Formule de Kottwitz

GT Gaëtan, 16/12/18

$n \geq 5$ $\quad S = S_{\Gamma_1(n)}$ courbe modulaire (ouverte) sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/n]$

qui paramètre $\left(E, \varphi : \mathbb{Z}/n \hookrightarrow E[n]\right) / \mathrm{iso}$
"point d'ordre n"

Soit $p \nmid n$, $r \geq 0$ $\quad \mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^r} \subset \overline{\mathbb{F}_p}$

On fixe dans toute la suite $(E, \varphi) \in S(\mathbb{F}_p)$

On note $S(\mathbb{F}_{p^r})_E$ le ss-ens de $S(\mathbb{F}_{p^r})$ formé des (E', φ') avec E' isogène à E

<u>But</u> : exprimer $\# S(\mathbb{F}_{p^r})_E$ en termes de théorie des groupes

1) Modules de Tate & Dieudonné

À toute courbe ell E' sur $\mathbb{F}_{p^r}$ on associe

* $\underbrace{T^p(E')}_{\substack{\text{convention :} \\ ?^p = \text{hors } p}} = \prod_{\ell \neq p} \underbrace{T_\ell(E')}_{:= T_\ell(E'_{\overline{\mathbb{F}_p}})}$, un $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$-mod libre rg 2 avec action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^r})$

* Notons $\mathbb{Q}_{p^r}$ l'ext nr de $\mathbb{Q}_p$ de degré r (dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ fixé)
$\mathbb{Z}_{p^r}$ $\quad \mathbb{Z}_{p^r} / p\mathbb{Z}_{p^r} \simeq \mathbb{F}_{p^r}$

$\sigma : \mathbb{F}_{p^r} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{p^r}$ $\quad x \mapsto x^p$ détermine $\sigma : \mathbb{Z}_{p^r} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{p^r}$

car $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^r}/\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^r}/\mathbb{F}_p)$ $\quad \mathbb{Q}_{p^r} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_{p^r}$

$$T_p(E') := \prod E'[p^\infty] \quad , \quad \text{B } F$$

module de Dieudonné — $B_t \, \mathrm{Im}_p$

noter la $\neq$ entre T_p et T^p
coeff plus gros,
prob plus petit

un $\mathbb{Z}_{p^r}$-mod libre avec deux endo F et V
qui sont σ-linéaires et σ^{-1}-linéaires

$$\left[F(\lambda x) = \sigma(\lambda) F(x), \quad V(\sigma(\lambda)x) = \lambda V(x) \right]$$

tq $FV = VF = p$ [rem : F^r agit linéairement]

Une structure $\varphi : \mathbb{Z}/n \subset E'[n]$ donne

$$\varphi : \mathbb{Z}/n \subset T^p(E') / nT^p(E') = E'[n]$$

et rien sur $T_p(E')$ car $p \nmid n$!

Une isogénie $E' \to E''$ induit une injection à conoyau fini

$$T_p(E') \to T_p(E'')$$
$$T^p(E') \to T^p(E'')$$

(T_p et T^p covariants)

introduire $V^p(E')$ et $V_p(E')$?

donc un iso

$$T_p(E') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} T_p(E'') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ de } \mathbb{Q}_{p^r}\text{-mod}$$
$$T^p(E') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} T_p(E'') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ de } \mathbb{A}_f^p\text{-mod}$$

$$(\mathbb{A}_f^p = \hat{\mathbb{Z}}^p \otimes \mathbb{Q} = \prod_{\ell \neq p}' \mathbb{Q}_\ell)$$

<u>Notation</u>

$$T^p(E) \subset V^p = V^p(E) = T^p(E) \otimes \mathbb{Q} \quad \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p / \mathbb{F}_{p^r})$$

$$T_p(E) \subset V_p = T_p(E) \otimes \mathbb{Q}$$

$F, V \circlearrowright$

On ne marque pas E, car constant ds la classe d'isogénie

2] Expression en termes de réseaux

$X^p = \{ \hat{\mathbb{Z}}^p$- réseaux T^p ds $V^p \}$ avec $\mathbb{Z}/n \subset T^p/nT^p$ $\Leftarrow$ $\left(\begin{array}{l} I(\mathbb{Q}) = (\mathrm{End}\, E \otimes \mathbb{Q})^* \\ \text{grp réd}/\mathbb{Q} \end{array} \right)$

