DÉCOMPOSITION DES FORMES CUSPIDALES POUR $GL_2(\mathbb{A})$

I Notations et rappels :

1) $GL_2(\mathbb{A})$:

$\mathbb{A}$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, à savoir le produit restreint :

$$\mathbb{A} := \prod_{p\leq\infty} (\mathbb{Q}_p : \mathbb{Z}_p) = \left\{ (x_p)_{p\leq\infty} : x_p \in \mathbb{Q}_p \ \forall p, \text{ et } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ pour presque } \forall p \right\}$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_\infty \times \mathbb{A}_f$$

On définit, si $G/\mathbb{Q}$ est un groupe algébrique linéaire,

$$G(\mathbb{A}) := \prod_{p\leq\infty} \left(G(\mathbb{Q}_p) : G(\mathbb{Z}_p) \right),$$ muni de la topologie de produit restreint.

où $G(\mathbb{Z}_p)$ est défini grâce à un plongement $G \hookrightarrow GL_{n/\mathbb{Q}}$ et à la donnée d'une structure entière sur $GL_{n,\mathbb{Q}}$

rq : $G(\mathbb{A})$ est ~~...~~ localement compact.

Quelques notations : - $G = GL_2$

- $Z := Z(G)$, centre de G - $P := \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ parabolique minimal.
- $N := \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset GL_2$ (radic. unipotent de P)
- $M := \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \subset GL_2$ (Lévi de P).

$G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{A})$ est un sous-groupe discret (plongement diagonal),
(analogie avec $SL_2(\mathbb{Z}) \subset SL_2(\mathbb{R})$)

$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ n'est pas compact, et il n'a pas un volume fini

En revanche, $Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ a un volume fini (il n'est pas compact non plus)

en effet, si $G^1 := \{ g \in G(\mathbb{A}) : |\det g|_{\mathbb{A}} := \prod_{p\leq\infty} |\det g_p|_p = 1 \}$
alors $G(\mathbb{Q}) \subset G^1$ (formule du produit)
et $G(\mathbb{Q})\backslash G^1$ est de volume fini (Borel - Harish-Chandra)
et on a une identification $Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \cong Z^1 G(\mathbb{Q})\backslash G^1$

rq : on notera $G(\mathbb{A}) = G_\infty \times G(\mathbb{A}_f)$, où $G_\infty := G(\mathbb{R})$ et $G(\mathbb{A}_f) := \prod_{p<\infty} G(\mathbb{Q}_p)$

Quelques espaces de fonctions sur $G(\mathbb{A})$:

def : ω est un caractère (unitaire) de $Z(\mathbb{A})$, trivial sur $Z(\mathbb{Q})$.

On note $L^2\left(Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \omega\right)$ l'ensemble des fonctions $f : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$

telles que $f(z.\gamma.g) = \omega(z)\, f(g) \quad \forall z \in Z(\mathbb{A}), \gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A})$

et telles que $|f|^2$ est intégrable sur $Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$.

$\rightarrow$ on dispose de la représentation régulière à droite :

$$R_\omega : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathcal{L}\left(L^2\left(Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \omega\right)\right)$$

définie par : $R_\omega(g) \cdot f\,(x) := f(x.g)$.

On va aussi utiliser des fonctions lisses sur $G(\mathbb{A})$, comme <u>fonctions tests</u> :

def : une fonction $f : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite lisse si

- f est continue
- $\forall x_\infty \in G_\infty$, $G(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{f_{x_\infty}} \mathbb{C}$ est localement constante à support compact.
- $\forall x_f \in G(\mathbb{A}_f)$, $G_\infty \xrightarrow{f_{x_f}} \mathbb{C}$ est lisse ($\cdot\ \mathcal{C}^\infty$)

Def : $*\ C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})' := \Big\{ f : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ lisse telle que $f(zg) = \omega(z)^{-1} f(g)$

f à support compact modulo $Z(\mathbb{A})$. $\Big\}$

$*\ C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1}) := \Big\{$ combinaisons linéaires à supp. compact mod. $Z(\mathbb{A})$ de fonctions $\phi = \prod_p \phi_p$

avec
- $\phi_p : G(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathbb{C}$ localement constante si p fini
- $\phi_\infty : G(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ lisse à décroissance rapide

tq $\phi_p(g_p) = \begin{cases} \omega^{-1}(z_p) & \text{si } g_p = z_p k_p \in Z(\mathbb{Q}_p).K_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

pour presque toute place p $\Big\}$

On va montrer le théorème principal pour des fonctions dans $C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$, et il reste valable pour $C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})'$ (voir Langlands).

2) Rappels d'analyse fonctionnelle :

On rappelle ici quelques propriétés de certains opérateurs entre espaces de Hilbert :

Def : Soit H un espace de Hilbert séparable. $T : H \longrightarrow H$ un opérateur.

- T est dit compact si l'image de la boule unité est relativement compacte (i.e d'adhérence compact).
- T est dit "Hilbert-Schmidt" si pour une (toute) base orthonormée (e_n) (hilbertienne) de H, $\sum_n \|Te_n\|^2 < +\infty$.
- T est dit "à traces" si pour toutes bases orthonormées (e_i), (f_j) de H, $\sum_{i,j} |\langle Te_i, f_j \rangle| < +\infty \iff \sum_i |\langle Te_i, e_i \rangle| < +\infty$

Exemple : si $H = L^2(X, \mu)$, $K \in L^2(X \times X)$, $Tf(x) := \int_X K(x,y)\, f(y)\, dy$ est HS

rq : si T est à traces, on définit $\mathrm{Tr}(T) := \sum_i \langle Te_i, e_i \rangle$.

