\mathbb{C}} \pi^{K_0}(\sigma_\infty) < \infty$. □

Soit π une représentation unitaire admissible. Comme on vient de le voir π_K est un $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module. De plus, comme K_p est ouvert dans G_p, π_K est stable par $GL_2(\mathbb{A}_f)$.

Cependant, π_K n'est pas stable par $GL_2(\mathbb{R})$.

<u>Définition</u> : Une représentation de $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ est une représentation lisse de $GL_2(\mathbb{A}_f)$, munie en plus d'une structure de $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module commutant à l'action de $GL_2(\mathbb{A}_f)$. Une telle représentation π est dite <u>admissible</u> si pour toute représentation irréductible σ de K, la composante σ-isotypique $\pi(\sigma)$ est de dimension finie.

Une représentation irréductible π de $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ est dite <u>automorphe</u> cuspidale s'il existe une injection $\pi \hookrightarrow L^2_0(\omega)$.

La question est maintenant de trouver une décomposition place par place des représentations automorphes.

~~Soit π_p une famille représentation~~

Pour chaque p premier, fixons π_p une représentation irréductible lisse de $G_p = GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Supposons que pour $p \notin S$ (S ensemble fini de nombres premiers), $\dim \pi_p^{K_p} = 1$. Fixons alors pour $p \notin S$, $\xi_p \in \pi_p^{K_p}$ un vecteur non nul.

Si $S' \supset S$, $\quad \pi_{S'} = \bigotimes_{p \in S'} \pi_p$

Si $S'_1 \subset S'_2$, $\quad \alpha_{S'_1, S'_2} : \pi_{S'_1} \hookrightarrow \pi_{S'_2}$

$$\bigotimes_{p \in S'_1} e_p \longmapsto \Big(\bigotimes_{p \in S'_1} e_p\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{p \in S'_2 \setminus S'_1} \xi_p\Big)$$

On a, pour $S'_1 \subset S'_2 \subset S'_3$, des compatibilités

$\alpha_{S'_2, S'_3} \circ \alpha_{S'_1, S'_2} = \alpha_{S'_1, S'_3}$, d'où une limite

inductive $\pi_f = \varinjlim_{S'} \pi_{S'}$.

π_f est muni d'une action de $GL_2(\mathbb{A}_f)$ de la façon suivante. $g = (g_p) \in GL_2(\mathbb{A}_f)$, $g_p \in K_p$ sauf si $p \in S$, S fini.

Alors si $S' \supset S$, $g(\bigotimes_{p \in S'} e_p) = \bigotimes_{p \in S'} g e_p$ est bien

défini et $g\, \alpha_{S'_1, S'_2}(\otimes e_p) = \alpha_{S'_1, S'_2}(g \otimes e_p)$ donc

g agit bien sur π_f. Au final, on a une action de $GL_2(\mathbb{A}_f)$ sur π_f et cette action est lisse.

Si de plus, on se donne π_∞ un $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module, $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ est une représentation de $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$.

<u>Théorème</u> : Si tous les π_p et π_∞ sont irréductibles, π est une représentation irréductible de G.

Réciproquement si π est une représentation irréductible admissible de G, il existe des représentations π_p irréductibles et un $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module irréductibles, uniques à isomorphisme près tels que $\pi \simeq \bigotimes_p \pi_p \otimes \pi_\infty$.

Intérêt de cette décomposition

Si $f = \bigotimes_v f_v \in C_c^\infty(GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$

$$e = \bigotimes_v e_v \in \bigotimes \pi_v$$

$$\pi(f)\, e = \bigotimes_v \pi_v(f_v) e_v$$

Possibilités pour π_∞

- $\mathcal{D}(-k,-) \oplus \mathcal{D}(k,+)$ pour $k \geq 1$

  Δ agit par $\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$
- $F(k)$ de dimension finie. $k \in \mathbb{N}$ $\quad \Delta = -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$
- $P(\lambda, \varepsilon)$ $\quad \Delta$ agit par λ.

  $\left(\lambda \neq \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\right)$!

Pour comprendre quels π_p et π_∞ peuvent apparaître dans $L^2_0(\omega)$, on peut regarder les vecteurs ayant un certain K-type et vérifiant une équation de la forme $\Delta v = \lambda v$.