$X_p = \{ \mathbb{Z}_{p^2}$ avec rien $V_p \}$ $\Leftarrow$

$Y^p \subset X^p$ les réseaux avec $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ - stables (φ ~~est~~ $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ - stable également) | stables par $I(\mathbb{Q})$

$Y_p \subset X_p$ (F, pF^{-1}) - stables

Définissons une application $S(\mathbb{F}_{p^2})_E \to I(\mathbb{Q}) \backslash (Y^p \times Y_p)$ plgt diago

de la manière suivante :

$$\left(\begin{array}{cc} E' & \varphi' \\ f \downarrow \text{isogénie choisie} & \\ E & \end{array} \right) \longmapsto \begin{array}{l} T^p E' \subset (T^p E') \otimes \mathbb{Q} = V^p \\ + \ \mathbb{Z}/n \subset T^p E' / n T^p E' = E'[n] \\ \text{et idem avec } T_p E' \end{array}$$

Prop : cela induit une bijection $S(\mathbb{F}_{p^n})_E \leftrightarrow I(\mathbb{Q}) \backslash Y^p \times Y_p$

Rap - Zink

demo injectivité deux $(E_1, \varphi_1), (E_2, \varphi_2) \in S(\mathbb{F}_{p^n})_E$ sont qisogènes

il suffit de voir que

$$\left[\forall f \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \otimes \mathbb{Q}, \ \left(\begin{array}{l} f T^p(E_1) \subset T^p(E_2) \\ \text{et } f T_p(E_1) \subset T_p(E_2) \end{array} \right) \Leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \right]$$

$\exists N$ tq $N f \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ À voir : $Nf = 0$ sur $E_1[N]$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{Nf} & E_2 \\ N \downarrow & \nearrow f \text{ qisog} & \\ E_1 & & \end{array}$$

et de même, $f \in \mathrm{Hom}((E_1, \varphi_1), (E_2, \varphi_2)) \Leftrightarrow f T^p(E_1) \subset T^p(E_2)$

$$\begin{array}{ccc} T^p(E_1)/n & \xrightarrow{f} & T^p(E_2)/n \\ \varphi_1 \uparrow & & \nearrow \varphi_2 \\ & \mathbb{Z}/n & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ si $p \nmid N$ $\quad E_1[N] = T^p E_1 / N T^p E_1$

or $\quad Nf(T^p(E_1)) \subset N T^p(E_2)$

donc $\quad Nf : \; T^p(E_1)/NT^p(E_1) \longrightarrow T^p(E_2)/NT^p(E_2)$

$$\begin{array}{ccc} T^p(E_1)/NT^p(E_1) & \longrightarrow & T^p(E_2)/NT^p(E_2) \\ \wr & & \wr \\ E_1[N] & \xrightarrow{=0} & E_2[N] \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ si N puissance de p (OK par th chinois ...)

il faut savoir que la catégorie des sch en grps finis plats / $\mathbb{F}_p^n$ est équivalente par $\mathbb{D}$ à celle des $\cancel{\mathbb{Z}}_{p^n}$-mod de torsion avec F, V

et $\mathbb{D}.E_1[p^s] = \mathbb{D}(E_1) / p^s \mathbb{D}(E_1)$

la preuve précédente marche (on utilise la ~~pleine~~ fidélité de $\mathbb{D}$)

<u>surjectivité</u> Soit $T^p \subset V^p$ et $T_p \subset V_p$ ($\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et F, V stables)

Ops (quitte à agir par $I(\mathbb{Q})$) que

$$T^p(E) \subset T^p \quad \text{et} \quad T_p(E) \subset T_p$$

fait (utilise ~~pleine~~ <u>essentielle surjectivité de $\mathbb{D}$</u>) :

les ss-gp finis et plats de E correspondent aux ss-groupes $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et (F,V)-stables

de $\quad T^p(E) \otimes \mathbb{A}_f^p / \hat{\mathbb{Z}}^p \quad$ et $\quad T_p(E) \otimes \mathbb{Q}_{p^n} / \mathbb{Z}_{p^n}$

Or $\quad T^p(E) \subset T^p$ donne $\quad T^p(E) \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}^p} \mathbb{A}_f \twoheadrightarrow T^p \otimes \mathbb{A}_f^p / \hat{\mathbb{Z}}^p$

et $\quad T_p(E) \otimes \mathbb{Q}_{p^n} / \mathbb{Z}_{p^n} \twoheadrightarrow T_p \otimes \mathbb{Q}_{p^n} / \mathbb{Z}_{p^n}$ $\quad$ - - -

plutôt : $\quad \bigoplus_{\ell \neq p} \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell$