Prop : 1. Si T est Hilbert-Schmidt ou à traces, alors T est compact.
2. Si S et T sont Hilbert-Schmidt, alors $S \circ T$ est à traces.

Preuve de 2 : $K := S \circ T$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ke_k, e_k \rangle| = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle STe_k, e_k \rangle| = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_k, S^* e_k \rangle|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\| \, \|S^* e_k\|$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|S^* e_k\|^2 \right)^{1/2} = \|T\|_2 \, \|S^*\|_2$$

$$= \|T\|_2 \, \|S\|_2 < +\infty$$

□

Thm : si $T : H \longrightarrow H$ est compact et autoadjoint, non-nul,

alors T a au moins un vecteur propre pour une valeur propre $\neq 0$.
De plus, toute valeur propre $\neq 0$ a multiplicité finie, et T a au plus un nombre dénombrable de valeurs propres, 0 étant la seule valeur d'adhérence possible.

Remarques sur les mesures de Haar utilisées :

* on fixe une mesure de Haar sur $\mathbb{A}$, de sorte que $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ soit de volume 1
* on fixe une mesure de Haar sur $\mathbb{A}^\times$, ~~de la façon suivante~~ et on munit $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ de la mesure quotient

On identifie $\mathbb{Q}_\infty^+ \subset \mathbb{A}^\times$, $\mathbb{Q}_\infty^+ \cong \mathbb{R}^{+\times}$, et on munit $\mathbb{R}^{+,\times}$ de sa mesure de Haar $\frac{dx}{x}$.

$\longrightarrow$ mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_\infty^+$.

Enfin $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \cong \mathbb{Q}_\infty^+ \times \mathbb{Q}^\times\backslash(\mathbb{A}^\times)^1$, donc cela définit une mesure de Haar sur $\mathbb{Q}^\times\backslash(\mathbb{A}^\times)^1$.

* on considère $G = GL_2$, $P(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})\, M(\mathbb{A})$

$$P(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix},\quad N(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad M(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

l'identification $N(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}$ définit une mesure de Haar sur $N(\mathbb{A})$ dn

$Z(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}^\times$ définit une mesure de Haar sur $Z(\mathbb{A})$.

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \longleftrightarrow u$$

Enfin $M(\mathbb{A}) = \mathbb{A}^\times . Z(\mathbb{A})$ $\longrightarrow$ mesure de Haar sur $M(\mathbb{A})$ dm

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (dm = du \cdot dv)$$

sur $P(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})\, M(\mathbb{A})$, on peut définir

$d_r p := dn \cdot dm$ (à droite)

ou $d_\ell p := d_r(p^{-1})$ (à gauche)

On fixe ~~dk~~ mesure de Haar sur K. Alors $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}).K$ est muni de $dg := d_\ell p\, dk = |h(p)|^{-1} d_r p\, dk$, où $p = \begin{pmatrix} a & * \\ & b \end{pmatrix}$, $h(p) := \frac{a}{b}$

II. Représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2_0\left({}_{Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})}\backslash G(\mathbb{A}), \omega\right)$:

On a rappelé la définition de la représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2(\omega) := L^2(\text{—}, \omega)$

<u>Def</u> : $L^2_0(\omega) := \left\{ f \in L^2(\omega) : \int_{N(k)\backslash N(\mathbb{A})} f(ng)\, dn = 0 \text{ pour presque tout } g \right\}$

On constate que $L^2_0(\omega)$ est invariant par l'action de $G(\mathbb{A})$.

On définit enfin, pour toute $\varphi \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

l'opérateur $R_\omega(\varphi) : \left| \begin{array}{l} L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\omega) \\ f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_{G(\mathbb{A})} \varphi(g) \cdot f(x \cdot g) \cdot dg \right) \end{array} \right.$

Le théorème que l'on va montrer est le suivant : (dû à Gelfand et Piatetski-Shapiro)

<u>Thm</u> : Soit $\varphi \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

(i) l'opérateur $R_\omega(\varphi) : L^2_0(\omega) \longrightarrow L^2_0(\omega)$ est Hilbert-Schmidt et à traces.

(ii) $L^2_0(\omega)$ se décompose comme somme directe (discrète) de représentations irréductibles de $G(\mathbb{A})$, avec multiplicités finies :

$$L^2_0(\omega) = \bigoplus_{\pi \text{ irred}} m_\pi \pi \quad , \text{ où } m_\pi = \dim\left(\mathrm{Hom}\left(\pi, L^2_0(\omega)\right)\right)$$

→ ~~Plus~~ précisément, on peut montrer que la représentation R_ω dans $L^2(\omega)$ se décompose :

$$L^2(\omega) = \underbrace{L^2_0(\omega)}_{\substack{\text{discrète} \\ \text{(somme directe)}}} \oplus \underbrace{L^2_{cont}(\omega)}_{\substack{\text{continue} \\ \text{(intégrale directe)}}} \oplus \underbrace{L^2_{res}(\omega)}_{\left(\bigoplus_{\chi^2=\omega} \mathbb{C}_{\chi \circ \det}\right)}$$

La suite de cette partie II est consacrée à la preuve de ce théorème.