Exemple. ω caractère de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}^\times \longleftrightarrow \Psi$ caractère de Dirichlet $(\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^\times$

tq $\omega(\mathbb{Z}_p^\times) = 1$ si $p \nmid N_0$ et

$$\omega(p \in \mathbb{Q}_p^\times) = \Psi(p).$$

Soit N un multiple de N_0. On pose

$$K_0(N) = \prod_p K_0(N)_p \quad \text{où } K_0(N)_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_p \;\; v_p(c) \geq v_p(N) \right\}$$

$\Psi : K_0(N) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère défini par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \omega(d)$$

Pour $k \geq 1$, on pose $\mathcal{A}^0(\lambda, N, k, \omega)$ l'ensemble des $\phi \in L^2_0$ telles que

- $\Delta \phi = \lambda \phi$
- $\phi(g k_0 r(\theta)) = e^{ik\theta} \psi(k_0) \phi(g)$

$$\forall g \in GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \quad k_0 \in K_0(N), r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède $\dim \mathcal{A}^0(\lambda, N, k, \omega) < \infty$

Ainsi si $\phi \in \mathcal{A}^0$ il existe $f \in C_c^\infty$ telle que

$$\pi(f)\phi = \phi \implies \phi \text{ est } C^\infty.$$

De plus, les résultats prouvés dans l'exposé précédent montrent que ϕ est bornée.

On obtient une autre description de $\mathcal{A}^0(\lambda, N, k, \omega)$ c'est l'ensemble des fonctions $\phi : GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{C}$ telles que

- ϕ soit C^∞
- $\forall z \in Z(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ $\forall \gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$ $\forall k_0 \in K^N$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\phi(z \gamma g k_0 r(\theta)) = \omega(z) \psi(k_0) e^{ik\theta} \phi(g)$$

- ϕ bornée
- $\forall g \in GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ $\displaystyle\int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} \phi(ng)\, dn = 0$

$\to$ Comment obtenir ces formes automorphes ?

II. Formes modulaires

$\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0 \}$ demi-plan de Poincaré.

Il est muni d'une action de $GL_2(\mathbb{R})^+$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})^+$, on pose

$$j(g, z) = (cz+d) \det(g)^{-\frac{1}{2}}$$

et $f|_{[g]_k}(z) = f(gz)\, j(g,z)^{-k}$

Soit $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\quad N | c \right\}$

$= K_0(N) \times GL_2(\mathbb{R})^+ \cap GL_2(\mathbb{Q})$.

<u>Définition</u> : On dit que f est une fonction modulaire de poids k niveau N et type ψ si $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, $\forall\ \gamma \in \Gamma_0(N),\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad f|_{[\gamma]_k} = \psi(a) f$.

<u>Régularité aux pointes</u> $\quad s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. $\exists\, \sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ t.q. $\sigma(\infty) = s$. $\quad \Gamma_s = \{ \gamma \in \Gamma_0(N),\ \gamma s = s \}$.

$f|_{[\sigma]_k}$ est invariante par $\sigma^{-1}\Gamma_s \sigma \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m \in \mathbb{Z} \right\}$.

Soit $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \sigma^{-1}\Gamma_s \sigma$.

On peut écrire $f|_{[\sigma]_k}(z) = \sum_{n \geq -\infty} a_n(s)\, e^{\frac{2i\pi n z}{h}}$.

f est dite holomorphe en s si $a_n(s) = 0$ pour $n < 0$

On dit que f est cuspidale si $\forall s$, $a_0(s) = 0$.

On note $S_k(N, \psi)$ l'espace des formes modulaires cuspidales de poids k, niveau N, type ψ.

Voyons à présent comment construire des formes automorphes à partir des $S_k(N, \psi)$.

