i (Gaëtan Chenevier, GT courbes modulaires)

ies discrètes de $SL_2(\mathbb{R})$ et leurs pseudocoefficients

g but de cet exposé est de démontrer le théorème suivant, dû à Duflo-Labesse et Harish-Chandra

éorème Soit $m \geq 2$ un entier. Il existe $f \in \mathcal{C}_c^\infty(SL_2(\mathbb{R}))$ bi K-finie et telle que

$$\gamma \text{ semisimple}, \quad O_\gamma(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } \gamma \text{ diag à vp } \neq \\ e(\gamma)\, tr(\gamma \mid Sym^{m-2}\mathbb{C}^2) \text{ sinon}, \\ \text{où } e(\gamma) = 1 \text{ ou } -1 \text{ selon que } \gamma \text{ non central ou } \gamma = \pm 1 \\ \text{et pour un choix convenable de mesures} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad tr\, \pi(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } \pi = I_\chi \text{ est dans la série principale}, \\ -\delta_{m',m} \text{ si } \pi = D_{m'} \oplus D_{-m'} \text{ est série discrète}, \\ \delta_{m',m} \text{ si } \pi = Sym^{m'-2}\mathbb{C}^2 \end{cases}$$

Rmq - Pour le GT, on n'a besoin que de $m = 2$ (f étant convenablement étendue à $Gl_2(\mathbb{R})$, à la fin)
- Le terme pseudocoeff vient du fait que f a des prop similaires aux coeff d'une irréductible d'un groupe compact.
- Comprendre ce théorème nécessite ess. toute la théorie de $Sl_2(\mathbb{R})$ (an. harmonique, rep unitaires) due à Gelfand, Naimark, Bargmann, Harish-Chandra. On va progressivement découvrir et expliquer les termes de l'énoncé. Réf: Varadarajan, Knapp, Lang ($Sl_2(\mathbb{R})$)
"An introduction on ss Lie groups"

Notations $G = Sl_2(\mathbb{R})$, $K = SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ ss g compact (max) de G

$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^{>0} \right\}$, $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $Z = \{\pm 1\}$ centre de G

Déf $\gamma \in G$ semisimple si diagonalisable ds $Sl_2(\mathbb{C})$ $\Leftrightarrow$ γ conjugué à un élément de ZA ou K
élt: hyperbolique elliptique

γ régulier si semisimple $\neq \pm 1$. Dans ce cas $C_G(\gamma) = ZA$ ou K.

Si γ semisimple alors $conj(\gamma) \subset G$ fermé, $\simeq G/_{C_G(\gamma)}$ ← unimodulaires

donc $conj(\gamma)$ admet une mesure > 0 invariante par conj sous G (unique à $\mathbb{R}^{>0}$ près)

Si $f \in \mathcal{C}_c(G)$, $Supp(f_{|conj(\gamma)})$ compact car $conj(\gamma)$ fermé donc

$$O_\gamma(f) = \int_{conj(\gamma)} f(x)dx = \int_{G/_{C_G(\gamma)}} f(g\gamma g^{-1})\,dg \quad \text{a un sens, de plus}$$

$O_\gamma(f)$ ne dépend pas de γ à conjugaison près et $O_\gamma(f^g) = O_\gamma(f)$

conjugué de f par $g \cdot g^{-1}$

Ces fonctionnelles $f \mapsto O_g(f)$ sont importantes dans l'analyse harmonique invariante. Un premier résultat fondamental est la

(normalisation de HC de int. orb.)

Prop (Formule d'intégration de Weyl) Posons pour $f : G \to \mathbb{C}$

$$\begin{cases} O_A(f) \quad ZA^{reg} \to \mathbb{C}, \quad a \mapsto \Delta_A(a) \int_{G/A} f(gag^{-1})\,dg \\ \qquad \Delta(a) = |\rho(a) - \rho(a)^{-1}| \text{ où } \rho\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} = a \\ O_K(f) \quad K^{reg} \to \mathbb{C}, \quad k \mapsto \Delta_K(k) \int_{G/K} f(gkg^{-1})\,dg \\ \qquad \Delta(k) = \chi(k) - \chi(k)^{-1}, \quad \chi\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = e^{i\theta}. \end{cases}$$

Alors $f \in L^1(G) \Leftrightarrow \begin{cases} O_A(f) \in L^1(ZA, \Delta_A) \\ \text{et} \\ O_K(f) \in L^1(K, \Delta_K) \end{cases}$

et
$$\boxed{\int_G f(g)\,dg = \frac{1}{2}\int_{AZ} O_A(f)(a)\,\Delta_A(a)\,da + \int_K O_K(f)(k)\,\overline{\Delta_K(k)}\,dk.}$$

Preuve G^{reg} = élt ell reg $\sqcup$ élt hyp reg   deux ouverts, réunion dense (facile)
$\{|\mathrm{tr}\, g| < 2\}$ $\{g \,|\, |\mathrm{tr}(g)| > 2\}$