[3] Explicitation de $Y^p, Y_p, I(\mathbb{A}_f)$ et $I(\mathbb{Q}_p)$ en termes de groupes

via choix d'une base de T^p et T_p, on a

$$X^p = G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \qquad G = GL_2$$

$$X_p = G(\mathbb{Q}_{p^r})/K_{p^r} \qquad K^p = \{g \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}}^p) \text{ tq } g \bmod n = \begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & *\end{pmatrix}\}$$

$$K_{p^r} = GL_2(\mathbb{Z}_{p^r})$$

$\mathrm{Frob}_r \in \mathrm{Aut}(T^p)$ fournit $\gamma \in G(\mathbb{A}_f^p)$ bien défini modulo conj

$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_{p^r})$

$x \mapsto x^{p^r}$

$F \in \mathrm{Aut}(V_p)$ fournit $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^r})$ bien défini modulo σ-conj (ie on écrit $F = \delta\sigma$)

(F pas bijectif sur T_p ---)

[b est σ-conj à b' si $\exists g \in G(\mathbb{Q}_{p^r})$ tq $b = g^{-1} b' \sigma(g)$]

Lem

1) $g \in G(\mathbb{A}_f^p)/K^p$ définit un réseau de Y^p ssi $g^{-1}\gamma g \in K^p$

2) $g \in G(\mathbb{Q}_{p^r})/K_{p^r}$ --- Y_p ssi $g^{-1}\delta\sigma(g) \in K_{p^r}\begin{pmatrix}p & \\ & 1\end{pmatrix}K_{p^r}$

demo 1) clair

2) $g \in G(\mathbb{Q}_{p^r}) / K_{p^r}$ $\leftrightarrow$ réseau $T_p = g\, T_p(E)$

On veut : $p\, T_p \subset F\, T_p \subset T_p$

$\iff p\, T_p(E) \subset g^{-1}\delta\sigma(g)\, T_p(E) \subset T_p(E)$

$\iff p\, T_p(E) \subsetneq g^{-1}\delta\sigma(g)\, T_p(E) \subsetneq T_p(E)$

car $\det(\underbrace{F^r}_{\text{linéaire}}) = p^r$

$\iff T_p(E) / g^{-1}\delta\sigma(g)\, T_p(E) \simeq \mathbb{F}_{p^r}$

$\iff$ quitte à change de base de $T_p(E)$ au départ et à la source, matrice de $g^{-1}\delta\sigma(g) = \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\iff g^{-1}\delta\sigma(g) \in K_{p^r} \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} K_{p^r}$

identification de $I(\mathbb{A}_f^p)$ et $I(\mathbb{Q}_p)$ grâce aux 2 th de Tate

Rappel

$$\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{A}_f^p \simeq \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p / \mathbb{F}_{p^r}),\ \mathbb{A}_f^p\text{-lin}}(V^p)$$

$$\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q}_p \simeq \mathrm{End}_{F,\ \mathbb{Q}_{p^r}\text{ lin}}(V_p)$$

[preuve idem]

cette différence est logique

coro : 1) $I(\mathbb{A}_f^p) = G(\mathbb{A}_f^p)_\gamma$ centralisateur

2) $I(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_{p^r})_{\delta\sigma}$ σ-centralisateur, grp alg sur $\mathbb{Q}_p$

$= \{ g \in G(\mathbb{Q}_{p^r}) \text{ tq } g^{-1}\delta\sigma(g) = \delta \}$

4] Première formule intégrale

Prop : $$\# S(\mathbb{F}_{p^r})_E = \int_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r})} f^p(g^{-1}\gamma g)\, f_p(g^{-1}\delta\sigma(g))\, \frac{dg}{di}$$ où

$I(\mathbb{Q})$ pas th. des groupes

f^p = fonc indic de K^p ds $G(\mathbb{A}_f^p)$

f_p = —— $K_{p^r}\begin{pmatrix} p & \\ & 1\end{pmatrix} K_{p^r}$ ds $G(\mathbb{Q}_{p^r})$

dg = Haar (unimodulaire) sur $G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r})$ qui vaut 1 sur $K^p \times K_{p^r}$

di = mesure de comptage (Haar)

