Représentations unitaires irréductibles de SL(2, ℝ)

Références V.S. Varadarajan; An Introduction to harmonic analysis on semisimple lie groups, Cambridge n° 13 – 1983.
N. Wallach. Real reductive groups I, Academic Press 132. 1988.

(Autres : classification ~~décrite~~ obtenue par
V. Bargmann Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Annals of Math. vol 48, n° 3 (1947) 568 – 640.
A. Knapp Representations ~~of~~ Theory of semisimple groups. an overview based on examples, Princeton (1986)
D. Vogan Representations of Real Reductive lie groups, Birkhaüser (1981)

Dans l'exposé précédent ont été introduites plusieurs classes de représentations ~~unitaires~~ ~~irréductibles~~ de $SL_2(\mathbb{R})$:

- les séries discrètes holomorphes $\mathcal{D}_n^+$ et antiholomorphes $\mathcal{D}_n^-$ pour $n \geq 2$. Elles sont unitaires et irréductibles
- les séries principales ~~unit~~ π_χ où $\chi(a) = \rho(a)^s$, $a \in AZ$.

χ unitaire $\Rightarrow$ π_χ unitaire

et à partir de ceci, pour $m \geq 2$ fixé, construction d'un pseudo coefficient $f \in \mathcal{C}_c^\infty(SL_2(\mathbb{R}))$ tel que

$$\mathrm{tr}\,\pi(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi = \pi_\chi \\ -\delta_{m,m'} & \text{si } \pi = \mathcal{D}_{m'} \oplus \mathcal{D}_{-m'} \\ \delta_{m,m'} & \text{si } \pi = \mathrm{Sym}^{m'-2}\,\mathbb{C}. \end{cases}$$

On aura besoin de $\mathrm{tr}\,\pi(f)$ pour toute rep. unitaire irréductible → c'est la liste que l'on va donner

I $(\mathfrak{g}, K)$-modules et représentations de G

Situation nous intéresse : $G = SL_2(\mathbb{R})$ $\quad K = SO(2)$

$G = GL_2(\mathbb{R})$ $\quad K = O(2)$

on introduit les différents objets dans le cadre plus général suivant :

G réductif de groupe dérivé de centre fini, connexe

G a un nombre fini de composantes connexes.

K = sous-groupe compact maximal.

Déf. $V = \mathbb{C}$-ev est un $(\mathfrak{g}, K)$-module s'il est muni d'une action $\pi_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ et d'une action π_K de K telles que

① (compatibilité) $\quad \pi_K(k)\,\pi_{\mathfrak{g}}(X)\,\pi_K(k^{-1}) = \pi_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}\,k\, X)$

② (finitude). $\quad V = \bigoplus_{\tau \in \hat{K}} V_\tau \quad$ où $\hat{K} = \{$rep unitaires irréductibles $(\tau, E_\tau)\}$

et $V_\tau = \{v \in V,\ \forall k \quad \pi_K(k) v = \tau(k) v\}$

$= P_\tau(V) \quad$ où $\quad P_\tau(v) = (\dim E_\tau) \int_K (\mathrm{tr}\, \tau(k)^{-1})\, \pi(k) v \, dk$

③ $\forall Y \in \mathfrak{k} \quad \forall v \in V \qquad \pi_{\mathfrak{g}}(Y).v = \frac{d}{dt} \pi_K(\exp tY).v$

<u>Remarques</u> (i) $\quad$ ② $\Leftrightarrow$ $\forall v \in V \quad \dim \mathrm{Vect}\langle \pi(K).v\rangle < +\infty$

en particulier $\forall v \in V \quad k \to k.v$ est C^∞

ce qui donne 1 sens à 3.

(ii) pour $G = SL_2 \quad \hat{K} = \mathbb{Z} \qquad f_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$.

$\to \quad V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$

(iii) V est aussi un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module, un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module

Dans la suite, on notera $X.v$ et $k.v$ les actions.

Déf 1/ $\tau \in \hat{K}$ tel que $V_\tau \neq 0$ est appelé <u>K-type de V</u>

2/ V est <u>admissible</u> si $\forall \tau \in \hat{K}$ $\dim V_\tau < +\infty$

3/ V est <u>irréductible</u> s'il n'admet pas de (g, K)-sous-modules non triviaux

<u>Lemme de Schur</u>: $V = (g, K)$ module irréductible
alors $\mathrm{Hom}_{g,K}(V, V) = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}$

<u>Dem.</u> Soit $v \in V - \{0\}$ et $V_v = \mathrm{Vect}\langle K \cdot v\rangle$
alors $U(g) V_v = V$ (car (g, K)-sous-module et V irréductible)