1) <u>Théorie de la réduction</u> (pour $GL_2(\mathbb{A})$) :

$K := \prod_{p \leq \infty} K_p$, où $\left| \begin{array}{l} K_p = GL_2(\mathbb{Z}_p) \text{ si } p < \infty \\ K_\infty = SO(2) \end{array} \right.$

$K \subset G(\mathbb{A})$ sous-groupe compact.

On a : $GL_2(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \cdot K = N \cdot M \cdot K$.

On pose :

Pour tout $c > 0$, on définit :

$$M(c) := \left\{ m = \begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \in M(\mathbb{A}), \middle| \begin{array}{l} t_1, t_2 \in \mathbb{Q}_\infty^{+\times} = \mathbb{R}^{+\times}, \frac{t_1}{t_2} \geq c \\ a, b \in \{1\} \times \prod_{p \text{ fini}} \mathbb{Z}_p^\times \end{array} \right\}$$

En particulier, si $h\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} := \left|\frac{x}{y}\right|$, et plus généralement
$$h\left(\begin{pmatrix} a & x \\ & b \end{pmatrix} \cdot k\right) := \left|\frac{a}{b}\right| \in \mathbb{A}^\times$$

$$\forall m \in M(c),\ h(m) \geq c.$$

<u>Prop</u> (Gauss ?) On note $\mathfrak{S} := \Omega_N \cdot M(c) \cdot K$, où Ω_N est un compact de $N(\mathbb{A})$

Pour Ω_N assez grand et $c \leq 2/\sqrt{3}$,

$$G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q}) \cdot \mathfrak{S}, \text{ i.e } \mathfrak{S} \text{ se surjecte dans } G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})$$

<u>Preuve</u> : on va prendre $\Omega_N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \prod_{p \text{ fini}} \mathbb{Z}_p \right\}$.

On va définir une "hauteur" sur $\mathbb{A}^2$:

- $x \in \mathbb{A}^2$ est dit primitif si $\exists g \in GL_2(\mathbb{A})$ tq $g \cdot x \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_p^2$, $\|x\|_p := \max(|x_1|_p, |x_2|_p)$.
- si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

On définit, pour $x = (x_p) \in \mathbb{A}^2$ primitif, $\|x\| := \prod_p \|x_p\|_p$ (preservée par K)

La propriété importante de $\| \ \|$ (utilisant le fait que $k^2 \subset \mathbb{A}^2$ est discret), est la suivante :

$$\forall B > 0,\ \forall g \in GL_2(\mathbb{A}),\ \{\xi \in k^2 \setminus \{(0,0)\} : \|\xi g\| < B\} \text{ est fini modulo } k^\times \quad (*)$$

Par conséquent, $\left(\text{en utilisant la relation } |h(g)|^{-1} = \dfrac{\|(0,1)g\|^2}{|\det g|}\right)$

On fixe $g \in GL_2(\mathbb{A})$.

Par $(*)$, quitte à remplacer g par $\gamma \cdot g$, $\gamma \in G(\mathbb{Q})$,

on peut supposer que $\|(0,1)g\| \leq \|\xi g\|$, $\forall \xi \in k^2 \setminus \{(0,0)\}$

On décompose $g = n\, a\, k$.

Alors $\|(0,1).g\| = \|(0,1).n.a\|$ (invariance par K).

$$n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}$$

En translatant g (à gauche) par un élément de $M(\mathbb{Q})$, (on a : $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \mathbb{Q}_\infty^+ . \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ car le nombre de classes de $\mathbb{Q}$ est 1)

on peut toujours supposer que $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_\infty^+ \times \prod_{p \text{ fini}} \mathbb{Z}_p^\times$.

On utilise alors le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : $\mathcal{D} := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \prod_p \mathbb{Z}_p$ est un domaine fondamental pour ${}_{\mathbb{Q}}\backslash\mathbb{A}$

<u>Preuve du lemme</u> :

Soit $x \in \mathbb{A}$. $\exists m \in \mathbb{Z}$ tq $m.x \in \mathbb{Z}_p$, $\forall$ p finie.

on note $S := \{p : p \mid m\}$.

Par le lemme chinois, $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ tq $mx \equiv \alpha \mod p^r$ $\forall p \in S$.

Alors : pour r assez grand, $x - \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{R} \times \prod_{p \text{ finie}} \mathbb{Z}_p$

Enfin, on modifie $x - \frac{\alpha}{m}$ par un élément $n \in \mathbb{Z}$ de sorte que $x - \frac{\alpha}{m} - n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \prod_p \mathbb{Z}_p$ $\square$

On peut donc modifier g par un élément de $G(\mathbb{Q})$ de sorte que

$$n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } x \in \mathcal{D}.$$

Finalement, on a : $\gamma g = nak$, $\gamma \in G(\mathbb{Q})$, $k \in K$.