Pour $T = K$ ou AZ, $\Psi_T : \begin{array}{l} G/T \times T^{reg} \longrightarrow G_T^{reg} \\ (g, t) \mapsto gtg^{-1} \end{array}$ ← élt rg conj à T est un revêtement à 2 ou 1 feuillets selon que $T = AZ$ ou K

($w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ normalise AZ)

On calcule le Jacobien de Ψ_T pour la mesure produit à gauche (Haar sur T)

$$d\Psi_{(g,t)} : \underset{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}\;\;\;\mathfrak{t}}{(X, H)} \longmapsto \lim_{u \to 0} \frac{g t^{-1} g^{-1} g e^{uX} t e^{uH} (g e^{uX})^{-1} - 1}{u} = \mathrm{ad}_g(t^{-1} X t + H - X)$$

Dans les deux cas ($T = AZ$ ou K), le Jacobien vaut $|\Delta_T(t)|^2 \neq 0$

Ainsi
$$\int_G f(g)\,dg = \int_{G^{reg}} f(g)\,dg = \frac{1}{2}\int_{ZA^{reg}} \underbrace{\left(\int_{G/A} f(gtg^{-1})\,dg\right)|\Delta_A(t)|^2}_{O_A(f)(t)\,\Delta_A(t)}\,dt + \int_{K^{reg}} O_K(f)(t)\,\overline{\Delta_K(k)}\,dk \quad \blacksquare$$

Rmq Cette formule se généralise à ts les groupes de Lie semi-simples connexes, ainsi que sa preuve.
Particulièrement simple si G compact (un seul tore à conj près)
Ex : $G = SU(2)$, si f est inv. par conj $\int_G f(g)\,dg = \frac{\alpha}{2}\int_T f(t)\,|\Delta(t)|^2\,dt$
c'est la mesure intervenant par ex. dans Sato-Tate.

$t = e^{i\theta}$
$T \simeq S^1$
$dt = d\theta$
$\Delta(t) = \sin^2\theta$

II Séries principales et intégrales orbitales hyperboliques

On étudie, pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, puis sphérique, $O_A(f) : T^{reg} \to \mathbb{C}$ où $T = AZ$

si $t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \in T$, $\rho(t) = |a|$

<u>Lemme</u> (Terme constant) $\forall f \in \mathcal{C}_c(G)$ et $a \in T^{reg}$, $O_A(f)(a) = \rho(a)^{-1}\int_{K\times N} f(knak^{-1})\,dn\,dk$

En particulier, $O_A(f)$ se prolonge continûment à A par cette formule, C^∞ si f l'est.

<u>Preuve</u> formule d'intégration ANK : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(G/A)$, $\int_{G/A}\varphi(x)\,dx = \int_{K\times N}\varphi(kn)\,dk\,dn$

on peut le vérifier simplement par un calc. de Jac. comme ds la formule de Weyl (+ facile ici)

<u>Donc</u> $O_A(f)(a) = |\rho(a)-\rho(a)^{-1}|\int_{K\times N} f(knan^{-1}k^{-1})\,dk\,dn = \underbrace{\frac{|\rho(a)-\rho(a)^{-1}|}{|1-\rho(a)^2|}}_{\rho(a)^{-1}} \int_{K\times N} f(kn'ak^{-1})\,dn\,dk$ ∎

$n' = nan^{-1}a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n(1-\rho(a)^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$dn' = (1-\rho(a))^2\,dn$

Soit $\mathcal{C}_c^\infty(K\backslash G/K)$ les fonctions sphériques = K bi-invariantes, c'est une $\mathbb{C}$-alg convolution $\varphi * \psi(x) = \int_G \varphi(xy)\psi(y^{-1}x)\,dy$

<u>Théorème</u> (HC) $f \mapsto O_A(f)$ induit un isom d'algèbres $\mathcal{C}_c^\infty(K\backslash G/K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_c^\infty(A)^W$

(↑ mult point par point)

On a déjà vu que $O_A(f) \in \mathcal{C}_c^\infty(A)$ (lemme), de plus $|\rho(a)-\rho(a)^{-1}|$ est W-invariant où $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi que $O_a(f)$ $a \in A^{reg}$, donc $O_A(f) \in \mathcal{C}_c^\infty(A)^W$. La multiplicativité de ce morphisme ne sera pas utilisée ds la suite, c'est un exercice à partir de la formule d'intégration ANK (cf exp Fabrice) (Comparer cet énoncé avec Satake, remarquer qu'il implique $\mathcal{C}_c^\infty(K\backslash G/K)$ commutative)

<u>Preuve</u> Il ne reste que la bijectivité.

<u>Lemme 1</u> $\mathcal{C}_c^\infty([1,\infty[) \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(A)^W$ et $\mathcal{C}_c^\infty([1,\infty[) \longrightarrow \mathcal{C}_c(G)$

$F \longmapsto F\left(\frac{\rho^2(a)+\rho^{-2}(a)}{2}\right)$, $\varphi \longmapsto \varphi\left(\frac{\operatorname{trace}\,{}^t g g}{2}\right)$

sont des bijections.