$\dim V_v < +\infty$ et $U(g)$ de dimension dénombrable (par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt)

$\Rightarrow$ <u>V est de dimension dénombrable</u>

Soit $T \in \mathrm{Hom}_{g,K}(V, V)$. Alors <u>$\exists c \in \mathbb{C}$ tel que $T - cI$ non inversible</u> car sinon: $\left[\begin{array}{l}\forall P \in \mathbb{C}[X] - \{0\} \\ P(T) \text{ est inversible et}\end{array}\right.$

$$\mathbb{C}(X) \longrightarrow V$$
$$R = \frac{P(X)}{Q(X)} \longmapsto P(T)\, Q(T)^{-1} v$$

définit une injection de $\mathbb{C}(X)$ dans V ce qui impossible car $\mathbb{C}(X)$ de dimension non dénombrable

Comme $\mathrm{Ker}(T - c\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(T - c\,\mathrm{Id})$ sont des (g, K)-sous-modules de V, ils sont triviaux

$T - c\,\mathrm{Id}$ non inversible $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} V = \mathrm{Ker}(T - c\,\mathrm{Id}) \\ 0 = \mathrm{Im}(T - c\,\mathrm{Id})\end{array}\right.$

<u>CQFD.</u>

En particulier si V est un (g, K)-module irréductible alors $Z(g)$ = centre de l'algèbre enveloppante agit par un scalaire et

$\chi : Z(g) \to \mathbb{C}$ tel que $z\, v = \chi(z)\, v$ $\forall v \in V$

est appelé <u>caractère infinitésimal de V</u>.

$(\mathfrak{g}, K)$-module d'une représentation de G.

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une rep de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

On peut supposer $\pi/_K$ unitaire (si $<\,,\,>$ est le produit hermitien sur $\mathcal{H}$ alors $(v, w) = \int_K <k.v, k.w>dk$ est hermitien et équivalent à $<\,,\,>$)

Le théorème de Peter-Weyl (décomposition des rep unitaires en irréductibles) donne:

$\exists\ (\mathcal{H}_\tau)_{\tau \in \hat{K}}$ famille de sous-espaces de Hilbert deux à deux orthogonaux tel que $\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{\tau \in \hat{K}}} \mathcal{H}_\tau$ somme Hilbertienne

Pour avoir <u>e)</u> de def 1, il est naturel de considérer

$$\mathcal{H}_K^\circ = \bigoplus_{\tau \in \hat{K}} \mathcal{H}_\tau \quad \text{somme algébrique}$$

$$= \{ v \in \mathcal{H} \,;\ \dim \pi(K).v < +\infty \}.$$

Pour définir l'action de $\mathfrak{g}$, on introduit l'espace $\mathcal{H}^\infty$ des vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ de $(\pi, \mathcal{H})$

$$\mathcal{H}^\infty = \{ v \in \mathcal{H} \,;\ g \longmapsto \pi(g).v \text{ est de classe } C^\infty$$

On note $\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_K^\circ \cap \mathcal{H}^\infty$

$$= \{ v = K\text{-fini et de classe } \mathcal{C}^\infty \}$$

<u>Prop.</u> 1) $\mathcal{H}_K^\circ$, $\mathcal{H}^\infty$ et $\mathcal{H}_K$ sont denses dans $\mathcal{H}$

2) $\mathcal{H}_K$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module.

<u>Def</u> $\mathcal{H}_K$ = le $(\mathfrak{g}, K)$-module de $(\pi, \mathcal{H})$

= <u>module d'Harish-Chandra de $(\pi, \mathcal{H})$</u>

$\tau \in \hat{K}$ tel que $\mathcal{H}_\tau \neq 0$ est un <u>K-type</u> de $(\pi, \mathcal{H})$

$(\pi, \mathcal{H})$ est <u>admissible</u> si $\forall\, \tau \in \hat{K}$ $\dim \mathcal{H}_\tau < +\infty$

Dem de la prop : 1) $\overline{\mathcal{H}_K^0} = \mathcal{H}$ immédiat par définition

pour $\mathcal{H}^\infty$: si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $v \in \mathcal{H}$ alors

$$\pi(x)\pi(f)v = \int_G f(g)\,\pi(xg)\,v\,dg = \int_G f(x^{-1}g)\,\pi(g)\,dg$$

donc $\pi(f)v \in \mathcal{H}^\infty$

En prenant $(f_n)_n$ approximation de l'unité, on obtient $\underbrace{\pi(f_n)v}_{\in \mathcal{H}^\infty} \to v$ pour tout $v \in \mathcal{H}$

pour $\mathcal{H}^\infty \cap \mathcal{H}_K^0$: Soit $G = K \exp p$ la décomposition de Cartan de G. ($SL_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \exp \underbrace{Sym_2 \mathbb{R}}_{\text{matrice symétrique}}$)

si $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$ est K-finie et $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\exp p)$

alors on pose $F(k \exp X) = f(k)\,h(\exp X)$

et $\pi(F)v \in \mathcal{H}_K^0 \cap \mathcal{H}^\infty$ pour tout $v \in \mathcal{H}$

on construit une approximation de l'unité avec de telles F.

