Lemme fondamental

I] Introduction

$(N,p)=1 \qquad r\in\mathbb{N}_{\geq 1}$

$Y^1(N)$ courbe modulaire $\quad (E,P_N)\in Y^1(N)(\mathbb{F}_{p^r})$.

$S(\mathbb{F}_{p^r})_E = \{$ courbes ell. (E',P'_N) tq il existe une isogénie $\begin{matrix} E\to E' \\ P_N\to P'_N \end{matrix}\}$

Soit γ le nombre de Weil associé à E. (~~indépdt de~~ invariant ds $S(\mathbb{F}_{p^r})_E$)

Th : Soit γ ~~un nombre~~ $\in\bar{\mathbb{Q}}$ au plus quadratique. Alors γ est un nbre de Weil de $C.E\in S\mathbb{F}_{}$ ssi

- Soit $\gamma\in\mathbb{Q}$, $\gamma=\pm\sqrt{p^r}$. Ds ce cas E est SS, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} E = D$
- Soit γ est CM, posons $F=\mathbb{Q}[\gamma]$. $\mathrm{End}^{E}_{\mathbb{Q}}E = F$.
  - il y a une seule place v au dessus de p ds F
    E est SS et $v(\gamma)=\frac{r}{2}$ $\quad (v(p)=1)$
  - il y a deux places v, v' au dessus de p ds F et à l'ordre près
    $v(\gamma)=0 \qquad v'(\gamma)=r$.

Lien avec la théorie des groupes :

Soit γ au plus quadratique ds $\mathbb{Q}$. On lui associe des uniques orbites fermés ds $GL_2(\mathbb{R})$, $GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ $\ell\neq p$, $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ des éléments ayant le poly minimale de γ.

def : - $\gamma_{\mathbb{R}}\in GL_2(\mathbb{R})$ est ∞-admissible si $\gamma_{\mathbb{R}}$ est ~~semi-simple~~ elliptique

- $\gamma_p\in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est p^r-admissible (ou r-admissible) si γ_p est semi-simple, $v(\det\gamma_p)=r$, et de plus si γ_p est ~~elliptique~~ non elliptique

$$\gamma_p \underset{\text{conj}}{\simeq} \mathrm{diag}(\alpha,\beta) \quad v(\alpha)=0 \quad v(\beta)=r.$$

Conclusion : γ est le nombre de Weil d'une CE si les ~~orbites associées~~ ds classe de conjugu. ds $GL_2(\mathbb{R})$ et $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sont ∞-admissibles et p^r-admissibles

$$\# S(\mathbb{F}_{p^r})_\mathcal{E} = \mathrm{vol}\left(\frac{}{G_\gamma(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})} G_\gamma(\mathbb{A})\right) O_\gamma(f^p)\, TO_\delta(f_p)\, \varepsilon(\gamma)\, O_\gamma(f^\infty)$$

- $G = GL_2$, G_γ : centralisateur de γ.
- Z centre
- $f^p = 1\!\!1_{K^p(n)}$ $\quad K^p(N) = \left\{ \Pi \in G(\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell),\ \Pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod N \right\}$
- f_∞ pseudocoefficient.
- O_γ : intégrales orbitales.
- $\varepsilon(\gamma) = -1$ si γ central
  $= 1$ sinon.
- ~~$O_\gamma(f^\infty) = \dots$~~ $\delta \in GL_2(\mathbb{Q}_{p^r})$ est une matrice représentant le frob agissant sur le cristal de Dieudonné de $\mathcal{E}$, $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ ($\mathbb{Q}_{p^r}$ module de rang 2)

$$TO_\delta(f_p) = \int_{G_\delta^\sigma(\mathbb{Q}_{p^r}) \backslash G(\mathbb{Q}_{p^r})} f(g^{-1} f_p\, \sigma(g))\, dg/dg_\delta$$

- mesure de Haar standard sur GL_2
- mesures cohérentes sur G_γ, G_δ ...

Fait: Le lien entre δ et γ est le suivant : $F^r \circlearrowright \mathbb{D}(\mathcal{E})$ est linéaire et c'est le frobenius de $\mathcal{E}/\mathbb{F}_{p^r}$ de polynôme caractéristique celui de γ.
La matrice de $F^r = N(\delta) = \delta\, \sigma(\delta) \cdots \sigma^{r-1}(\delta)$.
" $N(\delta) = \gamma$ "
Fait : γ détermine la classe de σ-conjugaison de δ.