$$n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathcal{D}$$

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}_\infty^+ \times \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$$

et $\|(0,1)na\| \leq \|\xi a\|$, $\forall$ $\xi \neq (0,0)$

Donc, pour $\xi = (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

alors $\|(0,1)\cdot n\cdot a\| \leqslant \|\xi \cdot n \cdot a\| \iff |\beta| \leqslant \|(\alpha\lambda, \beta(\lambda x+\mu))\|$

$$\text{donc :} \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \leqslant \left\|\left(\lambda, \frac{\beta}{\alpha}(\lambda x+\mu)\right)\right\|$$

notons $E := \beta/\alpha$, on a $|E| \leqslant \|(1, E(x+\mu'))\| \quad \forall \mu' \in \mathbb{Q}$

Pour $\mu' = 0$, on obtient $|E| \leqslant \|(1, Ex)\|$

c'est-à-dire, puisque $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \prod_p \mathbb{Z}_p$, et $E \in \mathbb{Q}_\infty^\times \times \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$,

$$|E| \leqslant \sqrt{1 + \frac{|E|^2}{4}}$$

Donc $|E| \leqslant 2/\sqrt{3}$, ~~[illegible]~~ $\square$

Renarque : le même genre d'arguments montre que :

il n'y a qu'un nombre fini de $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ tels que $\gamma\mho \cap \mho \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow \mho$ domaine fondamental pour le quotient $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})$

Formule de Poisson adélique.

$\mathcal{S}(\mathbb{A}) := \{$ combi. linéaires des fonctions $\phi = \prod_{p \in S} \phi_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$

où $S \ni \infty$ ensemble fini de places

et $\phi_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ (espace de Schwartz) $\}$

On a une transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{A})$:

si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$, $\hat{\phi}(y) := \int_{\mathbb{A}} \phi(x) \cdot e^{2i\pi x y} \cdot dx$

(si $\phi = \bigotimes_p \phi_p$, alors $\hat{\phi} = \bigotimes_p \hat{\phi}_p$)

<u>Thm</u> : si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$, $\sum_{x \in \mathbb{Q}} \phi(x) = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \hat{\phi}(x)$

<u>remarque</u> : $\mathbb{A}$ s'identifie à son dual

via : $e^{2i\pi x y} := \left(\prod_{p \text{ fini}} \left(e^{2i\pi \cdot x_p y_p}\right)\right) \cdot e^{-2i\pi x_\infty y_\infty}$, $x, y \in \mathbb{A}$

où $e^{2i\pi z} := e^{2i\pi \cdot \{z\}}$, où $\{z\} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est la "partie fractionnaire" de z, i.e $z - \{z\} \in \mathbb{Z}_p$

$\forall z \in \mathbb{Q}_p$

2) <u>Preuve de (i)</u> : $R_\omega(\varphi)$ est H-S :

Soit $\mathfrak{S} \subseteq G(\mathbb{A})$ un tel ensemble de Siegel : $\mathfrak{S} = \Omega_N M(c).K$

$$\mathfrak{S} \subseteq G(\mathbb{A}) \text{ ouvert tq } \begin{cases} - \; G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q}).\mathfrak{S} \\ - \; \{\gamma \in G(\mathbb{Q}) : \gamma\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S} \neq \emptyset\} \text{ est fini} \end{cases}$$

(on voit $\mathfrak{S}$ comme un domaine fondamental pour $G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{A})$)

. On pose $\psi := R_\omega(\varphi).\phi \quad (\phi \in L^2_0)$:

alors par définition $\psi(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \varphi(x^{-1}y)\, \phi(y)\, dy$

$$= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \phi(y) \left(\sum_{n \in N(\mathbb{Q})} \varphi(x^{-1}ny) \right) dy$$

Posant $K(x,y) := \sum_{n \in N(\mathbb{Q})} \varphi(x^{-1}ny)$ (somme finie)

on a : $\psi(x) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \phi(y).K(x,y).dy$ (opérateur intégral)

<u>Formule de Poisson</u> : $\sum_{n \in N(\mathbb{Q})} \varphi(x^{-1}ny) = \sum_{n \in N(\mathbb{Q})} \int_{N(\mathbb{A})} \varphi(x^{-1}uy).e^{2i\pi nu}\, du$

$(\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A})\,?)$ (on identifie $N(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}$)

~~(la transformée de Fourier de~~ $\cancel{x \mapsto g \mapsto \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}y\right)}$ ~~en 0~~

~~est~~ $\cancel{\int_{N(\mathbb{A})} \varphi(xny^{-1})\,dn}$, ~~donc :~~

~~Ainsi on voit~~

Alors : on pose $H(x,y) := K(x,y) - \int_{N(\mathbb{A})} \varphi(x^{-1}uy)\, du$

puisque $\int_{N(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \phi(y) \left(\int_{N(\mathbb{A})} \varphi(x^{-1}uy).du \right) dy = 0$ car ϕ est cuspidale, On a donc écrit :

$$\Psi(y) := R_\omega(\varphi).\phi(y) = \int_{G(\mathbb{A})} \phi(x).H(x,y)\,dx$$

Avec $H(x,y) = \sum_{n\in N(\mathbb{Q})} \int_{N(\mathbb{A})} \varphi(y^{-1}ux).\, e^{2i\pi n u}\, du - \int_{N(\mathbb{A})} \varphi(y^{-1}u.x)\, du$

<u>Objectif</u> : majorer $H(x,y)$

Pour cela, on utilise les lemmes suivants : on fixe $\mathfrak{S} = \Omega_N . M(c).K$ un ensemble de Siegel.