2) $\mathcal{H}^\infty$ est $\mathfrak{g}$ et K-stable est immédiat. ~~ou~~

~~les deux actions sont co~~

$\mathcal{H}_K^0$ est K-stable aussi.

Reste à montrer : $\mathcal{H}_K^0$ est $\mathfrak{g}$-stable

Soit $v \in \mathcal{H}_K^0$ et $V_v = \mathrm{Vect}\,\langle \pi(K)\,v \rangle$

$\dim V_v < +\infty$ et $\dim \mathfrak{g} < +\infty \Rightarrow \dim \pi(\mathfrak{g}).V_v < +\infty$

si $k \in K$ et $X \in \mathfrak{g}$ alors $\pi(k)\,\pi(X)\,V_v$

$= \pi(\mathrm{Ad}\,k\,X)\,V_v \subset \pi(\mathfrak{g}).V_v$

$\Rightarrow \pi(\mathfrak{g}).V_v$ est un sous-espace K-invariant de dimension finie de $\mathcal{H}$. Il est donc inclus dans $\mathcal{H}_K^0$ CQFD

Remarque $(\pi, \mathcal{H})$ admissible $\Rightarrow \mathcal{H}_K \subset \mathcal{H}^\infty$

Résultats de Harish-Chandra

Thm 1 : $(\pi, \mathcal{H})$ représentation de G dans $\mathcal{H}$ = Hilbert

Alors $\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-espaces fermés} \\ G\text{-invariants} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{g}, K)\text{-sous-modules} \\ \text{de } \mathcal{H}_K \end{array} \right\}$

$$S \longrightarrow S \cap \mathcal{H}_K$$

$$\overline{W} \longleftarrow W$$

est bijective

Corollaire $(\pi, \mathcal{H})$ irréductible $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}_K = (\mathfrak{g}, K)$-module irréductible

Thm 2 : $(\pi, \mathcal{H})$ ~~unitaire~~ irréductible $\Rightarrow$ $(\pi, \mathcal{H})$ admissible

| sera prouvé pour $G = SL_2(\mathbb{R})$.

Thm 3. $(\pi, \mathcal{H})$ et (σ, V) rep. unitaires irréductibles

Elles sont unitairement équivalentes $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}_K$ et V_K sont équivalents.

Preuve. $\Rightarrow$ est immédiate.

si $T \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(\mathcal{H}_K, V_K)$ alors $\forall \tau \in \hat{K}$ $T(\mathcal{H}_\tau) = V_\tau$.

Soit $T_1 : V_K \to \mathcal{H}_K$ t.q $T_1/V_\tau = \underbrace{(T/\mathcal{H}_\tau)^*}_{\text{adjoint}}$

($\dim V_\tau < +\infty$ et $\dim \mathcal{H}_\tau < +\infty$).

$T_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(V_K, \mathcal{H}_K)$

Donc $T_1 T = \alpha\, \mathrm{Id}$ (lemme de Schur).

Par renormalisation, on peut supposer $\alpha = 1$.

et donc $T : \mathcal{H}_K \to V_K$ est unitaire. CQFD

Thm 4. $\forall$ $W = (\mathfrak{g}, K)$-module irréductible

$\exists (\pi, \mathcal{H})$ irréductible (non unique) t.q $\mathcal{H}_K = W$

si W est unitaire alors $\exists (\pi, \mathcal{H})$ unitaire irréd. unique à équivalence unitaire près t.q $\mathcal{H}_K = W$,

Thm 5. $(\pi, \mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H}_K$ est une correspondance bijective entre classes d'équivalences unitaire de rep. unitaire irréductible et classes d'équivalence de $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles.