Thm : $b(f_p)$ le chgt de base de f_p.

$$\# S(\mathbb{F}_{p^r})_\mathcal{E} = \mathrm{vol}\left(\frac{}{G_\gamma(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})} G_\gamma(\mathbb{A})\right) O_\gamma(f^p)\, O_\gamma(b(f_p))\, O_\gamma(f^\infty)$$

De plus si $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est semi simple, $O_\gamma(b(f_p)) = 0$ si γ n'est pas p^r-admissible.

---

rk : $O_\gamma(f_\infty) = 0$ si γ n'est pas ∞-admissible

II) Classes de conjugaison et de σ-conjugaison

$N : G(\mathbb{Q}_{p^r}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_{p^r})$

$g \longrightarrow g\sigma(g)\dots\sigma^{r-1}(g)$

Prop :
- $N(x^{-1} g\, \sigma(x)) = x^{-1} N(g) x$
- $\sigma(N(x)) = x^{-1} N(x) x \iff N(x)^{-1} x\, \sigma(N(x)) = x$ ($x N(x)$ ~~σ-conte~~ $\in G_x^\sigma$)

Coro : la norme induit une application

$\left\{ \begin{array}{c} \text{classes de } \sigma\text{-conjug} \\ \text{de } G(\mathbb{Q}_{p^r}) \end{array} \right\} \xrightarrow{i} \left\{ \begin{array}{c} \text{classes de conjug} \\ \text{de } G(\mathbb{Q}_{p^r}) \end{array} \right\}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^r}/\mathbb{Q}_p)}$

$\cup\!\cup$

$\left\{ \begin{array}{c} \text{classe de conjug} \\ \text{sur } G(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\}$

Prop : • L'application i est injective.
. Soit $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^r})$, $N(\delta) = \gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ alors G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ ~~contrôle~~ $\mathbb{Q}_p$.
• On dit que δ est σ-semi-simple si $N(\delta)$ l'est. Dans ce cas ~~la~~ $\mathcal{O}^\sigma_{G(\mathbb{Q}_{p^r})}(\delta) = N^{-1}(\mathcal{O}_{G(\mathbb{Q}_{p^r})}(N(\delta)))$ est fermée
de plus G_γ et G_δ^σ ont des structures de $F = \mathbb{Q}_p[\sigma]$ schémas en groupes ~~algèbres~~ et sont F-algèbres en groupes $\Rightarrow G_\delta^\sigma, G_\gamma$ unimodulaire
des formes intérieures comme
$\Rightarrow$ les mesures de Haar se transfèrent ~~⇒ intégrale~~
L'intégrale orbitale tordue d'un élément semi-simple est donc bien définie (le F-module $\mathbb{Q}_{p^r}^2$, $F = \delta\sigma$ est alors le module de θ du jeu σ-admissible)
~~Démo~~ • On dit que δ est σ-admissible si $N(\gamma)$ l'est.
Si γ est σ-admissible il est une norme.

$N(x) = \alpha^{-1} N(y)\, \alpha = N(\alpha^{-1} y\, \sigma(\alpha))$ (qps $\alpha = 1$)

Démo : Soit $x, y \in G(\mathbb{Q}_{p^r})$,
1) Injectivité de i.
. $H = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_{p^r}} G \circlearrowleft \theta$ autom induit par σ.
. $H(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_{p^r})$, $\theta = \sigma$.
. $H(\mathbb{Q}_{p^r}) = G(\mathbb{Q}_{p^r})^n$ $\quad \theta(x_1, \dots x_r) = (x_2, \dots x_{r-1})$
$H(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_{p^r}) \nearrow \quad x \longmapsto (x, \sigma(x), \dots \sigma^{r-1}(x))$

$G_\delta^\sigma = H_\delta^\theta$

Soit $T = \{ g \in H_\delta^\theta \quad g^{-1} x\, \theta(g) = y \}$, c'est soit ∅ soit un torseur sous H_x^θ

lemme : $T \neq \emptyset$, en effet on vérifie que $(1, x^{-1}y, \sigma(x)^{-1} x^{-1} y\, \sigma(y), \dots, \sigma^{r-2}(x)^{-1} \dots x^{-1} y\, \sigma(y) \dots \sigma^{r-2}(y)) \in T(\mathbb{Q}_{p^r})$. Or $H^1_{et}(\mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}_p, H_\sigma^\theta) = 0$ (Kottwitz) de T est trivial.