Démo. 1) $\# S(\mathbb{F}_{p^r})_E = \# \; I(\mathbb{Q})\backslash Y^p \times Y_p$

$$= \sum_{\substack{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r}) / K^p\times K_{p^r} \\ \ni g}} f^p(g^{-1}\gamma g)\, f_p(g^{-1}\delta\sigma(g))$$

discret

[car $I(\mathbb{Q})\backslash X^p \times X_p = \sum_{\text{idem}} 1$]

2) $$\int_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r})} \dots = \sum_{\substack{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r}) / K^p\times K_{p^r} \\ \ni g}} f^p(g^{-1}\gamma g)\, f_p(g^{-1}\delta\sigma(g)) \times$$

$$\mathrm{vol}_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r})}\left(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{Q})\, g\, K^p\times K_{p^r}\right)$$

9

en effet, f^p et f_p sont K^p et K_p - invariantes

$$\int_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r})} f^p f_p = \sum \int_{K^p\times K_{p^r}} \text{ etc } \ldots$$
$I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r})/K^p\times K_{p^r}$

3) $\mathrm{vol}\left(_{I(\mathbb{Q})}\backslash^{I(\mathbb{Q})} g K^p \times K_{p^r}\right) = 1$

résulte du calcul explicite de $I(\mathbb{Q})$: $(\text{corps } (n))^*$ ou $(\text{quat})^*$ dans ts les cas ; $\mathbb{R}$-anisotrope modulo centre déployé

plus précis

$$\mathrm{vol}_{I\backslash G}\left(_I\backslash I g K\right) \underset{\substack{\text{Haar}\\ \text{à droite}}}{=} \mathrm{vol}_{I\backslash G}\left(_I\backslash I g K g^{-1}\right) \underset{\substack{\text{déf de}\\ \mathrm{vol}_{I\backslash G}}}{=} \frac{\mathrm{vol}_G(gKg^{-1})}{\mathrm{vol}_I(I\cap gKg^{-1})}$$

$$= \frac{1}{\#(I\cap gKg^{-1})}$$

mais $I\cap gKg^{-1} = \{1\}$ $\quad\forall g\in G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^r})$

cela résulte de : si $h\in I\cap gKg^{-1}$, $h\in T$ un tore max $/\mathbb{Q}$ par anisotropie de I. On a toujours $T = (\text{corps quad CM})^*$

$h \in$ compact donc h unité dans corps quad CM

donc $h = \pm 1, \pm i, \pm e$ $\quad (e^3=1)$

h conjugué à un élément de K^p $\Rightarrow$ pol car de h ds $G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{B})$

$\cancel{\equiv (T-1)^2} \bmod n$

$\equiv (T-1)(T-x) \bmod n$ $\quad x$ inversible mod n

$= T^2 - (x+1)T + x$

Rem : pour l'instant, la th de Tate et le calcul de ~~...~~ $I(\mathbb{A}_f^p)$ et $I(\mathbb{Q}_{p^r})$ n'a pas servi

Rem bis! $\int_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^n})}$ pas théorie des groupes

5 Intégrales orbitales (tordues) pas th groupes

Prop! $\#S(\mathbb{F}_{p^n})_E = \mathrm{vol}\left(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)\right) O_\gamma(f^p)\, TO_\sigma(f_p)$

où

$$O_\gamma(f^p) = \int_{G(\mathbb{A}_f^p)_\gamma \backslash G(\mathbb{A}_f^p)} f^p(g^{-1}\gamma g)\, \frac{dg}{dt}$$

classe de conj — Haar au pif sur $G(\mathbb{A}_f^p)_\gamma$

$$TO_\sigma(f_p) = \int_{G(\mathbb{Q}_{p^n})_{\delta\sigma}\backslash G(\mathbb{Q}_{p^n})} f_p(g^{-1}\delta\sigma(g))\, \frac{dg}{du}$$

classe de σ-conj — au pif sur $G(\mathbb{Q}_{p^n})_{\delta\sigma}$

$\mathrm{vol}(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f))$ est calculé avec $\frac{dt\times du}{di}$] transporté via $I(\mathbb{A}_f) \subseteq G(\mathbb{Q}_{p^n})\times G(\mathbb{A}_f^p)$] comptage

Rem $O_\gamma = \prod_{v\neq p,\infty}$ - invariant $\boxed{\text{local}}$

Rem O_γ et TO_δ sont mal défini (choix de du, dt) seule l'expression totale est bien définie

