Variétés de Hecke des groupes unitaires et représentations galoisiennes

Gaëtan Chenevier

Soient E un corps de nombres, p un nombre premier, S un ensemble fini de premiers de E (contenant ceux divisant p), et G_S le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de E non ramifiée hors de S. Nous nous intéressons à l'espace analytique p-adique X_d paramétrant les représentations (semi-simples) de G_S de dimension d et à coefficients p-adiques. Un sous-ensemble dénombrable naturel Z de X_d est donné par les représentations dites "géométriques", qui apparaissent (à torsion près) dans la cohomologie étale des variétés projectives lisses sur E, et la question s'est posée de comprendre ce lieu. En 1995, Gouvêa-Mazur et Coleman ont démontré que pour $E = \mathbb{Q}$, l'ensemble Z est Zariski-dense dans certaines composantes connexes de X_2 (qui sont des boules ouvertes de dimension 3). L'objectif du cours était d'étudier le cas de la dimension supérieure, notamment la contribution de la partie Z_u de Z provenant des variétés de Shimura associées aux groupes unitaires sur $\mathbb{Q}$. Nous supposons pour cela que E est un corps quadratique imaginaire (dans lequel p est décomposé) et que toutes les représentations en jeu satisfont de plus une condition d'auto-dualité. Le théorème principal est alors que Z_u est Zariski-dense dans certaines composantes de X_3 (qui sont des boules ouvertes de dimension 6). Nous développons de plus un ensemble de résultats permettant de "minorer" l'adhérence de Zariski de Z_u en toutes les dimensions d, et nous étudions un analogue de ces questions pour le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$.

Le cours s'est composé de quatre séances de deux heures chacune, dont nous décrivons maintenant brièvement le contenu.

D'après les travaux de nombreux auteurs, aux points de Z_u sont associées des représentations automorphes pour divers groupes unitaires à d variables attachés à $E/\mathbb{Q}$; la première partie du cours a consisté en une analyse des congruences modulo une puissance de p entre celles-ci. Nous travaillons avec des groupes unitaires U dont les points réels sont compacts, et l'objectif est d'étendre à ces derniers les résultats sur les familles p-adiques de formes modulaires obtenus par Hida, Coleman et Coleman-Mazur dans le cadre du groupe GL_2 sur $\mathbb{Q}$. Pour un tel groupe U, nous définissons ce qu'est une "représentation automorphe p-adique de pente finie" et nous démontrons que l'ensemble de ces dernières forme un espace analytique p-adique naturel : la "variété de Hecke" de U. Cet espace, disons noté $Y_d(U)$, est d'équi-dimension d. Il peut être vu comme une interpolation p-adique d'une partie du spectre automorphe (discret) de U. En effet, à chaque paire $(\Pi, \mathcal{R})$ formée d'une représentation automorphe Π de U telle que Π_p est non ramifiée, et d'un "raffinement" $\mathcal{R}$ de Π_p (essentiellement, un ordre total sur les valeurs propres de la classe de Langlands de Π_p), est associé un point dit "classique" de $Y_d(U)$; les points classiques sont Zariski-denses dans $Y_d(U)$.

Lorsque nous savons associer aux représentations automorphes de U les représentations galoisiennes prédites par Langlands et Arthur (par exemple quand $d \leq 3$ ou sous certaines hypothèses locales), nous obtenons par interpolation un morphisme $Y_d(U) \longrightarrow X_d$, qui se trouve être quasi-fini. Il envoie les points classiques de $Y_d(U)$ dans Z_u, mais son image, disons notée F_d, est assez complexe. En effet, l'espace X_d est de dimension $\frac{d(d+1)}{2}$ en général alors que $Y_d(U)$ est de dimension d ; de plus, en chaque point x de Z_u qui est l'image d'un point classique de $Y_d(U)$ passent en général $d!$ branches de F_d, correspondant aux différents choix de raffinements associés aux antécédents de x dans $Y_d(U)$. Il en résulte que F_d admet une structure de type fractal. L'objet analogue dans le cadre de GL_2 avait été mis en évidence par Gouvêa et Mazur, qui lui ont donné le nom de "fougère infinie" (que l'on reprendra pour F_d) pour en illustrer cet aspect.

La seconde partie du cours a constitué en l'étude de F_d. L'objectif est de comprendre les positions relatives des différentes branches de la fougère F_d au voisinage d'un point x de Z_u comme plus haut. Le résultat principal est que sous une condition purement locale en p de "généricité" sur x que nous définissons, la somme des espaces tangents des différentes branches de F_d en x est de dimension au moins $\frac{d(d+1)}{2}$; nous en déduisons les résultats annoncés au premier paragraphe. Pour démontrer cet énoncé, nous étudions tout d'abord la restriction au groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$ de la famille p-adique naturelle de représentations de G_S portée par $Y_d(U)$. Ses propriétés s'interprêtent de manière naturelle à l'aide de la théorie des (φ,Γ)-modules de Fontaine et de la notion de représentations "triangulines" (Colmez), qui permettent notamment de comprendre le pendant galoisien des "raffinements" intervenus plus haut. En dimension 2, ces résultats sont dûs à Kisin et Colmez ; les généralisations nécessaires à la dimension supérieure présentées dans le cours sont un travail en commun avec Joël Bellaïche. Ceci étant fait, nous nous ramenons à démontrer un énoncé purement local, concernant la théorie des représentations cristallines de Fontaine : "Toute déformation à l'ordre un d'une représentation cristalline générique est combinaison linéaire de déformations triangulines".

À la fin du cours, nous avons illustré nos résultats par un exemple explicite de composante de X_3 attachée au carré symétrique de la courbe elliptique $X_0(19)$.