2) Si γ est r-admissible il est une norme
- cas $\gamma = \mathrm{diag}(a, b)$ $v(a) = 0$ $v(b) = r$
- cas $\gamma = \mathrm{diag}(a,a)$ $v(a) = r/2$
- cas γ elliptique non central $F = \mathbb{Q}_p[\gamma]$

$N : \mathbb{Q}_{p^r} \to \mathbb{Q}_p$

$GL_2(\mathbb{Q}_{p^r}) \to \mathbb{H}^\times$

$N : (\mathbb{Q}_{p^r} \otimes F)^\times \to F^\times$ étale non ramifié.

III) Le lemme fondamental

Thm : $f_r : GL_2(\mathbb{Q}_{p^r}) \to \mathbb{Z}$ $= \mathbb{1}_{K_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} K_r}$

$b(f_r) = f : GL_2(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Z}$

a pour support $\{ g \in M_2(\mathbb{Z}_p) \cap GL_2(\mathbb{Q}_p),\ v(\det g) = r \}$

et si $g \in \mathrm{Supp}\, b(f_r)$, $f(g) = 1$ si $\bar{g}$ est non nulle
$= (1-p)$ si $\bar{g}$ est nulle

Soit γ un élément ss
$O_\gamma(b(f)) = 0$ si γ n'est pas r-admissible

Soit δ un élément ss.
$TO_\delta(f_r) = 0$ si δ n'est pas r-admissible.

Soit $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^r})$, $N(\delta) = \gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ un couple d'éléments r-admissibles
$O_\gamma\, b(f_r) = \varepsilon(\gamma)\, TO_\delta(f_r)$.

IV) Démonstration dans le cas elliptique

Thm γ elliptique, $f = b(f_r)$

1) $O_\gamma(f) = 0$ sauf si γ est r-admissible

2) si γ est r-admissible
- γ est centrale $O_\gamma(f) = f(\gamma) = (1-p)$

3) si γ est elliptique non central $F = \mathbb{Q}_p[\gamma] \ni F^\times = G_\gamma$ équipé de la mesure de Haar qui vaut 1 sur $\mathcal{O}_F^\times$
$O_\gamma(f) = 1$ si $F/\mathbb{Q}_p$ est ramifiée
$O_\gamma(f) = 2$ sinon.

dém : $O_\gamma(f) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\, dg / dg_\gamma$

~~1) Supp f~~

1) Évident, si $v(\det(\gamma)) \neq r$ $f(g^{-1}\gamma g) = 0$

2) Évident, $G_\gamma = G$.

3)

R un sous anneau de O_F, libre de rang 2 sur $\mathbb{Z}_p$, de corps résiduel $\mathbb{F}_p$.

$$\mathrm{Res}_R = \{ L \subset O_F,\ \text{~~réseaux~~ libres de rg 2 comme } \mathbb{Z}_p\text{-modules, } R\text{-modules, tq } O_F . L = O_F \}.$$

Lemme 1 Res_R est fini.

En effet $R \subset O_F$ est ~~un sous réseau~~ d'indice fini donc $\exists n$ $m_{O_F}^n \subset m_R$

$$m_{O_F}^n . L = m_{O_F}^n \subset L \subset O_F .$$

On définit une fonction

$$f : \mathrm{Res}_R \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$L \longmapsto 1 \text{ si } \dim L / m_R L = 1$$
$$L \longmapsto (1-p) \text{ si } \dim L / m_R L = 2$$

~~Prop~~ $O_R = \sum_{L \in \mathrm{Res}_R} f(L)$

Prop 1 $O_\gamma(f) = O_{\mathbb{Z}_p[\gamma]}$ où $\mathbb{Z}_p[\gamma]$ est du type précédent. idéal maximal p, γ.