Par contre, O_γ et TO_δ ne dépendent pas du choix de γ et δ dans leur classe de conj / σ-conj

demo: évident $\int_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^n})} = \int_{I(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^n})} \int_{I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)}$

puis $\boxed{\text{Tate}}$ (enfin utilisé) rem : $I(\mathbb{Q})$ fermé ~~dans~~ $I(\mathbb{A}_f)$ OK car $I/_{\text{centre déployé}}$ est anisotrope $/\mathbb{R}$ (11)

≠ Approx forte : si $G'(\mathbb{R})$ n'a pas de facteur anisotrope, et que G' est ssimple simpl. connexe, alors $G'(\mathbb{Q})$ dense ds $G'(\mathbb{A}_f)$

$\leadsto$ ${}_{G'(\mathbb{Q})}\backslash^{G'(\mathbb{A}_f)}$ non séparé

Exercice ??

Pb / $\mathrm{vol}\left({}_{I(\mathbb{Q})}\backslash^{I(\mathbb{A}_f)}\right)$ pas théorie des groupes

6/ Nombres de Tamagawa

$Z(\mathbb{R})$ centre réel de $I(\mathbb{R})$ ~~[illegible]~~

dz — au pif , dv

Lem
$$\mathrm{vol}\left({}_{I(\mathbb{Q})}\backslash^{I(\mathbb{A}_f)}\right) = \frac{\mathrm{vol}\left({}_{I(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})}\backslash^{I(\mathbb{A})}\right)_{di \times dz}^{dt \times du \times dv}}{\mathrm{vol}\left({}_{Z(\mathbb{R})}\backslash^{I(\mathbb{R})}\right)_{dz}^{dv}}$$

avec $\frac{dt \times du}{di}$ transporté

[indép de dz et dv]

~~évident, utilise juste $I(\mathbb{Q})$ $Z(\mathbb{R})$~~

But : écrire $\mathrm{vol}\left({}_{I(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})}\backslash^{I(\mathbb{A})}\right)$ en termes de théorie des groupes

Pour cela il faut introduire une donnée plus fine que γ, δ

Honda : la classe d'isog de E $\longleftrightarrow$ (le p^r - nombre de Weil)$/$ conj par Galois

$T^2 - aT + p^r$
$|a| \leq p^{r/2}$

$\leadsto$ γ_0 classe de conj dans $G(\mathbb{Q})$, elliptique ds $G(\mathbb{R})$ [12]

$\det \gamma_0 = p^r$

$$\text{polcar}(\gamma_0) = T^2 - aT + p^r$$

$$\gamma_0 \sim \begin{pmatrix} & -p^r \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

Bien sûr : γ_0 et γ sont conjugués ds $G(\mathbb{A}_f^p)$

[car le polcar de Frob_r sur ~~...~~ V^p est bien $T^2 - aT + p^r$]

de plus comme $F^r = \text{Frob}_r$,

γ_0 et $N\delta = (\delta\sigma)^r = \delta\,\sigma(\delta)\,\sigma^2(\delta) \cdots \sigma^{r-1}(\delta) \in G(\mathbb{Q}_p)$ sont conjugués dans $G(\mathbb{Q}_p)$.

Bref $\exists\, G_{\gamma_0}$ groupe sur $\mathbb{Q}$ tq $G_{\gamma_0}(\mathbb{A}_f^p) = G(\mathbb{A}_f^p)_\gamma$

[par contre, $G_{\gamma_0}(\mathbb{Q}_p) \neq G(B)_{\delta\sigma}$, cf Lemme Fondamental]

<u>Rem</u> on a utilisé pour la première fois quelque chose propre à GL_2 :

γ_0 est défini via son pol car, donc n'est a priori qu'une classe de $G(\overline{\mathbb{Q}})$-conj

Pour $G = GL_2$: 2 éléments de $G(\mathbb{Q})$ sont $GL_2(\overline{\mathbb{Q}})$-conj ssi ils sont $GL_2(\mathbb{Q})$-conj

$\leadsto$ la classe de conj de γ_0 a un sens

$\leadsto$ G_{γ_0} a un sens [en tt cas, $G_{\gamma_0} \backslash G$ en a un]

<u>Prop</u> G_{γ_0} est une forme intérieure de I

<u>demo</u> : th de Wedderburn $\exists$ isos abstraits $\text{End}(E) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq \text{Mat}_2(\overline{\mathbb{Q}})_{\gamma_0}$ [cas par cas sur I]

et tous les auto de Mat_{2,γ_0} sont intérieurs car γ elliptique ds $G(\mathbb{R})$