<u>Lemme</u> : ~~si $z \in \mathfrak{S}$, alors~~ $\exists\, \Omega'_N$ compact $\subset N(\mathbb{A})$, tel que $z \in m_z . \Omega'_N . K$, dès que $z \in \mathfrak{S}$.

<u>Preuve</u> : décomposition d'Iwasawa : $z = n_z . m_z\, k_z$, $n_z \in \Omega_N$, $m_z \in M(c)$, $k_z \in K$.

donc $z \in m_z (m_z^{-1} \Omega_N\, m_z) . K$

or : $\{ m^{-1} . n . m,\ m \in M(c),\ n \in \Omega_N \}$

$$\| $$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} b^{-1} x \\ & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathcal{D},\ b \in \text{compact} \subseteq \mathbb{A}^\times,\ t = t_\infty \geq c \right\}$$

donc $\exists\, \Omega'_N$, indépendant de z tq

$\forall z \in \mathfrak{S},\ m_z^{-1} \Omega_N\, m_z \subset \Omega'_N$ $\square$

<u>Lemme</u> : $\forall y \in \mathfrak{S}, \forall x \in G(\mathbb{A})$

$\exists\, \Omega \subset M$ compact tq si $\varphi(y^{-1} n . x) \neq 0$ pour un $n \in N(\mathbb{A})$,

alors $m_x \in m_y . \Omega . Z(\mathbb{A})$

<u>Preuve</u> : $\Omega_\varphi := \mathrm{Supp}|\varphi|$ compact $\subset G(\mathbb{A})/Z(\mathbb{A})$

$y^{-1} n x \in \Omega_\varphi . Z(\mathbb{A}) \Rightarrow n . n_x . m_x . k_x \in m_y \Omega'_N K\, \Omega_\varphi Z(\mathbb{A})$ (par le lemme précédent)

Donc $(m_y^{-1}\, n . n_x . m_y) . m_y^{-1} . m_x \in \Omega'_N K \Omega_\varphi . K . Z(\mathbb{A})$

Or M normalise N, donc $m_y^{-1}(n.n_x).m_y \in N$

et $\begin{array}{ccc} M\times N & \longrightarrow & M.N \\ (m,n) & \longmapsto & m.n \end{array}$ (produit) est un homéomorphisme (car $M\cap N=\{0\}$)

Par conséquent, le fait que $\underbrace{m_y^{-1}(n n_x)\,m_y}_{\in N} \cdot \underbrace{m_y^{-1}\,m_x}_{\in M}$ soit dans le compact $\Omega_N'.K\Omega_y K$ de MN,

assure que $m_y^{-1}.m_x$ reste dans un compact de M. $\square$ (modulo $Z(\mathbb{A})$)

<u>Corollaire</u> : $\exists\, \Omega\subseteq M$ compact tel que :

$\forall x\in\sigma', y\in\sigma$, si $\varphi(y^{-1}.n x)\neq 0$ pour un $n\in N$

alors $m_y^{-1}.x\in\Omega\; Z(\mathbb{A})$

(mettre les 2 lemmes ensembles). (ici σ et σ' sont deux ens de Siegel fixés)

Utilisons ces résultats pour estimer $H(x,y)$:

On a : $$\int_{N(\mathbb{A})}\varphi(y^{-1}.u x).e^{2i\pi n u}.du=\int_{N(\mathbb{A})}\varphi\big(\underbrace{y^{-1}m_y}(m_y^{-1}.u.m_y)\underbrace{m_y^{-1}.x}\big)e^{2i\pi n u}.du$$

restent dans des compacts de $G(\mathbb{A})$ fixés quand $x\in\sigma'$, $y\in\sigma$ et $\varphi(y^{-1}nx)\neq 0$. (modulo $Z(\mathbb{A})$)

Or le morphisme $\begin{array}{ccc} G(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})\times C_c^\infty(G(\mathbb{A})) & \longrightarrow & C_c^\infty(G(\mathbb{A})) \\ (g_1, g_2, \varphi) & \longmapsto & \varphi(g_1^{-1}\cdot g_2) \end{array}$ est continu,

Donc l'ensemble $\left\{\begin{pmatrix} N(\mathbb{A}) \xrightarrow{\varphi_{x,y}} \mathbb{C} \\ n' \longmapsto \varphi(y^{-1}m_y\, n'\, m_y^{-1}.x)\end{pmatrix} \;\middle|\; x\in\sigma', y\in\sigma \text{ tq } \varphi(y^{-1}nx)\neq 0 \text{ pour un } n\in N(\mathbb{A})\right\}$

est un compact dans $C_c^\infty(N(\mathbb{A}))$ ($Z(\mathbb{A})$ agit par un caractère unitaire)

($N(\mathbb{A})$ étant fermé dans $G(\mathbb{A})$, la restriction $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))\longrightarrow C_c^\infty(N(\mathbb{A}))$ est continue)

On a donc :

$$\int_{N(\mathbb{A})} \varphi(y^{-1}ux)\, e^{2i\pi nu}\, du = \underbrace{h(m_y)}_{\substack{\text{fonction modulaire}\\ \text{sur } M(\mathbb{A})}} \cdot \int_{N(\mathbb{A})} \varphi_{x,y}(u') \cdot e^{2i\pi n h(m_y) u'}\, du'$$