<u>Preuve</u> Pour le premier point, il s'agit de voir, via $\exp$ $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} A$, $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ paire, il existe une unique $\tilde{h} \in \mathcal{C}_c^\infty([0,\infty[)$ telle que $h(x) = \tilde{h}(\operatorname{ch} 2x - 1)$.

Pour cela, on démontre d'abord cet énoncé avec $\operatorname{ch} 2x - 1$ remplacé par la fonction x^2.

Dans ce cas, on pose $\tilde{h}(u) = h(\sqrt{u})$ et il faut voir que $\tilde{h} \in \mathcal{C}_c^\infty([0,\infty[)$. Cela vient de ce que pour tout entier m, $h(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{x^{2i}}{(2i)!} h^{(2i)}(0) + x^{2m+2} S_m(x)$, où $S_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (Taylor reste intégral). On conclut en remarquant que $\operatorname{ch} 2x - 1 = \psi(x^2)$ où ψ est un C^∞ difféo de $\mathbb{R}^{\geq 0}$ ($\psi(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^n$).

Vérifions maintenant la seconde assertion. Remarquons d'abord que $g \mapsto \frac{\operatorname{tr} {}^t g g}{2}$ induit une bijection $K\backslash G/K \xrightarrow{\sim} [1, \infty[$. En effet, la décomposition de Cartan (= déc polaire + réduction des matrices sym.) écrit tout $g \in G$ sous la forme $k a k'$ où $k, k' \in K$, et $a \in A$ est unique si $\rho(a) \geq 1$, donc uniquement déterminé par $\rho(a) \geq 1$. Or $\frac{\operatorname{tr} {}^t g g}{2} = \frac{\operatorname{tr} a^2}{2} = \frac{\rho(a)^2 + \rho(a)^{-2}}{2}$, et on conclut.

Pour revenir à l'énoncé, il ne reste qu'à voir la surjectivité de $\mathcal{C}_c^\infty([1,\infty[) \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty({}_K\backslash G/_K)$.

Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(K\backslash G/K)$, alors $f_{|A} \in \mathcal{C}_c^\infty(A)^W$. Par le premier point, $\exists\, F \in \mathcal{C}_c^\infty([1,\infty[)$ telle que $\underset{\hat{A}}{f(a)} = F\left(\frac{\rho(a)^2 + \rho(a)^{-2}}{2}\right) = F\left(\frac{\operatorname{tr} {}^t a a}{2}\right)$. En particulier, $g \mapsto F\left(\frac{\operatorname{tr} {}^t g g}{2}\right)$ est $\mathcal{C}_c^\infty(K\backslash G/K)$ et coïncide avec f sur A, donc partout, QED ∎

__Lemme 2__ Via les identifications du Lemme 1, $f \mapsto O_A(f)$ s'écrit

$$\mathcal{C}_c^\infty([1,\infty[) \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty([1,\infty[)$$
$$\varphi \longmapsto \left(u \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(u + \frac{x^2}{2}\right) dx\right)$$

__Preuve__ Si $f(g) = \varphi\left(\frac{\operatorname{tr} {}^t g g}{2}\right)$, $O_A(f)(a) = \rho(a)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho(a) & 0 \\ 0 & \rho(a)^{-1} \end{pmatrix}\right) dx$

(l'intégrale sur K a disparu car $f(kgk^{-1}) = f(g)$ $\forall g, k \in K$)

$$\overset{x \mapsto \rho(a)^{-1}x}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\underbrace{\frac{\rho(a)^2 + \rho(a)^{-2}}{2}}_{u = \frac{\rho(a)^2 + \rho(a)^{-2}}{2}} + \frac{x^2}{2}\Big) dx = F(u)$$

$$\varphi\left(\frac{\rho(a)^2 + \rho(a)^{-2} + \rho(a)^{-2}x^2}{2}\right)$$

$\Rightarrow F(u) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(u + \frac{x^2}{2}\right) dx$ ∎

Pour conclure, il faut donc voir que la flèche du lemme 2 est bijective.

__Lemme 3__ Un inverse est donné par $F \longmapsto \left(u \longmapsto -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F'\left(u + \frac{y^2}{2}\right) dy\right)$

__Preuve__ • $-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi'\left(u + \frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\, dy \overset{dx\,dy = r\,dr\,d\theta}{=} -\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \varphi'\left(u + \frac{r^2}{2}\right) \underbrace{r\,dr}_{d\frac{r^2}{2}} = -\left[\varphi(u+\mu)\right]_0^\infty = \varphi(u)$

• Dans l'autre sens c'est la même formule (avec $\varphi \mapsto F$), QED ∎

Cet énoncé nous sera utile plus tard, à la preuve du thm principal. Nous établissons maintenant un lien entre séries principales et O_A.