II $(\mathfrak{g}, K)$ - modules irréductibles de $SL(2,\mathbb{R})$

$G = SL_2(\mathbb{R})$ $\quad K = SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. base $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

avec $[H_0, X_0] = 2X_0$ $\quad [H_0, Y_0] = -2Y_0$

$[X_0, Y_0] = H_0$

$V = (\mathfrak{g}, K)$-module $\Leftrightarrow$ $V = (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-module

base plus adaptée aux calculs:

$H = -i(X_0 - Y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(H + i(X_0 + Y_0))$

$Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(H - i(X_0 + Y_0))$

avec toujours $[H, X] = 2X$ $\quad [H, Y] = -2Y$ $\quad [X, Y] = H$.

les K-types de V : $n \in \mathbb{Z}$ et pour $v \in V_n$.
$H.v = nv$.

Relations dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:
$$HX = XH + 2X$$
$$HY = YH - 2Y$$
$$XY = YX + H$$

Lemme 1, $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$

$$X Y^q = Y^q X + q\, Y^{q-1}(H - q + 1)$$
$$Y X^p = X^p Y - p\, X^{p-1}(H + p - 1)$$
$$H X^p Y^q = X^p Y^q (H + 2(p-q))$$

s'obtient par récurrence immédiate.

Thm de PBW (Poincaré - Birkhoff - Witt)

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{p,q,r \in \mathbb{N}} \mathbb{C}\, X^p Y^q H^r$$

s'obtient facilement par ~~la~~ récurrence sur le degré de $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ en utilisant Lemme 1.

Comme on va s'intéresser aux $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles, le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ va agir par un scalaire.

<u>Élément de Casimir</u> : $C = \sum_i X_i X^i$ où (X_i) = base de $\mathfrak{g}$ et $B(X_i, X^j) = \delta_{ij}$ où B = Killing.

Ici $B(M,N) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,M)(\mathrm{ad}\,N)$
$= 4\ \mathrm{tr}(MN)$

$\rightarrow$ $C = \frac{1}{8}(H^2 + 2XY + 2YX)$. facile de voir $C \in Z(\mathfrak{g})$.

(en fait $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[C]$ mais on n'en aura pas besoin).

On travaillera avec
$$\left[\begin{aligned} \Omega &= H^2 + 2XY + 2YX + 1 = \tfrac{1}{8} C + 1 \\ &= (H+1)^2 + 4YX \\ &= (H-1)^2 + 4XY \end{aligned}\right.$$

<u>Soit $V = (\mathfrak{g}, K)$-irréductible</u>

alors $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ où H agit par n sur V_n.

relations $HX = XH + 2X$
$HY = YH - 2Y$ donnent immédiatement

$X V_n \subset V_{n+2}$ et $Y V_n \subset V_{n-2}$.

en particulier, les K-types ~~sont~~ de V sont tous de même parité. <u>Soit n_0 t.q. $V_{n_0} \neq 0$ et $v_0 \in V_{n_0} - \{0\}$</u>

Thm de PBW $\Rightarrow$ $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{p,q \geq 0} \mathbb{C} X^p Y^q \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})(H - n_0)$

<u>Donc</u>. $V = \sum_{p,q \geq 0} \mathbb{C} \underbrace{X^p Y^q v_0}_{\in V_{n_0 - 2q + 2p}}$

$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} V_{n_0 + 2m}$

où $V_{n_0 + 2m} = \sum_{p - q = m} \mathbb{C} X^p Y^q v_0$.

Lemme $V_{n_0+2q} = \begin{cases} \mathbb{C}[\Omega]\,.\,X^q v_0 = \mathbb{C}\,X^q v_0 & \text{pour } q \geq 0 \\ \mathbb{C}[\Omega]\,Y^q v_0 = \mathbb{C}\,Y^q v_0 & \text{pour } q \leq 0 \end{cases}$

En particulier $\dim V_{n_0+2q} \leq 1$ et V est admissible

Dem. soit $q \geq 0$ et $\omega = \dfrac{\Omega}{4} = \dfrac{(H-1)^2}{4} + XY$

alors $\omega\, X^q v_0 = X^q\, \omega\, v_0$

$$= \frac{(n_0-1)^2}{4} X^q v_0 + X^{q+1}\, Y\, v_0$$

$\Rightarrow X^{q+1} Y v_0 \in (\mathbb{C} + \mathbb{C}\,\Omega)\, X^q v_0$

Par récurrence immédiate, on obtient

$$V_{n_0+2q} = \sum_{k \geq 0} \mathbb{C}\, X^{q+k}\, Y^k\, v_0 = \mathbb{C}[\Omega].\, X^q v_0$$

$= \mathbb{C}\, X^q v_0$ car Ω agit par un scalaire

même raisonnement avec $q \leq 0$. CQFD

Ainsi V est la somme d'espace de dim 1 ou 0

$$\cdots\; V_{n_0-2q} \;\cdots\; V_{n_0-2} \xleftarrow{\;Y\;} V_{n_0} \xrightarrow{\;X\;} V_{n_0+2} \;\cdots\; V_{n_0+2q} \;\cdots$$

Un $V_{n_0 \pm 2q}$ est nul si et seulement soit X soit Y est non injectif.