Si $f \in S_k(N, \psi)$, on pose, pour $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$, $g_\infty \in GL_2(\mathbb{R})^+$, $k_0 \in K_0(N)$,

$$\phi_f(\gamma g_\infty k) = \psi(k)\, f(g_\infty i)\, j(g, i)^{-k}$$

ϕ_f est bien définie car $\quad GL_2(\mathbb{Q}) \cap K_0(N) \times GL_2(\mathbb{R})^+ = \Gamma_0(N)$

Proposition : L'application

$$S_k(N,\psi) \longrightarrow \mathcal{A}^0\left(\tfrac{k}{2}\left(1-\tfrac{k}{2}\right), -k, N, \omega\right)$$

$$f \longmapsto \phi_f$$

est une bijection.

Preuve : Pour $z \in Z(\mathbb{A})$, on a bien $\phi_f(zg) = \omega(z)\phi_f(g)$.

Si $g = \gamma g_\infty k_0$ $\quad \gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$ $\quad g_\infty \in GL_2(\mathbb{R})^+$ $\quad k_0 \in K_0(N)$.

- $$\phi_f(g r(\theta)) = \psi(k_0) f(g_\infty r(\theta) i)\, j(g_\infty r(\theta), i)^{-k}$$
$$= \psi(k_0) f(g_\infty i)\, j(g_\infty, i)^{-k} (\sin\theta\, i + \cos\theta)^{-k}$$
$$= e^{-ik\theta} \phi_f(g).$$

- Calculons l'action de l'opérateur de Casimir $\Delta \in U(\mathfrak{gl}_2)$ sur $C^\infty(GL_2(\mathbb{R}), \mathbb{C})$. $\quad \Delta = -\frac{1}{4}(H^2 + 2RL + 2LR)$

$$H = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors $H = i\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

$$L = e^{2i\theta}\left(-iy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$R = e^{-2i\theta}\left(iy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

dans les coordonnées $g = \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} r(\theta)$

$z > 0 \quad y > 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad \theta \in [0, 2\pi[$

De plus, $\mathcal{D}(k,+) \oplus \mathcal{D}(-k,-)$ est l'unique $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module irréductible sur lequel $\Delta = \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$ et aussi l'unique $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module irréductible pour lequel L tue la partie $(-k)$-isotypique.

Ainsi $\Delta\phi_f = \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\phi_f \iff L\phi_f = 0$.

Nous allons montrer que $L\phi_f = 0$, car L est un opérateur du premier ordre, plus simple que Δ, d'ordre 2.

$g = \gamma(g_z)\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & \\ & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} r(\theta)$

$$L\phi_f(g) = \cancel{L\phi_f\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right)}$$

$$= L\phi_f\left(\gamma_z^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} r(\theta)\right)\psi(k_0)$$

$$= \psi(k_0)\, e^{2i\theta}\left[-iy\, e^{-ik\theta}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[f(x+iy)\, y^{\frac{k}{2}}\right] - \frac{k}{2} e^{-ik\theta} f(x+iy)\, y^{\frac{k}{2}} \cancel{y^{-1}}\right]$$

$$= e^{2i\theta}\psi(k_0)\left[-iy^{\frac{k}{2}+1} e^{-ik\theta}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(x+iy)) + \frac{k}{2} y^{\frac{k}{2}} f(x+iy)\, e^{-ik\theta} - \frac{k}{2} e^{-ik\theta} y^{\frac{k}{2}} f(x+iy)\right]$$

$$= -ie^{2i\theta}\psi(k_0)\, y^{\frac{k}{2}+1} e^{-ik\theta}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+iy).$$

Ainsi on a bien $L\phi_f = 0$ puisque f est holomorphe.

• $y^{\frac{k}{2}} f(x+iy) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ uniformément en x.

De plus si $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ est une pointe, soit $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\sigma(\infty) = s$ si $h(z) = y^{\frac{k}{2}} f(x+iy)$,

$$|h(\sigma(z))| = \left| y^{\frac{k}{2}} f|_{[\sigma]_k}(z)\right| \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

De plus $|h|$ est $\Gamma_0(N)$-invariante $\Rightarrow$ $|h|$ est continue sur $\Gamma_0(N)\backslash \mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \simeq X_0(N)$ qui est compact,

donc $|h|$ est bornée.

$\Rightarrow$ ϕ_f bornée sur $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ $\Rightarrow$ $\int_{Z(\mathbb{A})GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} |\phi_f|^2 < \infty$.