__Série principale__ Soit $T = AZ$ et $\chi : T \to \mathbb{C}^\times$ un caractère continu, i.e. $\chi_{|A} = \rho^s$, $s \in \mathbb{C}$.

On pose $I_\chi = \left\{ f : G \to \mathbb{C} \text{ mesurables},\ f(tng) = (\chi\rho)(t) f(g),\ f_{|K} \in L^2(K, \text{haar}) \right\}$ $\forall t \in T, n \in N, g \in G$

On rappelle que $G = TNK$, $T \cap K = Z$, de sorte que $\|f_{|K}\|$ munit I_χ d'une structure de Hilbert $\underset{K}{\simeq} L^2(K, \text{haar})^{\pm}$, $\pm = \chi(-1)$

C'est une représentation continue de G, dans le sens que $G \times I_\chi \to I_\chi$ est continue.

En effet, si $g \in G$ et si $g = a(g)n(g)k(g)$ est sa décomposition ANK alors

$$g \cdot \Psi(k') = \Psi(k'g) = (\chi\delta)(a(k'g))\,\Psi(k(k'g)) \quad \text{et} \quad \begin{cases} k' \mapsto a(k'g) & \text{continue donc d'image compacte} \\ k' \mapsto k(k'g) & \text{difféo de } K \end{cases}$$

l'action de G sur $TN \backslash G = Z \backslash K$

Ainsi $g\Psi \in L^2_{|K}$ et la continuité se voit par le thm de convergence dominée.

Prop (i) I_χ est unitaire si χ l'est, i.e. si $s \in i\mathbb{R}$; unitarisable si $-1 < s < 1$ et $\chi(-1) = 1$.

(ii) I_χ est topologiquement irréductible sauf si $\chi(t) = x^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, auquel cas elle a deux ($m = 0$) ou trois ($m \neq 0$) sous quotients irréd top.

$\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{smallmatrix}\right)$

(iii) $I_\chi \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, |\chi(1+x^2)|^2 dx)$, l'action de G étant donnée par

$$f \mapsto f_{|\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1\end{smallmatrix}\right)} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \cdot f(x) = (\rho\chi)(bx+d)^{-1} f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right), \quad x \neq -\frac{b}{d}$$

Preuve: On ne prouvera pas (i) dans cet exposé (cf celui de Pascale) car cela ne sert pas au thm principal, et seulement une partie de (ii) plus loin. Vérifions (iii). Si $\bar N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $B\bar N \subset G$ est un ouvert dense. On a les formules

$B = TN$

$$\begin{pmatrix} (1+x^2)^{\frac12} & * \\ 0 & (1+x^2)^{-\frac12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (1+x^2)^{-\frac12} & -x(1+x^2)^{-\frac12} \\ x(1+x^2)^{-\frac12} & (1+x^2)^{-\frac12} \end{pmatrix}}_{= k(x)} \in K, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{bx+d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (bx+d)^{-1} & 0 \\ 0 & (bx+d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{ax+c}{bx+d} & 1 \end{pmatrix}$$

La seconde donne l'action de G, la première montre que si $\Psi \in I_\chi$

$$\int_K |\Psi(k)|^2 dk \underset{\substack{\sin\theta = (1+x^2)^{-\frac12} \\ dk = d\theta = -\frac{dx}{1+x^2}}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(k(x))|^2 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\chi\delta((1+x^2)^{1/2})}{(1+x^2)} \right|^2 \left|\Psi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1\end{pmatrix}\right|^2 dx, \quad \underline{\text{QED}}$$

Nous allons maintenant calculer, pour $f \in \mathcal{C}^\infty_c(G)$, la trace de f dans I_χ. On notera $\pi_\chi(f)$ la représentation de f dans I_χ.

Rappel

- H hilbert, T opérateur borné de H, "T à trace" si $\exists$ BON (e_i) $\mid \sum_{i,j} |\langle Te_i, e_j\rangle| < \infty$ on pose alors $\operatorname{tr} T = \sum_i \langle Te_i, e_i \rangle$, indépendant de (e_i).
- X variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte, T opérateur bn de $H = L^2(X)$ à noyau $T(f)(x) = \int_X K(x,y) f(y) dy$ où $K \in \mathcal{C}^0(X \times X)$. Alors T est à trace et $\operatorname{tr} T = \int_X K(x,x) dx$.