Si X est non injectif :

Soit $\mu = \inf\{ n \in \mathbb{Z} \;;\; \exists\, v \neq 0 \in V_n \quad X.v = 0 \}$

Soit $V_\mu = \mathbb{C}\, v_\mu$ $\qquad$ μ = plus haut K-type

~~Cas~~

Dans ce cas 1/ $V = \sum_{q \geq 0} \mathbb{C}\, Y^q v_\mu$

2/ $\forall\, n < \mu$ et $w \in V_n - \{0\}$ $\quad X w \neq 0$ car V irréductible

3/ $\pi(\Omega) = (\mu - 1)^2\, \mathrm{Id}$

<u>si de plus Y est non injectif</u>

comme $\quad X Y^{q+1} = Y^{q+1} X + (q+1) Y^q (H - q)$

on a $\quad X Y^{q+1} v_\mu = (q+1)(\mu - q) Y^q v_\mu$.

et donc $\quad Y^{q+1} v_\mu = 0$ avec $Y^q v_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu = q \geq 0$

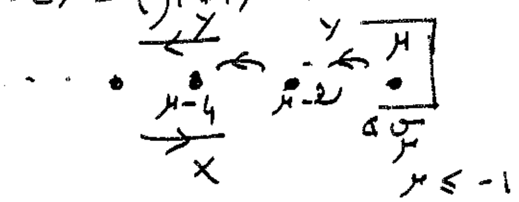
<u>Dans ce cas</u> $\quad \left[\begin{array}{l} V = \bigoplus_{q=0}^{\mu} \mathbb{C}\, Y^q v_\mu \text{ est de dimension finie } \mu+1 \qquad F(\mu+1) \\ \pi(\Omega) = (\mu+1)^2\, \mathrm{Id}. \end{array}\right.$

<u>si Y est injectif</u> $\quad \forall q \in \mathbb{N} \quad Y^q v_\mu \neq 0$

et X est injectif sur $\sum_{q>0}^{+} \mathbb{C}\, Y^q v_\mu$

donc $\mu \neq q$ pour $q \in \mathbb{N}$.

<u>on obtient</u> $\quad \left[\begin{array}{l} V = \bigoplus_{q \geq 0} \underbrace{\mathbb{C}\, Y^q v_\mu}_{\text{de poids } \mu - 2q.} \quad \text{où } \mu \in \{-1, -2 \dots\} = -\mathbb{N}^* \\ \pi(\Omega) = (\mu+1)^2 \end{array}\right.$



$D(\mu, -)$

<u>si X est injectif et Y non injectif.</u> cela inverse la situation précédente.

Soit $\mu = \sup \{ n \,;\ V_n = \mathbb{C}\, v_n \neq \{0\}$ et $Y . v_n = 0 \}$

et $\quad V_\mu = \mathbb{C}\, v_\mu$

$\Omega = (H-1)^2 + 4XY \Rightarrow \underline{\pi(\Omega) = (\mu-1)^2}$

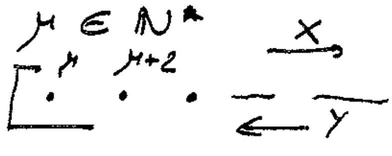
Y est injectif sur $\sum_{q>0}^{+} \mathbb{C}\, X^q v_\mu$

$Y X^{p+1} = X^{p+1} Y - (p+1) X^p (H + p)$

donne $\quad Y X^{p+1} v_\mu = -(p+1)(\mu + p) X^p v_\mu$

l'injectivité de Y implique $\mu \neq -p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

on obtient $\quad \left[\begin{array}{l} V = \bigoplus_{p \geq 0} \mathbb{C}\, X^p v_\mu \\ \pi(\Omega) = (\mu - 1)^2 \end{array}\right.$ $\qquad \mu \in \mathbb{N}^*$



Représentations unitaires irréductibles de $SL(2,\mathbb{R})$

① Séries discrètes : $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 2$

$\mathcal{D}_m = \{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorphes ; $f \in L^2(\mathbb{H}, y^{m-2}dx\,dy) \}$

$\mathcal{D}_{-m} = \{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ antiholomorphes, $f \in L^2(\mathbb{H}, y^{m-2}dx\,dy \}$.

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ agit par $(g\cdot f)(z) = (-bz+d)^{-m} f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right)$.