· Cuspidalité : ~~p25~~

Pour $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, le développement de Fourier de $f_{[\sigma]_k}$ est $\sum_{n\geq 1} a_n(s)\, q\, e^{\frac{2i\pi n}{h}z}$.

$$\Rightarrow \int_0^h f_{[\sigma]_k}(x+iy)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \forall \sigma \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \int_0^h \phi_f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & \\ & 1\end{pmatrix}\right)dx = 0$$

$\Rightarrow \forall \sigma \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \forall g_\infty \in GL_2(\mathbb{R})^+$,

$$\int_0^1 \phi_f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & xh\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\right)dx = 0.$$

Il faut prouver que $\displaystyle\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi_f(ng)\,dn = 0 \quad \forall g \in G.$

$g = \gamma g_\infty k_0 \qquad \gamma \in GL_2(\mathbb{Q}) \qquad g_\infty \in GL_2(\mathbb{R})^+ \quad k_0 \in K_0(N).$

$$\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi_f(ng)\,dn = 0 \iff \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi_f(n\gamma g_\infty)\,dn = 0$$

$GL_2(\mathbb{Q}) = B(\mathbb{Q})\, SL_2(\mathbb{Z})$. $\quad \gamma = b\sigma \quad b \in B \quad \sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$

Si $b \in B(\mathbb{Q})$, $\quad b^{-1}\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix} b = \begin{pmatrix}1 & \delta(b)m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi_f(nb\sigma g_\infty)\,dn = 0 \iff \int \phi_f(n\sigma g_\infty)\,dn = 0\right)$$

Soit $M \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\sigma^{-1}\begin{pmatrix}1 & M\prod \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma \subset K_0(N)$$

$M = (M_p)_p$ Choisissons pour M un multiple de h (h associé à σ).

$$\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi_f(n\sigma g_\infty)\,dn = \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi_f\left(\sigma^{-1}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\sigma g_\infty\right)dx$$

Or
$$\mathbb{A}/\mathbb{Q} \simeq \prod_p M_p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{R}/M\mathbb{Z}$$
$$\simeq \prod M_p\mathbb{Z}_p \times [0,M]$$

$$\Rightarrow \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi_f(n\sigma g_\infty)\,dn = \int_0^M \phi_f\Big(\underbrace{\sigma^{-1}\begin{pmatrix}1&Mx\\0&1\end{pmatrix}\sigma g_\infty}_{\in GL_2(\mathbb{R})^+}\Big)\,dx$$

$= 0$ par cuspidalité de f.

Réciproquement, on construit une flèche
$$\mathcal{A}^0\left(\tfrac{k}{2}(1-\tfrac{k}{2}), -k, N, \omega\right) \longrightarrow S_k(N,\psi)$$
$$\phi \longmapsto f_\phi(x+iy) = \phi_f\begin{pmatrix}y&x\\0&1\end{pmatrix} y^{-\frac{k}{2}}$$

Tous les calculs précédents s'inversent pour montrer que $f_\phi \in S_k(N,\psi)$ et $\phi_{f_\phi} = \phi$, $f_{\phi_f} = f$. $\square$

On fixe maintenant π représentation automorphe cuspidale telle que $\pi_\infty \simeq \mathcal{D}(k,+) \oplus \mathcal{D}(-k,-)$ et
~~$\pi^{K_0(N)} \neq \emptyset$~~
$\mathcal{A}^0\left(\tfrac{k}{2}(1-\tfrac{k}{2}), -k, N, \omega\right) \cap \pi \neq \{0\}$, c'est-à-dire que π contient un vecteur ϕ tel que
$$\phi(g k_0) = \psi(k_0)\,\phi(g) \qquad \forall k_0 \in K_0(N).$$
$\pi = \bigotimes \pi_p \otimes \pi_\infty$. Les composantes π_p de π permettent de définir une fonction L associée à π.

Si $p \nmid N$, $\pi_p^{K_p} \neq 0$

donc comme π_p est irréductible, $\dim \pi_p^{K_p} = 1$.