(cf Knapp, chap X lemmes 10.1 et 10.11)

Proposition Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Alors $\pi_\chi(f)$ est à noyau sur $L^2(K)$, de trace

$$\mathrm{tr}\, \pi_\chi(f) = \int_T O_A(f)(t)\chi(t)\, dt$$

Preuve Si $s \in \mathbb{C}$, soit $I_s = \left\{ f : G \to \mathbb{C} \text{ mes}, f_{|K} \in L^2(K, dk),\ f(ang) = \rho(a)^{s+1} f(g),\ \forall a \in A, n \in N, g \in G \right\} = I_{\chi^+} \oplus I_{\chi^-}$ où $\chi^\pm{}_{|A} = \rho^s$ et $\chi^\pm(-1) = \pm 1$

Si $\psi \in I_s$, $\pi_s(f)(\psi)(k) = \int_G f(g)\psi(kg)\, dg = \int_G f(k^{-1}g)\psi(g)\, dg = \int_{A\times N\times K}^{ANK} f(k^{-1}ank')\psi(ank')\, da\, dn\, dk'$

$= \int_K K(k,k')\psi(k')\, dk$ où $K(k,k') = \int_{A\times N} f(k^{-1}ank')\rho(a)^{s+1}\, da\, dn \in \mathcal{C}^\infty(K\times K)$

Donc $\mathrm{tr}\, \pi_s(f) = \int_K K(k,k)\, dk = \int_{K\times A\times N} f(\underbrace{k^{-1}\underbrace{an}_{\to an}k})\rho(a)^s \underbrace{\rho(a)da\, dn}_{\text{le même terme contour}}\, dk = \int_A O_A(f)(a)\rho(a)^s\, da$

On conclut en écrivant $\mathrm{tr}\, \pi_s(f) = \mathrm{tr}\, \pi_{\chi^+}(f) + \mathrm{tr}\, \pi_{\chi^-}(f)$ et $f = f^+ + f^-$ ← pair : $f^+(-g) = f^+(g)$; ↖ impaire $f^-(-g) = -f^-(g)$ ∎

Corollaire ① Soit f satisfaisant ⓘ du thm à prouver, alors $\mathrm{tr}(\pi_\chi(f)) = 0 \ \forall \chi$.

ⓘⓘ $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G) \longmapsto \mathrm{tr}(\pi_\chi(f))$ est une distribution L^1_{loc}, nulle sur $G_{reg,K}$ et donnée par $\dfrac{\chi + \chi^w}{|\rho - \rho^{-1}|}$ sur $G_{reg,T}$.

Preuve: ⓘ évident. ⓘⓘ on pose $\Theta = 0$ sur $G_{reg,K}$ et $\Theta = \dfrac{\chi + \chi^w}{|\rho - \rho^{-1}|}$ sur $G_{reg,T}$ (noter que c'est bien W-invariant) Alors

$$\int_G f(g)\Theta(g)\, dg \overset{\text{Weyl}}{=} \frac{1}{2}\int_T \Theta(t)\, O_A(f)(t)\Delta_T(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_T O_A(f)(t)(\chi + \chi^w)(t)\, dt$$

$$= \int_T O_A(f)(t)\chi(t)\, dt = \mathrm{tr}\, \pi_\chi(f)$$

(noter que $O_K(f\Theta)(k) = \Theta(k)\, O_K(f) = 0$)

car $O_A(f)(t^w) = O_A(f)(t)$, $dt^w = dt$. ∎

Il reste à étudier O_K. On ne le fera pas complètement. Elles sont reliées aux séries discrètes.

III La série discrète

Soit m un entier, $D_m = \left\{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \text{ holomorphes},\ L^2\left(\mathbb{H}, \frac{dx\,dy}{y^2}\, y^m\right) \right\}$

Par la formule de Cauchy, c'est un espace de Hilbert pour la norme ↖, il est muni d'une action de G par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(z) = (-bz+d)^{-m} f\left(\dfrac{az-c}{-bz+d}\right)$

La mesure $\dfrac{dx\,dy}{y^2}$ étant invariante par G, on vérifie de suite que D_m est une rep. unitaire de G

Théorème (i) $D_m \neq 0$ ssi $m \geq 2$, auquel cas c'est une rep. irréductible top. de G.
(ii) $D_m|_K \simeq \bigoplus_{n\geq 0} \chi^{m+2n}$, où $\chi\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = e^{i\theta}$
(iii) D_m est discrète, i.e. se plonge isométriquement dans $L^2(G, \text{haar})$

Preuve. Il est plus commode d'utiliser le modèle du disque hyperbolique $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}, |w|<1\}$
Dans $Sl_2(\mathbb{C})$, $G = u\,SU(1,1)\,u^{-1}$ et $SU(1,1) = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1\right\} \subset Sl_2(\mathbb{C})$
où $u = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$
auquel cas $\begin{cases} D_m \text{ se réécrit comme } L^2_{hol}\left(\mathbb{D}, \dfrac{dw}{(1-|w|^2)^{2-m}}\right), \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} \cdot f(w) = (-\beta w + \bar\alpha)^{-m} f\left(\dfrac{\alpha w - \bar\beta}{\beta w + \bar\alpha}\right) \\ u^{-1}Ku = \left\{\begin{pmatrix}e^{i\theta} & \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\right\}\end{cases}$