Rappel exposé de G. Chenevier : on calcule les K-types en réalisant $\mathcal{D}_{\pm m}$ comme des fonctions sur le disque unité $\mathbb{D}$ (par transformation de Cayley)

et on a : $(\mathcal{D}_m)_K = D(m,+)$ $(\mathcal{D}_{-m})_K = D(-m,-)$

Elles sont unitaires irréductibles et $\mathcal{D}_{\pm m} \hookrightarrow L^2(G)$

② Limites de séries discrètes

Ceci correspond à $D(\pm 1, \pm)$:

$\mathcal{D}_1 = \{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorphes; $\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dy < +\infty \}$

$\mathcal{D}_{-1} = \{$ ———— antiholomorphes, ———— .

L'action de G est la même que précédemment

Les K-types se calculent de même que pour $\mathcal{D}_{\pm m}$.

et $(\mathcal{D}_{\pm 1})_K = D(\pm 1, \pm)$. Elles sont unitaires irréductibles

On ne peut pas les plonger dans $L^2(G)$

③ Représentation triviale : c'est la seule représentation irréductible de dimension finie qui soit unitaire.

④ Il reste à étudier le cas des $(\mathfrak{g},K)$-modules irréductibles, $P(\lambda,\varepsilon) \simeq P(-\lambda,\varepsilon)$ où

$\varepsilon = 0,1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\lambda + \varepsilon \notin 2\mathbb{Z}+1$

si X et Y sont injectifs alors X et Y sont bijectifs

et V s'écrit $V = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} V_{\varepsilon + 2p}$ où $\varepsilon = 0$ ou 1.

et $\pi(\Omega) = \lambda^2 \, Id$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

YX bijectif et $\Omega = (H+1)^2 + 4YX$ implique

$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \lambda^2 \neq (2p + \varepsilon + 1)^2$

et donc. λ n'est pas un entier de parité $\varepsilon + 1$

Liste des $(\mathfrak{g}, K)$ - modules irréductibles

$\mu \in \mathbb{N}$

$F(\mu)$ = représentation irréductible de dim μ
dimension μ
K - types : $-\mu+1, -\mu+3 \dots (\mu-3)\, (\mu-1)$
$\pi(\Omega) = \mu^2 \, Id$

$\mu \in \mathbb{N}^*$

$D(\mu, +) = \bigoplus_{p \geq 0} V_{\mu + 2p}$
plus bas K - type μ.
$\pi(\Omega) = (\mu - 1)^2 \, Id$

$D(-\mu, -) = \bigoplus_{p \geq 0} V_{-\mu - 2p}$
plus haut K - type $-\mu$.
$\pi(\Omega) = (-\mu + 1)^2 \, Id$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon = 0, 1$ avec $\lambda + \varepsilon \notin 2\mathbb{Z} + 1$

$P(\lambda, \varepsilon) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} V_{\varepsilon + 2p}$
$\pi(\Omega) = \lambda^2 \, Id$
avec $P(\lambda, \varepsilon) = P(-\lambda, \varepsilon)$

Remarque. $\varepsilon = 0$ et $\lambda = 2m+1$ avec $m \geq 0$.

$P(2m+1, 0) = D(-2m-2, -) \oplus F(2m+1) \oplus D(2m+2, +)$

$\varepsilon = 1$ et $\lambda = 2m \quad m \in \mathbb{N}$

$P(2m, 1) = D(-2m-1, -) \oplus F(2m) \oplus D(2m+1, +)$

Séries principales I_χ :

Notations : $Z = \pm \mathrm{Id}$ = centre de G

$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} = a_t \right\}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = ZAN$.

$$\chi : B \to \mathbb{C}$$
$$z a_t n \mapsto z^\varepsilon e^{\lambda t}.$$

$I_\chi = I_{\varepsilon,\lambda} = \{ f : G \to \mathbb{C},\ f(z a_t n g) = e^{(\lambda+1)t} f(g),$
$f_{/K} \in L^2(K) \}$.

$(\pi_{\varepsilon,\lambda}(g) \cdot f)(x) = f(xg)$.

<u>Thm.</u> 1) $(I_{\varepsilon,\lambda})_K = P(\lambda, \varepsilon)$

En particulier : $I_{\varepsilon,\lambda}$ est irréductible $\Leftrightarrow \varepsilon + \lambda \notin 2\mathbb{Z} + 1$.

2) $\lambda \in i\mathbb{R} \Rightarrow I_{\varepsilon,\lambda}$ unitaire.

3) Pour $\lambda \in]0,1[$, $I_{\varepsilon,\lambda}$ est unitarisable.