~~Prop 2 O_R indépendant de R~~

déf : $\int_{g \in G_\gamma \backslash G} f(g^{-1} \gamma g)\, dg / dg^\gamma$

$\mathrm{Supp} = \{ g \in GL_2(\mathbb{Q}_p),\ g^{-1}\gamma g \in M_2(\mathbb{Z}_p) \}$

$G_\gamma \backslash \mathrm{Supp} / K = \Gamma$. Si $g_0 \in \Gamma$ le stabilisateur de $G_\gamma g_0$ sous K

$= \{ k,\ g_0 k \in G_\gamma g_0 \} = K \cap g_0^{-1} G_\gamma g_0$

$$O_\gamma(g) = \sum_{g_0 \in \Gamma} f(g_0)\, \mathrm{vol}\left(\frac{K}{K \cap g_0^{-1} G_\gamma g_0}\right) = \sum_{g_0 \in \Gamma} f(g_0) \frac{1}{\mathrm{vol}(G_\gamma \cap g_0 K g_0^{-1})}$$

* $G/K \longleftrightarrow$ réseaux de $\mathbb{Q}_p^2$
  $g \longrightarrow g\mathbb{Z}_p^2$
* $\mathrm{Supp}/K \longleftrightarrow$ réseaux de $\mathbb{Q}_p^2$ stables sous γ
* $G_\gamma \backslash \mathrm{Supp}/K \longleftrightarrow$ réseaux de $\mathbb{Q}_p^2$ stables sous γ / $\sim$

$L \sim L' \iff \exists g : L \xrightarrow{\sim} L'$ γ-équivariant.

$F \longleftrightarrow \mathbb{Q}_p^2$ $\quad \Gamma \longleftrightarrow F^\times \backslash \{ \text{~~Res~~} \subset F,\ \mathbb{Z}_p(\gamma)\text{-module, } \mathbb{Z}_p \text{ modules de rg 2 libres} \}$

$F^\times \longleftrightarrow G_\gamma$

$\longleftrightarrow O_F^\times \backslash \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p[\gamma]}$

$L \in \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p[\gamma]}$, $\mathrm{Stab}_{O_F^\times}(L) = \{ G_\gamma \cap g_0 K g_0^{-1} \}$. Notons $i(L)$ son indice dans $O_F^\times$

$L = g_0 \mathbb{Z}_p^2$

$$O_\gamma(g) = \sum_{g_0 \in \Gamma} f(g_0)\, i(L) = \sum_{\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p[\gamma]}} f(L)$$

car : $f(g_0) = 1$ $\quad g_0^{-1}\gamma g_0 : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{Z}_p^2$ est réductellement non nulle 5

$\gamma : g_0\mathbb{Z}_p^2 \to g_0\mathbb{Z}_p^2$ est "

$\gamma : L/pL \to L/pL$ dim $L/(\gamma,p)L = 1$

$f(g_0) = 1-p$ $\quad$ dim $L/(\gamma,p)L = 2$

$f(L)$ ne dépend pas de la $\mathcal{O}_F^\times$ orbite ~~de~~ L.

Prop 2 : Si R est tel que $m_{\mathcal{O}_F} \in m_R$ alors

$o_R = 1$ si $F/\mathbb{Q}_p$ est ramifié

$o_R = 2$ si $F/\mathbb{Q}_p$ non ramifiée.

dém : $L \in \mathrm{Res}_R$ $\quad \mathrm{Res}_R \xrightarrow[\text{réd}]{\sim}$ sous ~~modules~~ $\mathbb{F}_p$ vect de $\mathcal{O}_F/m_{\mathcal{O}_F}$ non nuls.

$m_{\mathcal{O}_F} \not\subseteq L \subset \mathcal{O}_F$

cas 1 : F ramifié, $\mathcal{O}_F/m_{\mathcal{O}_F} = \mathbb{F}_p$. $\quad \mathrm{Res}_R = \mathcal{O}_F \quad f(L) = 1$

cas 2 : F non ramifié. $\quad \mathrm{Res}_R = \{ \mathrm{réd}^{-1}$ (sous $\mathbb{F}_p$ vect de dim 1 de $\mathcal{O}_F/m_{\mathcal{O}_F}) \} \cup \mathcal{O}_F$.