. Si $f \in D_m$, $f(w) = \sum_{n\geq 0} a_n w^n$ et $k\cdot w^n = \chi(k)^{m+2n}\, w^n$ donc $\sum \mathbb{C}\, w^n \cap D_m$
il vient que le sous espace des vecteurs K-finis de D_m (qui est dense) est $\left(\sum \mathbb{C}\, w^n\right) \cap D_m$
Or $w^n \in D_m \Leftrightarrow \int_{\mathbb{D}} |w|^{2n}\, dw\, (1-|w|^2)^{m-2} = 2\pi \int_0^1 r^{2n}\, r\,(1-r^2)^{m-2}\, dr = \pi \int_0^1 r^n (1-r)^{m-2}\, dr < \infty$
d'où $m \geq 2$, auquel cas $\|w^n\| \underset{m}{\sim} \dfrac{\pi}{m}$ (pas normée). Cela démontre le (ii), et le début de (i). Irréductibilité : si $V \subset D_m$ est fermé il suffit de voir que $1 \in V$ (unitarité).
Si $f \neq 0 \in V$, alors par translation ops $f(0) \neq 0$, mais alors $\int_K k\cdot f\, dk = f(0)\, 1 \in V$. QED

. Le fait que D_m soit discrète se déduit de l'existence d'un coefficient matriciel qui soit dans $L^2(G)$ (cf. Knapp prop. 9.6). Vérifions que c'est le cas de $\Psi\, g \mapsto \langle g1, 1\rangle$
On a $|\Psi(g)|^2 = |\Psi(a_t)|^2 = \langle (-\operatorname{sh}t\, w + \operatorname{ch}t)^{-m} 1, 1\rangle^2 = \left(\int_{\mathbb{D}} (-\cancel{\operatorname{sh}t\, w} + \operatorname{ch}t)^{-m}\, dw\, (1-|w|^2)^{m-2}\right)^2 \sim \dfrac{(\operatorname{ch}t)^{-2m}}{(m-1)^2}$
$g = k a k'$
$a_t = \begin{pmatrix}\operatorname{ch}t & \operatorname{sh}t\\ \operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\end{pmatrix}$ puis on utilise la formule d'intégration KA^+K (exercice) de $|\Psi(g)|^2$ (sphérique)

$$\int_G |\Psi(g)|^2 dg = \int_{\mathbb{R}} |\Psi(a_t)|^2 \operatorname{sh}2t\, dt \sim \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sh}2t}{\operatorname{ch}t^{2m}}\, dt < \infty \quad \text{si } m \geq 2.$$

Remarque importante : Il y a beaucoup de normes hilbertiennes non équivalentes sur $Hol(\mathbb{D})$ muni de l'action de type D_m et qui feront du Hilbert associé une rep. irréd. de G en général non isom. à D_m, bien qu'extrêmement similaire dans le sens où les vecteurs K-finis seront "isomorphes" $\rightsquigarrow$ cf théorie des $(\mathfrak{g},K)$-modules, exposé de pascale. En particulier, soit

$$\tilde{D}_m = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ hol, se prolongeant continûment à } \bar{\mathbb{D}} \right\} \text{ munies de } \|f\|^2 = \int_{S^1} |f(z)|^2\, \underset{\text{Haar}}{dz}$$

On voit que pour $m \geq 2$, $\sum \mathbb{C}\, w^n \subset \tilde{D}_m$. De plus

$$\Big\|\underbrace{\sum_{n\geq 0} a_n w^n}_{f(w)}\Big\|^2_{D_m} = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \underbrace{\|w^n\|^2}_{\sim \frac{\pi}{m}} \leq C \cdot \|f(w)\|_{\tilde{D}_m} \quad \left(\text{pour lequel } \|w^n\|_{\tilde{D}_m} = 1\right).$$

On a donc une injection continue (en fait compacte) et G-équivariante d'image dense

$$\tilde{D}_m \longrightarrow D_m$$

<u>Lemme</u> Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ bi K-finie, alors $\mathrm{tr}(f|_{\tilde{D}_m}) = \mathrm{tr}(f|D_m)$

<u>Preuve</u> En effet, $\tilde{D}_m \hookrightarrow D_m$ est bijective sur les vecteurs K-finis

et

$$\begin{tikzcd} \tilde{D}_m \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \tilde{D}_m \arrow[d] \\ D_m \arrow[r, "f"] & D_m \end{tikzcd}$$

est commutatif. ■

<u>Autre remarque</u> L'élément $s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) - SL_2(\mathbb{R})$ et induit un aut. extérieur de $SL_2(\mathbb{R})$ par $g \mapsto sgs^{-1}$ se restreignant en $k \mapsto k^{-1}$ sur K.
Ainsi $D_m^s =: D_{-m}$ n'est pas isom à D_m, ses K-types sont inversés. On parle de série discrète anti-holomorphe. Elle est explicitement réalisée en remplaçant "holom." par "anti-holom" (i.e $z \to \bar{z}$) dans la définition de D_m. Idem $\tilde{D}_{-m}$.

<u>Proposition</u> Soit $m \geq 2$ un entier et $I_{m-1} = I_\chi$ où $\chi\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = x^m$, alors il existe un sous espace fermé G-stable de I_{m-1} isomorphe à $\tilde{D}_m \oplus \tilde{D}_{-m}$, de quotient $\mathrm{Sym}^{m-2}\mathbb{C}^2$.