Ceci permet de compléter la liste des rep unitaires irréductibles

<u>Séries principales unitaires :</u>

$I_{\varepsilon, i\nu} \simeq L^2(\mathbb{R})$ $\quad (\pi_{\varepsilon,\nu}(g) \cdot f)(x) = [\text{signe}(bx+d)]^\varepsilon |bx+d|^{-1-i\nu} f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)$

$I_{\varepsilon,i\nu} \sim I_{\varepsilon,-i\nu}$ irréductible pour $\nu \neq 0$.

$I_{0,0}$ est irréductible et $I_{1,0} \sim \mathcal{D}_1^+ \oplus \mathcal{D}_{-1}$

<u>Séries complémentaire :</u> $\quad \lambda \in]0,1[$ et $\varepsilon = 0$.

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)\overline{f}(y)}{|x-y|^{1-\lambda}}\, dx\, dy < +\infty \right\}$$

$$\left[\mathcal{C}^\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f \right](x) = |bx+d|^{-1-\lambda} f\left(\frac{ax+c}{bx+d} \right).$$

Preuve des résultats :

a) cas des rep de dim. finie : seule la triviale est unitaire.

car $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{R}) = so(2,\mathbb{R}) \oplus \underbrace{sym_2 \mathbb{R}}_{\text{matrice symétrique réelles}}$

$= \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$

$su(2) = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p}$.

$SU(2)$ compact $\Rightarrow \exists \langle\, ,\, \rangle$ produit hermitien t.q. $\forall X \in su(2)$ $\pi(X)$ est antihermitienne.

$\Rightarrow$ $\pi(i\mathfrak{p})$ agit de manière semi simple avec valeurs propres imaginaires pures

$\Rightarrow$ $\pi(\mathfrak{p})$ agit de manière semi simple avec valeurs propres réelles.

Or, $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$ agit avec des valeurs propres imaginaires pures

Donc. $\pi(\mathfrak{p}) \equiv 0$ et par suite $\pi(\mathfrak{k}) \equiv 0$.

b) Preuve du théorème : $(I_{\varepsilon,\lambda})_K = P(\lambda,\varepsilon)$

$I_{\varepsilon,\lambda} \simeq L^2(K)_\varepsilon = \{ f \in L^2(K) ;\ f(-x) = (-1)^\varepsilon f(x) \}$.

$f \longmapsto f_{/K} = \mathcal{H}_\varepsilon$.

$\mathcal{H}_\varepsilon$ a pour base hilbertienne les $f_n(k_\theta) = e^{in\theta}$

où $n \equiv \varepsilon\ [2]$

$\Rightarrow (\mathcal{H}_\varepsilon)_K = \bigoplus_{n \equiv \varepsilon [2]} \mathbb{C} f_n$.

$\big((\pi_{\varepsilon,\lambda}(k').f)(k) = f(kk') \big)$

Il reste donc à prouver que $\pi(\Omega) = \lambda^2 Id$.

On a. $H.f_n = n f_n$ $\qquad X.f_n = a_n f_{n+2}$

$Y f_n = b_n f_{n-2}$

en particulier $a_n = (X.f_n)(1)$

$b_n = (Y.f_n)(1)$

et $\pi(\Omega) = [(n+1)^2 + 4 b_{n+2} a_n]\, Id$

$\Omega = (H+1)^2 + 4YX$.

Soit $\tilde{b}_n$ définie sur G par

$$\tilde{b}_n(h\, a\, z\, k) = b_n(k)\, z^{\varepsilon}\, a^{(1+\lambda)}$$

$X+Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ agit sur b_n par :

$$(X+Y.\, b_n)(1) = \frac{d}{dt}\, \tilde{b}_n \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}_{/t=0}$$

$$= (1+\lambda)$$

et $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot b_n \right)(1) = 0$

comme $H = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ agit par n sur b_n

on obtient $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot b_n \right](1) = n.$

$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ +i & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$

<u>donc</u> $(X.\, b_n)(1) = a_n = \frac{1}{2}(\lambda + 1 + n)$

$(Y.\, b_n)(1) = b_n = \frac{1}{2}(\lambda + 1 - n)$

Finalement $\pi(\Omega) = (n+1)^2 + (\lambda+1+n)(\lambda - n - 1)$
$= \lambda^2$

On a donc bien : $(I_{\varepsilon,\lambda})_K = P(\lambda, \varepsilon)$.