$o_R = 1-p + p+1 = 2$

Prop 3 : o_R ~~est~~ indépendant de R, $o_R = 1$ ou 2 selon que F ramifié ou non

dém : récurrence sur la puissance minimale n tq $m_{\mathcal{O}_F}^n \subset m_R$.

$R_1 = R + m_{\mathcal{O}_F}^{n-1}$ $\quad m_{R_1} = m_R + m_{\mathcal{O}_F}^{n-1}$ $\quad m_R L = m_{R_1} L_1$

$\mathrm{Res}_R \xrightarrow{\psi} \mathrm{Res}_{R_1}$

$L \longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{L_1}}{R_1 L} = L + m_{\mathcal{O}_F}^{n-1} L$

$$\begin{array}{ccc} & & L_1/m_R L_1 \\ & \nearrow & \downarrow \\ L/m_R L & \twoheadrightarrow & L_1/m_{R_1} L_1 \end{array}$$

La fibre de ψ en L_1 s'identifie aux sous ~~modules~~ $\mathbb{F}_p$ vect $\overset{\shortparallel}{R/m_R}$ de $L_1/m_R L_1$ qu'ils ~~relèvent~~

surjectant sur $L_1/m_{R_1}L_1$

En effet soit $L_1 \supset L \supset m_R L_1$ un R module. Il faut mq $R_1 L = L_1$

tq $L + m_{R_1} L_1 = L_1$

$L + m_{\mathcal{O}_F}^{n-1} L_1 = L_1 \Rightarrow \underbrace{L + m_{\mathcal{O}_F}^{n-1} L}_{R_1 L} + m_R L_1 = L_1$

$\Rightarrow R_1 L = L_1$

$o_R = \sum_{L \in \psi^{-1}(L_1)} f(L)$ $\quad \longrightarrow$ cas $L_1/m_{R_1}L_1$ ~~de dim 1~~ $= L_1/m_R L_1$

$\sum_{L \in \psi^{-1}(L_1)} f(L) = f(L_1)$ $\quad \longrightarrow$ cas dim $L_1/m_{R_1}L_1 = 1$, dim $L_1/m_R L_1 = 2$

$f(L_1) = 1$ $\quad \sum_{L \in \psi^{-1}(L_1)} \underbrace{p}_{\text{autres}} + \underbrace{1-p}_{L_1} = 1$

Notation : $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^r})$, $N(\delta) = \gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ ss. $F = \mathbb{Q}_p[\gamma]$ $\quad F \hookrightarrow D$

$D = G_\delta^\sigma \quad F^\times \hookrightarrow D^\times$

$(F = \mathbb{Q}_p,\ D = \text{quat})$

$(F = D \text{ quad})$

Thm : ~~$\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^r})$~~

- $TO_\delta(f_r) = 0$ sauf si γ est r-admissible
- si γ est r admissible $TO_\delta(f_r) = 1$ si $[k_F : \mathbb{F}_p] = 1$ avec Haar

$\qquad = 2$ si $[k_F : \mathbb{F}_p] = 2$ tq $v(O_\delta) = 1$

(thm implique le lemme fondal pour les éléments ~~non~~ elliptiques)

Prop : Notons $L_n = (\delta\sigma)^n \mathbb{Z}_{p^r}^2$. Supposons $\delta \in M_2(\mathbb{Z}_{p^r})$, $v(\det \delta) = 1$

L est un réseau tq $\delta\sigma L \subset L$. Alors L est de la forme L_n.

(BT de pente $1/2$ sur $\mathbb{F}_{p^r}$ isogènes : l'isogénie est une puissance du frobenius)

démo : $\exists N \quad (\delta\sigma)^N \mathbb{Z}_{p^r}^2 \subset p\mathbb{Z}_{p^r}^2$

$\qquad (\delta\sigma)^{-N} \mathbb{Z}_{p^r}^2 \supset p^{-1}\mathbb{Z}_{p^r}^2$

$\exists!\, n \quad L \subset L_n$

$\qquad L \not\subset L_{n+1}$

L_n/L_{n+1} est de longueur 1 $\quad x \in L$ engendre L_n/L_{n+1}

$x, \delta\sigma(x), \dots, \delta^m\sigma^m(x)$ engendre L_n/L_{n+m}

$L_n = L + L_{n+m}$, mais pour $m \gg$, $L_{n+m} \subset L$.