<u>Preuve</u> Un exercice montre que $f \in \tilde{D}_m$ (resp. $\tilde{D}_{-m}$) $\longmapsto f|_{S^1}$ induit un plongement isométrique $\tilde{D}_{\pm m} \hookrightarrow I_{m-1}$. Une inspection des K-types montre que $\tilde{D}_m \cap \tilde{D}_{-m} = \{0\}$, et aussi que $I_{m-1}/_{\tilde{D}_m \oplus \tilde{D}_{-m}}$ est de dim finie, de K-types $\chi^{m-2}, \chi^{m-4}, \dots, \chi^{2-m}$, c'est donc $\mathrm{Sym}^{m-2}\mathbb{C}^2$ ■

<u>Définition</u> Si $m \geq 2$, on pose $\pi_m = D_m \oplus D_{-m}$.

<u>Corollaire</u> Si $f \in \mathcal{C}_c(G)$ bi K-finie, $\mathrm{tr}(\pi_m(f)) + \mathrm{tr}(\mathrm{Sym}^{m-2}\mathbb{C}^2(f)) = \mathrm{tr}(I_{m-1}(f))$

<u>Théorème</u> (Duflo Labesse) Soit $m \geq 2$. Il existe $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ bi K-finie telle que

(i) $\mathrm{tr}(\pi_{m'}(f)) = -\delta_{m,m'}$

(ii) $\mathrm{tr}(\mathrm{Sym}^{m'-2}(f)) = \delta_{m,m'}$

(iii) $O_A(f) \equiv 0$ sur AZ^{reg}

(iv) $f(-g) = (-1)^m f(g)$ $\forall g$

(v) $f(sgs^{-1}) = f(g)$ $\forall g$.

On commence par regarder $\mathcal{C}(G,m) = \{ f : G \to \mathbb{C} \mid f(kgk') = \chi^{m}(k) f(g) \chi^{m}(k') \}$ (10)
$\in \mathcal{C}_c^\infty(G)$

<u>Lemme</u> (i) V un Hilbert $\supseteq$ rep. de G. $\forall f \in \mathcal{C}(G,m)$ et $v \in V$, $f \cdot v \in V_m = \{ w \in V, kw = \chi(k)^m w \}$

(ii) si $\dim V_m = 1$, $\exists f \in \mathcal{C}(G,m) \mid f v = v$ si $v \in V_m$.

<u>Preuve</u> (i) est évident. Pour (ii), $V_m = \mathbb{C}e$. Soit $(f_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ une suite de Dirac en 1.
$f_n \cdot e \xrightarrow[n\to\infty]{} e$. Si $e_n = \int_K \chi(k)^{-n} k \cdot dk$ est le projecteur sur la partie χ^n-isotypique,
$e_m \cdot e = e$ et donc $(e_m f_n e_m) e \xrightarrow[n\to\infty]{} e$. En particulier $\exists n \mid (e_n f_n e_n)(e) \neq 0$
$\underset{\mathcal{C}(G,m)}{\cap}$ donc $= \lambda e$, $\lambda \neq 0$

et $\frac{1}{\lambda} e_n f_n e_n$ a la prop voulue ∎

Retournons à Duflo-Labesse. L'analyse des K-types des $D_{m'}$ montre que

$\exists f_m \in \mathcal{C}(G,m) \mid \mathrm{tr}(D_m(f_m)) = -1$

$f_{m-2} \in \mathcal{C}(G,m-2) \mid \mathrm{tr}(D_{m-2}(f_m)) + \mathrm{tr}(D_{m-2}(f_{m-2})) = 0$

$f_{i=1 \text{ ou } 2} \in \mathcal{C}(G, 1 \text{ ou } 2) \mid \mathrm{tr}(D_i(f_m)) + \cdots + \mathrm{tr}(D_i(f_i)) = 0$

et telle que $\mathrm{tr}(D_{m'}(\varphi)) = -\delta_{m',m}$ $(m' \in \mathbb{Z}, \neq 0, 1, -1)$

Alors $\varphi = f_1 + \cdots + f_{m-2} + f_m$ est telle que satisfait (i), (ii) et (v).

Par construction $\varphi(-g) = (-1)^m \varphi(g)$, et $\tilde{\varphi}(g) := \frac{1}{2}(\varphi(g) + \varphi(sg s^{-1}))$ satisfait (i), (ii) et (v)

On termine la preuve seulement pour <u>m pair</u> (on a besoin de $m=2$ ds le reste du GT)

On regarde $O_A(\tilde{\varphi})_{|A}$, on sait par le théorème II qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(K \backslash G / K) \mid$
$\mathcal{C}(G,0)$

$O_A(\psi) = -O_A(\tilde{\varphi})_{|A}$ de plus qpo $\psi^s = \psi$ quitte à remplacer ψ par $\frac{\psi + \psi^s}{2}$.