<u>Définissons les opérateurs de Hecke</u> : p quelconque.

$$K_p^r = K_p \begin{pmatrix} p^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p$$

$\phi \in \pi$ $\quad$ ~~$T_p \phi(g) = \int_{K_p^r} \phi(gh)$~~

$$T_{p^r} \phi(g) = \frac{p^{\frac{k}{2}}}{\mathrm{vol}(K_p(N))} \int_{K_p(N)} \Psi(k)^{-1} \phi\left(g k \begin{pmatrix} p^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dk.$$

Si $p \nmid N$, Ψ est ~~nul~~ trivial sur K_p et $\mathrm{vol}(K_p) = 1$,

donc $\displaystyle T_{p^r}\phi(g) = p^{\frac{k}{2}} \int_{K_p} \phi\left(g k \begin{pmatrix} p^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dk$

$$= p^{\frac{k}{2}} \int_{K_p^r} \phi(gh)\, dh.$$

T_{p^r} agit uniquement sur la composante π_p.
De plus si $p \nmid N$, T_{p^r} stabilise $\pi_p^{K_p}$ et agit par multiplication par un scalaire c_{p^r}.
La fonction L (partielle) associée à π est par définition

$$L(\pi, s) = \prod_{p \nmid N} \left(\frac{1}{1 - c_p p^{-s} + p^{k-1} p^{-2s}} \right)$$

Nous allons prouver que ce produit converge pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ et qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe à $\mathbb{C}$.

<u>Explicitons T_p $p \nmid N$</u> $\quad K_p \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} K_p = \bigcup_{j=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p \sqcup \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix} K_p$

$$\phi \in \mathcal{A}^0\left(\tfrac{k}{2}\left(1-\tfrac{k}{2}\right), -\lambda, N, \omega\right) \qquad f = \Phi\phi.$$

$$T_p f(x+iy) = p^{\frac{k}{2}-1} y^{-\frac{k}{2}} \Big[\sum_{j=0}^{p-1} \phi\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\infty \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_p \right) + \phi\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\infty \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix}_p \right) \Big]$$

$$= p^{\frac{k}{2}-1} y^{-\frac{k}{2}} \Big[\sum_{j=0}^{p-1} \phi\left(\begin{pmatrix} p^{-1} & -p^{-1}j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\infty \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\infty \right) + \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^{-1} \end{pmatrix}_\infty \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\infty \right) \psi(p) \Big]$$

$$= p^{\frac{k}{2}-1} y^{-\frac{k}{2}} \Big[\sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{x+iy-j}{p} \right) y^{\frac{k}{2}} p^{-\frac{k}{2}} + f\big(p(x+iy) \big) \psi(p)\, y^{\frac{k}{2}} p^{\frac{k}{2}} \Big]$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{x+iy+j}{p} \right) + p^{k-1} \psi(p) f\big(p(x+iy)\big).$$

Ainsi au niveau du développement de f en série de Fourier $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \quad (q = e^{2i\pi z})$,

on a $\quad T_p f(z) = \sum_{n \geq 1} \left(a_{np} q^n + p^{k-1} \psi(p) a_n q^{np} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{a_n(T_p f) = a_{np}(f) + p^{k-1} \psi(p) a_{\frac{n}{p}}}$$

On admet les relations suivantes entre les T_{p^r} (voir exposé sur Satake)

$$T_{p^r} = T_p T_{p^{r-1}} - p^{k-1} \psi(p) T_{p^{r-2}}$$

De plus par définition, si $\ell \neq p$, $\quad T_{p^r} T_{\ell^s} = T_{\ell^s} T_{p^r}$

On obtient alors par récurrence

Si $n \wedge N = 1$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$a_m(T_n f) = \sum_{d \mid pgcd(n,m)} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).$$

En particulier, $\boxed{a_1(T_n f) = a_n(f)}$.

Si $p \mid N$, on a $K_p(N) \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} K_p(N) = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p(N)$,

ainsi $T_p f(x+iy) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{x+iy+j}{p}\right)$

et donc $a_m(T_p f) = a_{mp}(f)$.