(après le changement de variables $u' = m_y^{-1} u\, m_y$) avec $h\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} := \frac{a}{b}$

Donc $\displaystyle\int_{N(\mathbb{A})} \varphi(y^{-1}ux)\, e^{2i\pi nu}\, du = h(m_y)^{-1} \cdot \widehat{\varphi_{x,y}}\left(n\, h(m_y)\right)$

et en identifiant $N(\mathbb{A})$ avec $\mathbb{A}$,

on voit $C_c^\infty(N(\mathbb{A})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{A})$ (espace de Schwartz)

Alors les $\{ \widehat{\varphi_{x,y}} \,;\, y \in \mathfrak{S}, x \in \mathfrak{S}' \}$ forment un compact de $\mathcal{S}(\mathbb{A})$.

Donc $\exists\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ dominant toutes les $\widehat{\varphi_{x,y}}$, $y \in \mathfrak{S}, x \in \mathfrak{S}'$. $(**)$

Finalement :

$\forall y \in \mathfrak{S}$, $\displaystyle\Psi(y) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} H(x,y)\phi(x)\, dx$, et il existe $\Omega \subset M$ compact,

avec $H(x,y) \neq 0 \Rightarrow m_x \in m_y \cdot \Omega$

Donc : $\displaystyle|\Psi(y)| \leq \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})(m_y \cdot \Omega) \cdot K} |H(x,y)| \cdot |\phi(x)|\, dx = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})(m_y\Omega)K} \sum_{n \in \mathbb{Q}^\times} |h(m_y^{-1})| \, \Big|\widehat{\varphi_{x,y}}(n \cdot h(m_y)^{-1})\Big| \underbrace{|\phi(x)|}\, dx$

or sur $\mathfrak{S}$, $|h(m_y)| \geq c$, donc $N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})(m_y\Omega)K$ est contenu dans un quotient $N(\mathbb{Q})\backslash \mathfrak{S}'$, où $\mathfrak{S}' \subseteq G(\mathbb{A})$ est un autre ensemble de Siegel (indépendant de $y \in \mathfrak{S}$)

Donc : $\displaystyle|\Psi(y)| \leq C \cdot \int_{N(\mathbb{Q})\backslash \mathfrak{S}'} \sum_{n \neq 0} |\phi(x)|\, |h(m_y^{-1})| \cdot \Big|\widehat{\varphi_{x,y}}(n\, h(m_y)^{-1})\Big|\, dx$

$\forall y \in \mathfrak{S}$

$$\underset{(**)}{\leq} C \cdot |h(m_y^{-1})| \left(\int_{N(\mathbb{Q})\backslash \mathfrak{S}'} |\phi(x)|\, dx \right) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Q}^\times} \left| f(n\, h(m_y)^{-1}) \right|$$

Or $\displaystyle\int_{N(\mathbb{Q})\backslash\sigma'} |\phi(x)|\,dx \leq c'\left(\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} |\phi(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = C'\,\|\phi\|_{L^2}$

D'où finalement

$$\forall y\in\sigma,\ |\Psi(y)| \leqslant C\,\|\phi\|_{L^2}\,|h(m_y)|\sum_{n\in\mathbb{Q}^\times}|f(n\,h(m_y))|$$

Or $f\in\mathcal{S}(\mathbb{A})$,

Donc par décroissance rapide, $\forall N\geqslant 0,\ \exists C_N>0,$

$$\forall y\in\sigma,\ \sum_{n\in\mathbb{Q}^\times}|f(n\cdot h(m_y))| \leqslant C_N\,|h(m_y)|^{-N}$$

Donc $\forall y\in\sigma,\ |\Psi(y)|\leqslant C'_N\,\|\phi\|_{L^2}\,|h(m_y)|^{1-N}$

On considère alors le morphisme de restriction :

$$L^2_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\omega) \longrightarrow \underbrace{L^2_0(\sigma,\omega)}_{\text{défini de manière évidente}}$$

Ce morphisme est une isométrie, et on identifie $L^2_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\omega)$ à un sous-espace de Hilbert fermé de $L^2_0(\sigma,\omega)$.

On a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
L^2_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\omega) & \longrightarrow & L^2_0(\sigma',\omega)\\
\Big\downarrow R_\omega(\varphi) & & \Big\downarrow R_\omega(\varphi)'\\
L^2_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\omega) & \longrightarrow & L^2_0(\sigma,\omega)
\end{array}$$

Donc il suffit de montrer que $R_\omega(\varphi)'$ soit Hilbert-Schmidt pour que $R_\omega(\varphi)$ le soit.

On a montré : $\forall y\in\sigma,\ |R_\omega(\varphi)'\phi(y)|\leqslant C_N\,\|\phi\|_{L^2}\,|h(m_y)|^{1-N}$

On vérifie alors que :

Pour N assez grand, la fonction $\left| \begin{array}{l} \sigma \longrightarrow \mathbb{C} \\ y \longmapsto |h(m_y)|^{1-N} \end{array} \right.$

est dans L^2

On conclut alors par le lemme suivant :

<u>Lemme</u> (Godement)

Soit (X,μ) un espace mesuré, $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ un opérateur continu avec $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sous-espaces fermés de $L^2(X,\mu)$

Si $\exists\, \rho \in L^2(X,\mu)$ tq $|T\phi(x)| \leqslant \rho(x) \cdot \|\phi\|_{L^2}$ $\forall \phi \in \mathcal{H}$

Alors T est Hilbert-Schmidt.