Alors $\psi + \tilde{\varphi}$ satisfait toutes les hypothèses du théorème, car $\mathrm{tr}(\psi \mid D_{m'}) = 0$ $\forall m'$ ∎

(noter que $f = \psi + \tilde{\varphi}$ est pair, donc $O_A(f) = 0$ sur $-A$, donc $O_A(f) \equiv 0$, et $\mathrm{tr}(I_\chi(f)) = 0$ $\forall \chi \Rightarrow$ (ii) par le corollaire)

On termine maintenant la preuve du théorème principal. On prend pour fonction f celle donnée par le théorème de Duflo-Labesse.

On a déjà dit que $O_A(f) \equiv 0 \Rightarrow \mathrm{trace}(f \mid I_\chi) = 0$ $\forall \chi$.

Il ne reste qu'à calculer $O_K(f)(k)$ pour tout $k \in K$, or

$$+\delta_{m',m} = -\mathrm{tr}(\Pi_{m'}(f)) = +\mathrm{tr}(\mathrm{Sym}^{m'-2}(f)) = \int_G f(g)\, \Theta_{m'}(g)\, dg \quad \text{où } \Theta_{m'} = \mathrm{trace}\ \mathrm{Sym}^{m'-2}\mathbb{C}$$

$$\overset{\text{Weyl}}{=} \int_K \Theta_{m'}(k)\, O_K(f)(k)\, \bar{\Delta}_K(k)\, dk$$

$+ O_A(f) \equiv 0$

$\forall m' \neq 0, \pm 1$

or $\Theta_{m'}(k) = \dfrac{\chi^{m'-1} - \chi^{1-m'}}{\chi - \chi^{-1}}$ si $k \in K$ donc $\delta_{m',m} = \int_K \overline{(\chi^{m'-1} - \chi^{1-m'})}\, O_K(f)(k)\, dk$.

<u>or</u> $O_K(f)(k^{-1}) = -O_K(f)(k)$ par (v) de Duflo-Labesse

Les relations d'orthogonalité donnent donc $O_k(f) = \chi - \chi$

puis $\boxed{\forall k \in K - Z, \quad O_k(f) = \Theta_m(k)}$

Il ne reste qu'à comprendre $O_{\pm 1}(f) = f(\pm 1)$. Comme $f(-1) = (-1)^m f(1)$ il suffit de comprendre $f(1)$. Cela découle de la formule précédente et du résultat suivant.

Lemme (Formule limite d'Harish-Chandra) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, alors

$$-i\pi\, \varphi(1) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} O_k(\varphi)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ce lemme se démontre par réduction à l'algèbre de Lie, mais l'admettrons (cf. Varadarajan p.185, Theorème 22.

Ainsi, pour notre fonction f, $-i\pi f(1) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} 2i\sin(m-1)\theta = 2i(m-1)$

puis $f(1) = -\frac{2}{\pi}(m-1) \approx \Theta_m(1)$

signe de l'énoncé $\quad \frac{\text{volume } SO(2)}{\text{volume } SU(2)}$, QED ■

Cor. Soit $m \geq 2$ un entier et $A > 1$ un réel. Il existe $f_A \in \mathcal{C}_c^\infty(GL_2(\mathbb{R}))$ bi-K-finie telle que $\forall \gamma$ semisimple, et pour un choix convenable de mesures,

$$O_\gamma(f) = 0 \text{ si } \gamma \text{ non ell}, \quad e(\gamma)\, \mathrm{tr}\, \gamma | \mathrm{Sym}^{m-2} \mathbb{C}^{*2} \text{ si } \gamma \text{ ell et } A^{-1} < |\det \gamma| < A$$

où $e(\gamma) = 1$ si γ non centr..., -1 si $\gamma \in$ centr...

et telle que

- $\mathrm{tr}\, \pi(f_A) = 0$ si π série principale de $GL_2(\mathbb{R})$
- $\mathrm{tr}\,((\pi_{m'} \otimes \psi)(f_A)) = 0$ si $m' \neq m$, $\doteq -1$ / $\neq 0$ si le caractère central de $\pi_m \otimes \psi$ et anz proche de de $\mathrm{Sym}^{m-2}\mathbb{C}$...
- $\mathrm{tr}\,((\mathrm{Sym}^{m'-2} \otimes \psi)(f_A)) = 0$ ———, $\doteq +1$ ——— avec égalité si $\psi = 1$.

Preuve On définit f_A comme étant nulle sur $\{g \mid \det g < 0\}$ et $f_A(zg) = \psi_A(z) f(g)$, f donnée par le théorème, et ψ_A définie comme suit ($z \in \mathbb{R}^\times$, $g \in SL_2(\mathbb{R})$). D'abord $\psi_A \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$, $\psi_A(z) = z^{-m+2}$ si $\frac{1}{A} < |z| < A$, et telle que $\int_{\mathbb{R}^\times} \psi_A(z)\, z^{m-2}\, dz = 1$. Alors on vérifie immédiatement que f_A a les propriétés requises. ■