$L = L_n$ $\boxed{\ }$ évident

démo du thm : $TO_\delta(f_r) = \int_{G_\delta^\sigma \backslash G} f(g^{-1}\delta\sigma(g)) \frac{dg}{dg_\sigma}$

$\text{Supp} = \{g,\ g^{-1}\delta\sigma(g) \in M_2(\mathbb{Z}_{p^r})\}/K$

$G_\delta^\sigma \backslash \text{Supp}/K \Leftrightarrow D^\times \backslash \{\text{réseaux } \delta\sigma \text{ stables}\} = \Gamma$

$\text{Aut}_{D^\times}(L) = \{g \in D^\times,\ gL = L\}$

$TO_\delta(f_r) = \sum_{L \in \Gamma} \frac{\text{vol}}{\text{vol}(\text{Aut}_{D^\times}(L))}$

$0 \to O_D^\times \to D^\times \xrightarrow{v_D} \mathbb{Z} \to 0 \qquad v_D(\pi) = 1$

$0 \to O_D^\times \to D^\times/\gamma^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/v(\gamma)\mathbb{Z} \to 0.$

$\text{Aut}_{O^\times}(L)$

$\gamma^{\mathbb{Z}} \backslash \{\text{réseaux } \delta\sigma \text{ stables}\} \longleftrightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \qquad \gamma L_n = L_{n+r}$

$r = \sum_{L \in \Gamma} [D^\times/\gamma^{\mathbb{Z}} : \text{Stab}_{D^\times}(L)]$

$TO_\delta(f_r) = r/[D^\times/\gamma^{\mathbb{Z}} : O_D^\times] = \frac{r}{v_D(\gamma)} = 2$ si D ramifié, $= 1$ si D non ramifié

$v_p(\gamma) = \frac{r}{2} \qquad v_D(\gamma) = \frac{r}{2}$ si D non ramifiée, $= r$ si D ramifiée

Dans le cas elliptique ~~non~~ centrale :

On a $TO_\gamma(f_0) = 1$ $\quad O_\gamma(f) = 1-p$

$V(O_D^\times) = 1$ $\quad V(GL_2(\mathbb{Z}_p)) = 1$

~~$V(GL_2(\mathbb{F}_p)) = (p^3-1)(p^2-p)$~~

Thm : Soit dg une mesure de Haar sur GL_2, $d\tilde{g}$ son transfert à $D^\times$.

$$\frac{V(GL_2(\mathbb{Z}_p), dg)}{V(O_D^\times, d\tilde{g})} = (p-1)$$

démons :

D est une forme de $M_2(\mathbb{Q}_p)$

$D^\times$ $\quad GL_2(\mathbb{Q}_p)$ $\quad O_D$ n'est pas une algèbre d'Azumaya sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p$!

⚠ $H^2(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p, G_m) = 0$ donc

I : $\mathrm{End}\left(V_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}} V_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p\end{pmatrix}} V_1\right)$ $\quad I^\times(\mathbb{Z}_p) = \begin{pmatrix} * & * \\ p & * \end{pmatrix}$

$I^\times$: Aut ($\quad$) $\quad$ I : le modèle lisse de l'Iwahori.

La matrice $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ agit par conjugaison sur I (c'est une action intérieure en fibre générique).

$$D(\mathbb{Q}_p) \simeq \{ g \in I(\mathbb{Q}_{p^2}),\ \sigma(g) = \pi^{-1} g \pi \} \quad \text{iden avec } D(\mathbb{Z}_p)$$

$$I(\mathbb{Q}_p) = \{ g \in I(\mathbb{Q}_{p^2}),\ \sigma(g) = g \} \quad I(\mathbb{Z}_p)$$

sont des formes l'une de l'autre.

$D/_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p}$ et $I/_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p}$

Les mesures de Haar sur $D^\times$ et $I^\times$ sont de la forme $\frac{dg}{\|g\|}$, dg une mesure de Haar additive.