~~I_1 et I_2 sont deux grp~~

[$Z \hookrightarrow G_\gamma$ ok]

$\boxed{\text{Lem}}$ $$\mathrm{vol}\Big(\underbrace{I(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})\backslash I(\mathbb{A})}_{d_i \times d_3 \backslash dt \times du \times dv}\Big) = \mathrm{vol}\Big(\underbrace{G_\gamma(\mathbb{Q})}_{\text{discret}}\underbrace{Z(\mathbb{R})}_{d_3}\backslash G_\gamma(\mathbb{A})\Big)$$

la mesure sur $G_\gamma(\mathbb{A})$ s'obtient par transport intérieur de $dt \times du \times dv$

$\boxed{1}$ Transport intérieur de mesure $\quad$ I_1 et I_2 formes intérieures sur $\mathbb{Q}$ (réductifs connexes)

$$\{\text{Haar sur } I_1(\mathbb{A})\} = \{\text{Haar sur } I_2(\mathbb{A})\} \quad \text{canoniquement}$$

$r|\omega_1|$

$\uparrow$ non cano

r

$\mathbb{R}^+_*$ ~~Ha~~$_1$

~~forme volume~~

~~$da_1 t$~~ $I(\mathbb{A})$

ω_1 forme volume fixée sur $I_1(\mathbb{A})$

si loc, $\quad \omega_1 = f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \qquad n = \dim I_1$

$\qquad |\omega_1| := |f(x_1, \dots, x_n)|\, |dx_1| \dots |dx_n|$

avec $\quad |dx_i| = $ Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\quad 2 \times$ Lebesgue sur $\mathbb{C}$,

Haar qui vaut 1 sur les entiers sur les $\mathbb{Q}_v$

<u>Fait</u> les formes volumes se transfèrent à $I_2(\mathbb{A})$

car $I_2(\mathbb{A})$ unimodulaire $\Rightarrow$ $\det \mathrm{Ad} = 1$

$\Rightarrow \det \mathrm{Lie}\, I_1 \simeq \det \mathrm{Lie}\, I_2$

<u>sur $\mathbb{Q}$</u>

Donc $\omega_1 \mapsto \omega_2$ forme volume sur $I_2(\mathbb{A})$

$$r|\omega_1| \longmapsto r|\omega_2| \quad \text{ne dépend pas du choix de } \omega_1$$

$\boxed{2}$ Avec ce transfert de mesures, on a

$$\frac{vol\left(I_1(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})^{I_1(\mathbb{A})}\right)}{vol\left(I_2(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})^{I_2(\mathbb{A})}\right)} = \frac{\tau(I_1)}{\tau(I_2)}$$

← nbr de tamagawa

Conjecture $\tau(I_1) = \tau(I_2)$

prouvée facilement dans le cas $I_1 = \mathbb{I}$ (corps CM)* ou (quat)*
$I_2 = G_{\gamma_0}$

---

dt × du × dv transporté

NB dt trivial à transporter $G_\gamma(\mathbb{A}_f^p) = I(\mathbb{A}_f^p) =$

Conclusion :

$$\# S(\mathbb{F}_{p^r})_E = vol\left(G_{\gamma_0}(\mathbb{Q})\, Z(\mathbb{R})^{G_{\gamma_0}(\mathbb{A})}\right) O_\gamma(f^p)\; TO_\delta(f_p) \cdot \frac{1}{vol\left(Z(\mathbb{R})^{I(\mathbb{R})}\right)}$$

c'est le terme de volume de la formule des traces d'Arthur-Selberg

pas th des groupes !!

Rem 1) on a oublié la place à l'infini

2) La place en p a un rôle spécial (TO, pas O)

$\boxed{1}$ $\varepsilon(\gamma_0) = -1$ si γ_0 central, 1 sinon

$$\frac{\varepsilon(\gamma_0)}{vol\left(Z(\mathbb{R})^{I(\mathbb{R})}\right)} = O_{\gamma_0}(f_\infty) \qquad f_\infty \text{ cool}$$

de plus $O_{\gamma_0}(f_\infty) = 0$ si γ_0 n'est pas elliptique ds $G(\mathbb{R})$

$\boxed{2}$ $\varepsilon(\gamma_0)\, TO_\delta(f_p) = O_{N\delta}(\underbrace{\hat{f}_p}_{\text{explicite}})$ (Lemme fondamental)

$N\delta = \gamma_0$

EXERCICE : cas supersing γ_0