<u>Preuve</u> : quitte à compléter T par 0 sur $\mathcal{H}^\perp \subset L^2(X,\mu)$, on peut supposer $\mathcal{H} = L^2(X,\mu) = \mathcal{H}'$

Alors $\begin{array}{l} L^2(X,\mu) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi \longmapsto T\phi(y) \end{array}$ est une forme linéaire continue pour presque tout $y \in X$,

donc $T\phi(y) = \displaystyle\int_X K(x,y)\cdot \phi(x)\, dx$

et par Cauchy-Schwarz, $\displaystyle\int_X |K(x,y)|^2 dx \leqslant |\rho(y)|^2$ pour presque tout y

donc $\displaystyle\int_{X\times X} |K(x,y)|^2 dx\, dy \leqslant \int_X |\rho(y)|^2 dy < +\infty$

Donc $K \in L^2(X\times X)$, donc T est Hilbert-Schmidt $\square$.

Finalement, on a bien montré que $R_\omega(\varphi)'$, et donc $R_\omega(\varphi)$, étaient Hilbert-Schmidt.

* <u>Montrons désormais que $R_\omega(\varphi)$ est à traces</u> :

$\varphi \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$. On veut écrire $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i * \psi_i$, $\varphi_i, \psi_i \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}$

On utilise un résultat de Dixmier-Malliavin qui affirme qu'une fonction C^∞ à support compact sur $G(\mathbb{R})$ se décompose comme somme finie

de convolutions de paires de fonctions ~~C^∞~~ à support compact sur $G(\mathbb{R})$.
Aux places finies, le résultat similaire est clair (convoler avec une indic-
-atrice de sous-groupe compact ouvert).
Finalement, φ s'écrit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i * \psi_i$, $\varphi_i, \psi_i \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

$$\text{Donc } R_\omega(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} R_\omega(\varphi_i) \circ R_\omega(\psi_i)$$

et $\forall i$, $R_\omega(\varphi_i)$ et $R_\omega(\psi_i)$ sont H-S par le point précédent,
donc leur produit est à traces, donc <u>$R_\omega(\varphi)$ est à traces</u>.

2) <u>Décomposition discrète de $L^2_o(\omega)$</u>: (preuve de (ii))

On considère des fonctions $\varphi \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$ vérifiant :

$$(C) \quad \left|\begin{array}{l} a)\ \varphi(g) \geq 0,\ \forall g \\ b)\ \varphi(g) = \varphi(g^{-1}),\ \forall g \\ c)\ \displaystyle\int_{G(\mathbb{A})} \varphi(g)\,dg = 1 \\ d)\ \text{Supp}\,\varphi \text{ arbitrairement petit contenant } 1. \end{array}\right.$$

Le point étant que si φ vérifie a), b), alors $R_\omega(\varphi)$ est autoadjoint.

en effet, $R_\omega(\varphi)^* \phi = \int \overline{\varphi(g)} \cdot R_\omega(g)^* \, dg \underset{R_\omega \text{ unitaire}}{=} \int \overline{\varphi(g)} R_\omega(g^{-1})\, dg$

$$\underset{a), b)}{=} \int \varphi(g^{-1}) R_\omega(g^{-1})\, dg = R_\omega(\varphi) \cdot \phi$$

Pour obtenir la décomposition discrète, il suffit, grâce au lemme de Zorn, de construire un sous-espace invariant irréductible $\neq 0$ dans $L^2_o(\omega)$

$\forall \varphi$ vérifiant a), b), c), $R_\omega(\varphi)$ est autoadjoint et compact (cf (i)), donc $R_\omega(\varphi)$ a un spectre discret dénombrable, et les valeurs propres $\neq 0$ ont multiplicité finie.

On peut donc écrire

$$\mathcal{L}^2_0 = H_\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} H_{\varphi,k}$$

où – H_φ est le sous espace correspondant à la v.p 0

– $H_{\varphi,k}$ est le ss-espace correspondant à la vp $\lambda_k \neq 0$

($H_{\varphi,k}$ est de dimension finie)

On note $H_1 :=$ sous-espace fermé minimal de $\mathcal{L}^2_0$ contenant tous les $H_{\varphi,k}$ (φ, k variables)

Alors $\underline{H_1 = \mathcal{L}^2_0}$

En effet, sinon $\exists\, f \neq 0 \in H_1^{\perp}$.

alors $f \perp H_{\varphi,k}$, $\forall \varphi, k$, donc $f \in H_\varphi$, $\forall \varphi$

donc $R_\omega(\varphi) \cdot f = 0$, $\forall \varphi$ (vérifiant a), b), c)).

Par continuité de la représentation R_ω,

$\exists\, U \subset G(\mathbb{A})$ voisinage de 1 tel que

$$\forall g \in U,\ \| R_\omega(g) \cdot f - f \| < \frac{1}{2} \|f\|$$

On choisit alors φ vérifiant a), b), c) et $\operatorname{Supp} \varphi \subset U$ (une telle φ existe toujours).

