# Décomposition de $L^2(\omega)$, séries d'Eisenstein

## I Notations et rappels

$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ adèles

$G = GL_2$ $\qquad Z$ = centre de $G$

$M = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad P = MN$

$K = \prod_v K_v$

$K_p = G(\mathbb{Z}_p)$

$K_\infty = O(2)$

$\bar{G} = G/Z$ $\qquad \bar{M} = M/Z \simeq \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$GL_2(\mathbb{A})$ groupe topologique localement compact, muni d'une mesure de Haar $dg$

On fixe un caractère $\omega : Z(\mathbb{A}) \longrightarrow U(1)$ trivial sur $Z(\mathbb{Q})$

$$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \omega) = \left\{ f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \text{ mesurables tq } \begin{array}{l} \text{(i) } f(z\gamma g) = \omega(z) f(g) \ (z \in Z),\ \gamma \in G(\mathbb{Q}),\ g \in G(\mathbb{A}) \\ \text{(ii) } \int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |f|^2 dg < +\infty \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$\quad \| $

$L^2(\omega)$

espace de Hilbert sur lequel $G(\mathbb{A})$ agit par translation à droite de la variable

$(L^2(\omega), R_\omega)$

## Fonctions tests $\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

espace des combinaisons linéaires de fonctions :

$f = \prod_v f_v$ où $f_\infty \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{R}))$

$f_p$ : localement constante à support compact sur $G(\mathbb{Q}_p)$

$f(zg) = \omega^{-1}(z) f(g) \quad (\forall z \in Z(\mathbb{A}))$

Pour presque tout $p$ :

$f_p(g) = \omega^{-1}(z)$ si $g = zk$ $\quad z \in Z(\mathbb{Q}_p)$, $k \in G(\mathbb{Z}_p)$

$\qquad = 0$ sinon

$$(R_\omega(\phi)\cdot f)(y) = \int_{Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \phi(x)\, f(yx)\, dx$$

$\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

$f \in L^2(\omega)$

$$L^2_0(\omega) = \left\{ f \in L^2(\omega),\ \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} f(ng)\, dn = 0 \ \text{ pour p.t } g \in G(\mathbb{A}) \right\}$$

Sous-représentation de $(L^2(\omega), R_\omega)$ : $R^0_\omega$

On a vu (exposé de C. Demarche)

**Thm** $\forall \phi$ fonction test

(i) $R^0_\omega(\phi) : L^2_0(\omega) \longrightarrow L^2_0(\omega)$ est un opérateur à trace (de Hilbert-Schmidt, compact)

(ii) $L^2_0(\omega)$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles unitaires de $G(\mathbb{A})$ avec multiplicités finies.

But final : obtenir une formule pour $\mathrm{tr}\, R^0_\omega(\phi)$

But de cet exposé : expliciter une décomposition :

$$L^2(\omega) = L^2_0(\omega) \overset{\perp}{\oplus} L^2_{cont}(\omega) \overset{\perp}{\oplus} L^2_{res}(\omega)$$

La présence des facteurs $L^2_{cont}(\omega)$ et $L^2_{res}(\omega)$ est due à l'existence du sous-groupe parabolique

$$P = MN = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ de $G$, défini sur $\mathbb{Q}$

$\Longleftrightarrow$ non compacité du quotient $Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$.