Nous allons utiliser toutes ces relations entre opérateurs de Hecke et coefficients des formes modulaires pour prouver le prolongement méromorphe de la fonction L d'une ~~forme~~ représentation automorphe cuspidale π telle que

$\pi_\infty \simeq D(k,+) \oplus D(-k,-)$

et $\pi^{K_0(N),\omega} \neq 0$ où $\pi^{K_0(N),\omega} = \{ \phi \in \pi,\ \phi(g k_0) = \omega(k_0) \phi(g) \}$

Remarque : D'après un résultat de Casselman, il existe toujours un N tel que $\pi^{K_0(N),\omega} \neq 0$.

Comme $\pi = \otimes \pi_p \otimes \pi_\infty$ et pour $p \nmid N$, $\dim \pi_p^{K_p} = 1$,

$\forall \phi \in \pi_K$, $T_p \phi = c_p \phi$ pour $p \nmid N$.

La fonction L associée à π est alors, formellement,

$$L(\pi, s) = \prod_{p \nmid N} \left(\frac{1}{1 - c_p p^{-s} + \omega(p) p^{k-1} p^{-2s}} \right)$$

<u>Remarque</u> : C'est une fonction L partielle, nous n'avons pas tenu compte des $p \mid N$ et de la place ∞

Soit donc $\phi \in \mathcal{A}^0\left(\frac{k}{2}(1-\frac{k}{2}), -k, N, \omega\right) \cap \Pi$.

$f = f_\phi$.

D'après ce qui précède, $T_p f = c_p f$ pour $p \nmid N$.

$\Rightarrow \quad a_p(f) = c_p \, a_1(f) \quad \forall p \nmid N$.

<u>Proposition</u> : Il existe $\tilde{f} \in S_k(N^*, \psi)$ telle que $\cancel{a_m(\tilde{f}) \neq a_m(f)}$ $T_p \tilde{f} = c_p \tilde{f}$ si $p \nmid N$ et $a_1(\tilde{f}) \neq 0$.

Preuve : Il suffit de prouver qu'il existe n premier à N tel que $a_n(\tilde{f}) \neq 0$. Car alors, si c_n est la vp de T_n sur $\tilde{f}$, $a_n(\tilde{f}) = c_n \, a_1(\tilde{f})$.

Soit donc $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_m(f) \neq 0$.

$m = n \prod p_i^{\alpha_i}$ avec $n \wedge N = 1$ et $p_i \mid N$.

Alors $a_{\frac{m}{p_i}}(T_{p_i} f) = a_m(f)$

$\cdots \quad a_n\left(\prod (T_{p_i})^{\alpha_i} f\right) = a_m(f) \neq 0$.

Donc $\tilde{f} = \prod_i T_{p_i}^{\alpha_i} f \in S_k(N, \psi)$ et $a_n(\tilde{f}) \neq 0$ pour un $n \wedge N = 1$. Donc $\tilde{f}$ convient. $\square$

<u>Proposition</u> : Sous les notations précédentes, il existe $g \in S_k(N^2, \psi)$ tel que $a_1(g) = 1$,

$T_p g = c_p g$ si $p \nmid N$ et $a_m(g) = 0$ si $\mathrm{pgcd}(m, N) \neq 1$.

Preuve : Si $p \mid N$, $T_p(\tilde{f}) = \sum_{n \geq 1} a_{np}(\tilde{f}) \, q^n$.

Posons $\Theta_p(\tilde{f}) = T_p(\tilde{f})\Big|_{\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & p \end{smallmatrix}\right)\right]_k}$.

Alors $\theta_p(f) = \sum_{n\geq 1} a_{np}(f)\, q^{np}$.

On vérifie alors que $\tilde{g} = \prod_{p|N} (1-\theta_p) f$ vérifie

$$\tilde{g} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n\wedge N = 1}} a_n(f)\, q^n.$$

Comme $a_1(\tilde{g}) = a_1(f) \neq 0$, $g = a_1(f)^{-1}\,\tilde{g}$ convient. □.