<u>c)</u> <u>Preuve de :</u>
$P(\lambda, \varepsilon)$ admet une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module unitaire.
$\iff \lambda \in i\mathbb{R}$ ou $(|\lambda| \in]0,1[$ et $\varepsilon = 0)$

$$P(\lambda, \varepsilon) = \bigoplus_{n \equiv \varepsilon\, [2]} \mathbb{C}\, b_n \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} H.\, b_n &= n\, b_n \\ X.\, b_n &= a_n\, b_{n+2} \\ Y.\, b_n &= b_n\, b_{n-2} \end{aligned}$$

On cherche à quelles conditions il existe un produit hermitien $\langle\,,\rangle$ sur $P(\lambda, \varepsilon)$ pour lequel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (de base H_0, X_0, Y_0) agit par des opérateurs antihermitiens.

les $(b_n)_n$ seront orthogonaux pour $\langle\ ,\ \rangle$

et on veut $\langle b_n, b_n \rangle$ tous de même signe.

$\Omega = (H+1)^2 + 4YX = (H_0+1)^2 + 4Y_0X_0$

(simple calcul : Ω ne dépend pas de la base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ choisie). et donc

$\forall v, w \in P(\lambda, \varepsilon) \quad \langle \pi(\Omega) v, w \rangle = \langle v, \pi(\Omega) w \rangle$.

$\Rightarrow \lambda^2 = \bar{\lambda}^2$

$\Rightarrow \lambda = \pm \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in i\mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour $\lambda \in i\mathbb{R}$, $P(\lambda, \varepsilon)$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module unitaire pour le produit hermitien de $L^2(K)$.

<u>Regardons le cas $\lambda \in \mathbb{R}$:</u>

On veut pouvoir définir $\langle , \rangle$ avec $\left[\begin{array}{l} \langle b_n, b_m \rangle = 0 \text{ si } n \neq m \\ \langle b_n, b_n \rangle \text{ tous} \end{array}\right.$ de même signe et $\left[\begin{array}{ll} \langle Hv, w \rangle = \langle v, Hw \rangle & (a) \\ \langle Xv, w \rangle + \langle v, Yw \rangle = 0. & (b) \end{array}\right.$

(a) est toujours vérifiée.

$v = b_n$ et $w = b_{n+2}$ dans (b) donne :

$a_n \langle b_{n+2}, b_{n+2} \rangle + \overline{b_{n+2}} \langle b_n, b_n \rangle = 0.$

c'est-à-dire : $(\lambda + 1 + n) \langle b_{n+2}, b_{n+2} \rangle (\lambda - n - 1) \langle b_n, b_n \rangle = 0.$

l'existence de $\langle , \rangle$ implique :

$\forall n \equiv \varepsilon \ [2] \qquad (\lambda + 1 + n)(\lambda - (n+1)) < 0.$

ceci implique $\varepsilon = 0$ et $0 < |\lambda| < 1$.

Représentations unitaires irréductibles de $GL(2,\mathbb{R})$

Le centre ne va pas changer grand chose, il agit obligatoirement par un scalaire (unitaire) sur un $(\mathfrak{g},K)$-module irréductible (unitaire).

Par contre, la non-connexité modifie la situation

$G = GL_2(\mathbb{R}) \qquad Z = \mathbb{R}\,\mathrm{Id} \qquad K = O(2)$

$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow G = Z\,SL_2(\mathbb{R}) \cup Z\,u\,SL_2(\mathbb{R})$

$K = SO(2,\mathbb{R}) \cup u\,SO(2,\mathbb{R})$

$u\,k_\theta\,u^{-1} = k_{-\theta} \Rightarrow \hat{K} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\,b_n \oplus \mathbb{C}\,b_{-n},\ n \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{C}\,b_0 \end{array} \right\}$

$\left(b_n(k_\theta) = e^{in\theta} \qquad (k\cdot b_n)(k') = b_n(k'k) \right).$

On obtient les $(\mathfrak{g},K)$-modules irréductibles.

Soit $\chi_{c,\varepsilon}$ un caractère de Z. $\chi_{c,\varepsilon}\left(\pm \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^t \end{pmatrix}\right) = (\pm)^\varepsilon e^{ct}$

(on fixe l'action de Z) puis

- $D(-m,-) \oplus D(m,+)$ pour $m \geq 1$
- $F(m)$; $m \in \mathbb{N}$
- $P(\lambda,\varepsilon)$ avec $\lambda + \varepsilon \notin 2\mathbb{Z}+1$

unitaire $\Leftrightarrow$ $\chi_{c,\varepsilon}$ unitaire (i.e $c \in i\mathbb{R}$)

- $D(-m,-) \oplus D(m,+)$ pour $m \geq 1$
- $F(1) = \mathbb{1}$.
- $P(\lambda,\varepsilon)$ avec $\lambda \in i\mathbb{R}$

ou $0 < |\lambda| < 1$.