Prenons dg sur $I^\times$ de réduite non-nulle en fibre spéciale $\Rightarrow \mathrm{vol}(I(\mathbb{Z}_p)) = 1$

$\quad$ " $\quad \Rightarrow \mathrm{vol}(D(\mathbb{Z}_p)) = 1$

$d\tilde{g}$ sur D

$$\frac{dg}{\|g\|} \rightsquigarrow \frac{d\tilde{g}}{\|\tilde{g}\|}$$

$$\mathrm{vol}(I^\times(\mathbb{Z}_p)) = \cancel{\mathrm{vol}}\,(I^\times(\mathbb{F}_p)) \times \mathrm{vol}(1 + pI(\mathbb{Z}_p))$$
$$= \frac{1}{p^4} \cancel{\#}(I^\times(\mathbb{F}_p)) = \frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$\mathrm{vol}(D^\times(\mathbb{Z}_p)) = \mathrm{vol}(1 + \pi D(\mathbb{Z}_p)) \times \#(\mathbb{F}_{p^2}^\times)$$
$$= \frac{1}{p^2} \times (p^2 - 1)$$

$$\mathrm{vol}(GL_2(\mathbb{Z}_p)) = (p+1)\,\mathrm{vol}(I^\times(\mathbb{Z}_p)) = \frac{(p+1)(p-1)^2}{p^2}$$

$$\frac{\mathrm{vol}(GL_2(\mathbb{Z}_p))}{\mathrm{vol}(D^\times(\mathbb{Z}_p))} = (p-1)$$

V Démonstration dans le cas semi-simple non elliptique

1 Lemme fondamental pour GL_1

Posons $[\lambda]_r = p^{\lambda}\mathbb{Z}_{p^r}^{\times}$ ~~$p^{\lambda}\mathbb{Z}_p$~~

$b([\lambda]_r) = [r\lambda] = p^{r\lambda}\mathbb{Z}_p^{\times}$

Thm: $\delta \in \mathbb{Q}_{p^r}^{\times}$, $N(\delta) = \gamma$

$TO_\delta([\lambda]_r) = O_\gamma([r\lambda]) \neq 0$ ssi $v(\delta) = \lambda \Leftrightarrow v(\gamma) = r\lambda$

démo: $O_\gamma([r\lambda]) = [r\lambda](\gamma)$

$TO_\delta([\lambda]_r) = \int_{\mathbb{Q}_p^{\times}\backslash\mathbb{Q}_{p^r}^{\times}} \mathbb{1}_{p^{\lambda}\mathbb{Z}_{p^r}^{\times}}(g^{-1}\delta\sigma(g)) = \mathrm{vol}\left(\frac{\mathbb{Q}_{p^r}^{\times}}{\mathbb{Q}_p^{\times}}\right)$

$= \mathrm{vol}\left(\frac{\mathbb{Z}_{p^r}^{\times}}{\mathbb{Z}_p^{\times}}\right) = 1$

2 Dévissage

. Soit $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ $\gamma = \mathrm{diag}(a,b)$ $a \neq b$. $\gamma \in T$

Prop: $O_\gamma(b(f_r)) = |D_{T\backslash G}(\gamma)|^{-1/2}\, O_\gamma^T(b(f_r)^B)$

$= |D_{T\backslash G}(\gamma)|^{-1/2}\, f^B(\gamma)$

$D_{T\backslash G}(t) = \det(1-\mathrm{Ad}(t^{-1}),\ \mathrm{Lie}(T(\mathbb{Q}_p))\backslash \mathrm{Lie}\, G(\mathbb{Q}_p))$

Soit $\delta \in GL_2(\mathbb{Q}_{p^r})$ $\delta = \mathrm{diag}(a,b)$, $a \neq b$.

Prop: $TO_\delta(f_r) = |D_{T\backslash G}(\gamma)|^{-1/2}\, TO_\delta^T(f_r^B)$

3. Conclusion

$f_r^B = p^{r/2}\left[\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{p^r}^{\times}} \otimes \mathbb{1}_{p\mathbb{Z}_{p^r}^{\times}} + \mathbb{1}_{p\mathbb{Z}_{p^r}^{\times}} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{p^r}^{\times}}\right]$

$b(f_r)^B = b(f_r^B) = p^{r/2}\left[\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p^{\times}} \otimes \mathbb{1}_{p^r\mathbb{Z}_p^{\times}} + \mathbb{1}_{p^r\mathbb{Z}_p^{\times}} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p^{\times}}\right]$

et le resultat en résulte.