On a donc $g \in S_k(N^2, \psi)$ telle que

$$T_n g = c_n g \text{ si } n\wedge N = 1 \text{ et}$$

$$g = \sum_{n\wedge N=1} c_n q^n,$$ ~~Comme~~

La fonction L de g est

$$L(g,s) = \sum_{n\geq 1} a_n(g)\, n^{-s} = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}.$$

Comme $c_{p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}} = \prod_i c_{p_i^{\alpha_i}}$,

$$L(g,s) = \prod_i \left(\sum_n c_{p_i^{\alpha_i}}\, p_i^{-\alpha_i s} \right)$$

La relation $T_{p^r} = T_p T_{p^{r-1}} - p^{k-1}\psi(p)\, T_{p^{r-2}}$ implique

$$c_{p^r} = c_p c_{p^{r-1}} - p^{k-1}\psi(p)\, c_{p^{r-2}}$$

et donc $$\sum_n c_{p^n} p^{-ns} = \frac{1}{1 - c_p p^{-s} + p^{k-1}\psi(p) p^{-2s}}$$

D'où $\boxed{L(g,s) = L(\pi, s)}$.

On applique alors le théorème suivant sur les fonctions L de formes modulaires

<u>Théorème</u> : Si $f \in S_k(N,\psi)$, la série
$$\sum_{n \geq 1} a_n(f) \frac{1}{n^s}$$
converge uniformément sur tout compact de $\{s \in \mathbb{C},\ Re(s) > 1 + \frac{k}{2}\}$ et a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : La convergence de la série résulte de l'estimation $a_n(f) = O(n^{\frac{k}{2}})$

($a_n(f) = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n (x+iy)} dx \quad y > 0$.

et on utilise $|y^{\frac{k}{2}} f(x+iy)|$ bornée).

On pose alors
$\Lambda_N(f)(s) = (2\pi)^{-s} N^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) L(s,f)$, il est facile de vérifier que
$$\boxed{\Lambda_N(f)(s) = N^{\frac{s}{2}} \int_0^\infty f(it)\, t^s \frac{dt}{t}}.$$

Posons, pour $f \in S_k(N,\psi)$, $W_N(f) = i^k f|_{\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\right]_k}$.

$W_N : S_k(N,\psi) \xrightarrow{\sim} S_k(N,\overline{\psi})$.

Alors
$$\Lambda_N(f)(s) = \int_0^\infty f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^s \frac{dt}{t}$$
$$= \int_1^\infty f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^s \frac{dt}{t} + \int_0^1 f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^s \frac{dt}{t}$$
$$= \int_1^\infty f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^s \frac{dt}{t} + \int_0^1 W_N(f)\left(\frac{i}{\sqrt{N}\,t}\right) t^{s-k} \frac{dt}{t}$$
$$= \int_1^\infty f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^s \frac{dt}{t} + \int_1^\infty W_N(f)\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^{k-s} \frac{dt}{t}$$

Comme $W_N^2 = id$, on a

$$\Lambda_N(W_N(f))(k-s) = \Lambda_N(f)(s)$$
$$\forall \, \mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}+1.$$

Comme $f(it) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(e^{-\frac{2\pi t}{\sqrt{N}}}\right)$,

$$\int_1^\infty f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^s \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \int_1^\infty W_N(f)\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right) t^s \frac{dt}{t}$$

sont des fonctions de s définies sur $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\Lambda_N(f)(s)$ se prolonge en une fonction ~~holomorphe~~ sur $\mathbb{C}$. $\Rightarrow$ $L(f,s)$ aussi $\Rightarrow$ $L(\pi,s)$ aussi $\square$

<u>Remarque</u>. L'utilisation de l'opérateur W_N ne donne pas une équation fonctionnelle pour tous les $f \in S_k(N,\psi)$.
Néanmoins, W_N stabilise $S_k(N,1)$ et W_N^2.
Ainsi $S_k(N,1) = \mathrm{Ker}(W_N - id) \oplus \mathrm{Ker}(W_N + id)$.
Si $f \in \mathrm{Ker}(W_N \pm id)$, on a

$$\Lambda_N(f)(k-s) = \mp \Lambda_N(f)(s).$$

Au final si on décompose $S_k(N,1) = \oplus \, \mathbb{C} f_i$ sur une base de vecteurs propres (f_i) pour les T_n, $n \wedge N = 1$, et que l'on pose $\Lambda = \prod_i \Lambda_N(f_i)$, on a

$$\Lambda(k-s) = (-1)^{\dim \mathrm{Ker}(W_N + id)} \Lambda(s).$$