Alors $$R_\omega(\varphi) \cdot f - f = \int_U \varphi(g) \cdot (R_\omega(g) \cdot f - f) \cdot dg$$

Donc $$\| R_\omega(\varphi) \cdot f - f \| \leq \int_U \varphi(g) \cdot \| R_\omega(g) \cdot f - f \| \cdot dg \underset{\uparrow \text{ par c)}}{<} \frac{1}{2} \|f\|$$

or $R_\omega(\varphi) f = 0$ par hypothèse,

donc $\|f\| < \frac{1}{2} \|f\|$, ce qui est est impossible.

Fixons alors φ et k

on choisit, parmi les $H_{\varphi,k} \cap H'$ (H' sous-espace invariant de $\mathcal{L}^2_0$ $\neq 0$)

un tel sous-espace de dimension minimale. On le note $H'_{\varphi,k}$

Alors $H_2 := \bigcap_{\substack{H' \text{ invariant fermé} \\ H' \cap H_{\varphi,k} = H'_{\varphi,k}}} H'$

Il est clair que : - $H_2 \neq 0$ (contient $H'_{\varphi,k}$).

- H_2 est irréductible (sinon $H_2 = H_3 \overset{\perp}{\oplus} H_4$,

et $H_3 \cap H_{\varphi,k} \subset H'_{\varphi,k}$

$H_4 \cap H_{\varphi,k} \subset H'_{\varphi,k}$

et $H'_{\varphi,k} = (H_3 \cap H_{\varphi,k}) \oplus (H_4 \cap H_{\varphi,k})$

donc par minimalité de $H'_{\varphi,k}$)

$H_3 \cap H_{\varphi,k} = H'_{\varphi,k}$ (par exemple)

et donc $H_2 \subset H_3$ ...)

On a donc montré que R_ω se décomposait en somme directe de représentations irréductibles de $G(\mathbb{A})$

Montrons que les multiplicités, dans cette décomposition, sont finies :

~~S'il existe~~ Soit H_k une composante irréductible de R_ω, et supposons sa multiplicité infinie.

$\exists \varphi$ vérifiant a), b), c), d) telle que $R_\omega(\varphi)\big|_{H_k}$ soit non-nulle.

alors $R_\omega(\varphi)\big|_{H_k}$ a un vecteur propre pour une v.p. $\lambda \neq 0$.

mais alors $\forall H_\ell$ composante de R_ω isomorphe à H_k, $R_\omega(\varphi)\big|_{H_\ell}$ a aussi un vecteur propre pour λ.

Et donc $R_\omega(\varphi)$ a une infinité de vecteurs propres linéairement indép. pour la v.p. $\lambda \neq 0$, ce qui contredit la compacité de $R_\omega(\varphi)$. $\square$

III. Représentations admissibles :

On s'intéresse désormais aux vecteurs "K-finis" dans la représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2_0(\omega)$

Le problème étant que la condition de K-finitude à l'infini n'est pas respectée par l'action de G_∞ : ainsi, à la place infinie, on n'obtiendra pas une représentation de G_∞, mais un $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-module (lisse) D'où la définition :

<u>Def</u> : un $G(\mathbb{A})$-module admissible W est la donnée d'un espace vectoriel W qui est :

* un $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-module.
* un $G(\mathbb{A}_f)$-module lisse

de sorte que (i) l'action de $G(\mathbb{A}_f)$ commute à celles de $\mathfrak{g}_\infty$ et K_∞

(ii) pour toute classe d'isomorphisme γ de représentation de K, la composante γ-isotypique de W est de dimension finie

On dispose alors du résultat suivant

<u>Thm</u> : Soit π une représentation continue irred. unitaire de $G(\mathbb{A})$ dans un espace de Hilbert.

(i) $\forall \gamma$ classe d'isomorphisme de repr. irred de K, la composante γ-isotypique de π est de dimension finie.

(ii) $\{$vecteurs K-finis de $\pi\}$ est naturellement un $G(\mathbb{A})$-module admissible π^K.

En particulier, si π est une composante irréductible de la représentation R_ω de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2_0(\omega)$, alors π^K est un $G(\mathbb{A})$-module admissible, dont les vecteurs sont appelés des formes automorphes cuspidales.

Ce sont essentiellement des fonctions lisses f sur $G(\mathbb{A})$ telles que :

- $f(\gamma . g) = f(g)$, $\forall \gamma \in G(\mathbb{Q})$
- $f(g z) = \omega(z) f(g)$, $\forall z \in Z(\mathbb{A})$
- $\langle$ translatés à droite de f par $K_\infty \rangle$ est de dimension finie.
- f est à croissance lente sur $G(\mathbb{A}_f)$, et à décroissance rapide à l'infini
- $\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} f(n\cdot g)\, dn = 0$ pour presque tout $g \in G(\mathbb{A})$

si on note $\mathcal{A}_0\left(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})\right)$ l'ensemble de ces formes automorphes cuspidales, on déduit des résultats précédents que :

$\mathcal{A}_0\left(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})\right)$ se décompose en somme directe de $G(\mathbb{A})$-modules admissibles irréductibles, avec multiplicités finies

Ces composantes irréductibles sont appelées des représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A})$.

Pour montrer le théorème précédent, on montre :

<u>Lemme</u> : Toute composante irréd π de $R_\omega(g)$ détermine une représentation