

Décomposition de $L^2(\omega)$, séries d'Eisenstein

INotations et rappels

$$A = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \text{ adèles}$$

$$G = GL_2 \quad Z = \text{centre de } G$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad P = MN$$

$$\bar{G} = G/Z \quad \bar{M} = M/Z \simeq \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{array}{l} K = \prod_v K_v \\ K_p = GL_2(\mathbb{Q}_p) \\ K_{\infty} = O(2) \end{array}$$

$GL_2(\mathbb{A})$ groupe topologique localement compact, muni d'une mesure de Haar dg

On fixe un caractère $\omega: Z(\mathbb{A}) \rightarrow U(1)$ trivial sur $Z(\mathbb{Q})$

$$L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}), \omega) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } f: G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable } f_g \\ \text{(ii) } f(zg) = \omega(z) f(g) \quad (z \in Z, g \in G(\mathbb{A})) \\ \text{(iii) } \int_{G(\mathbb{Q}) \backslash Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} |f|^2 dg < +\infty \end{array} \right\} / \sim$$

$L^2(\omega)$

espace de Hilbert sur lequel $G(\mathbb{A})$ agit par translation à droite de la variable $(L^2(\omega), R_{\omega})$

Fonctions tests $\mathcal{C}_c^{\infty}(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

espace des combinaisons linéaires de fonctions:

$$f = \sum_v f_v \quad \text{où } f_v \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G(\mathbb{R}))$$

f_p : localement constante à support compact sur $G(\mathbb{Q}_p)$

$$f(zg) = \omega^{-1}(z) f(g) \quad (\forall z \in Z(\mathbb{A}))$$

Pour presque tout p :

$$f_p(g) = \omega^{-1}(z) \quad \text{si } g = zk \quad \begin{array}{l} z \in Z(\mathbb{Q}_p) \\ k \in G(\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

$$(R_{\omega}(\phi) \circ f)(y) = \int_{\substack{G(\mathbb{A}) \\ \mathbb{Z}(\mathbb{A})}} \phi(x) f(yx) dx$$

$$\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$$

$$f \in L^2(\omega)$$

$$L_0^2(\omega) = \left\{ f \in L^2(\omega), \int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} f(ny) dy = 0 \right\}$$

pour p.t $y \in G(\mathbb{A})$

Sous-représentation de $(L^2(\omega), R_{\omega}) : R_{\omega}^0$

On a vu (exposé de C. Demarche)

Thm $\forall \phi$ fonction test

$$(i) R_{\omega}^0(\phi) : L_0^2(\omega) \rightarrow L_0^2(\omega)$$

est un opérateur à trace (de Hilbert-Schmidt, compact)

(ii) $L_0^2(\omega)$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles unitaires de $G(\mathbb{A})$ avec multiplicités finies.

But final : obtenir une formule pour $\text{tr } R_{\omega}^0(\phi)$

But de cet exposé : expliciter une décomposition :

$$L^2(\omega) = L_0^2(\omega) \oplus L_{\text{cont}}^2(\omega) \oplus L_{\text{res}}^2(\omega)$$

La présence des facteurs $L_{\text{cont}}^2(\omega)$ et $L_{\text{res}}^2(\omega)$ est due à l'existence du sous-groupe parabolique

$$P = MN = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } G, \text{ défini sur } \mathbb{Q}$$

\leftrightarrow non compacité du quotient $\mathbb{Z}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})$. (3)

