(Gaëtan Chenevier) 1/11

Variétés de Hecke des groupes unitaires et représentations galoisiennes

I Introduction : La "fougère infinie" de Gouvêa-Mazur

$p > 2$, $q = p^m$ soit $\bar\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{\{\infty,p\}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_q)$ continue, abs irréductible et impaire $(\det \bar\rho(c) = -1)$

Exemples soit $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ propre, $f = q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \cdots \in \bar{\mathbb{Z}}[[q]]$

fixons $\bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$, **Deligne** : $\rho_f : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow GL_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ continue et $\mathrm{tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)) = a_\ell$ $\ell \neq p$ ($\uparrow$ geom)

ops à valeurs ds $\bar{\mathbb{Z}}_p$ $\rightsquigarrow$ $\bar\rho_f : \longrightarrow GL_2(\bar{\mathbb{F}}_p)$ résiduelle associée.

Conj Serre = thm Khare et Wintenberger = tout $\bar\rho$ est modulaire, i.e. $\simeq \bar\rho_f$.
En général, une infinité de f vont convenir (quand k varie $\to \infty$) et vont être plus ou moins congrues mod p^m. Pour "mesurer" ces congruences on introduit l'anneau des déformations de $\bar\rho$, suivant Mazur

• le foncteur $F : A \longmapsto \{$"relèvements" $\rho_A : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \to GL_2(A)\} / \text{conj. } 1 + m_A M_2(A)$

A local fini, $A/m_A \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q$; i.e. $\rho_A \otimes A/m_A = \bar\rho$

(pro) est représentable par un anneau local complet noeth. à rés $\simeq \mathbb{F}_q$.

$$R(\bar\rho) \simeq W(\mathbb{F}_q)[[t_1 \cdots t_n]]/I$$

On fera l'hypothèse simplificatrice **Hyp** : F formellement lisse ($\Leftrightarrow$ $R(\bar\rho)$ ser. formell)

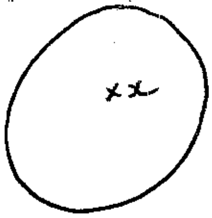
Dans ce cas, $R(\bar\rho) \simeq W(\mathbb{F}_q)[[t_1, t_2, t_3]]$.

(très fréquent : (Mazur) ex : si $\bar\rho = \bar\rho_\Delta$ (↖ Ramanujan), c'est le cas pour $p \geq 17$ et $\tau(p) \not\equiv 0$ (p) (e.g. $p \leq 3.10^6$ et $p \neq 241$)

La fibre générique $\mathcal{X}(\bar\rho)$ de $R(\bar\rho)$ est alors une boule de dim 3 $/\mathbb{Q}_q$, ouverte rayon 1

$$\mathcal{X}(\bar\rho) = \{ (t_1, t_2, t_3),\ |t_i| < 1 \}$$

$\mathcal{X}(\bar\rho)$



$x \in \mathcal{X}(\bar\rho)$, la rep universelle s'évalue en x

$\rightsquigarrow \rho_x : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_x)$ ($\mathcal{O}_x$ = entier d'une ext. finie de $\mathbb{Q}_p$ $\leftarrow W(\mathbb{F})$)

tq $\bar\rho_x \simeq \bar\rho$ et toutes ces rep. apparaissent ainsi.

Def: x modulaire si $\rho_x \simeq \rho_f$ pour un certain $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$

quasi-mod $\simeq \rho_f \otimes \underset{\text{cyclot}}{\chi^m}$, $m \in \mathbb{Z}$

Théorème (Coleman, Gouvêa-Mazur) Les points quasi-modulaires sont Zariski-denses dans $\mathcal{X}(\bar\rho)$.

(Les corps de nombres (ainsi) découpés par les ρ_f et ρ^{univ} sont les mêmes. Tout ρ_A est ss-quotient d'une somme finie de ρ_{f_i})

Outil essentiel familles p-adiques de formes modulaires (Hida, Coleman)

Soit (f,α) où $f = q + a_2 q^2 + \dots \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ forme propre, et α racine de $X^2 - a_p X + p^{k-1}$

A cette paire est associée $f_\alpha = f - \frac{p^{k-1}}{\alpha} f(q^p) \in S_k(\Gamma_0(p))$

$= q + b_2 q^2 + \dots$ où $b_n = a_n$ si $(n,p) = 1$, $b_p = \alpha$

(Les f_α et f_β sont les "formes jumelles associées à f" si α, β sont les 2 racines.
NB: elles ont même rep. Galoisienne associée: celle de f)

Théorème (Hida $v(\alpha) = 0$, Coleman) Soit (f,α) ↑ et supposons $v(\alpha) < k-1$, $\alpha^2 \neq p^{k-1}$

Alors $\exists\, r > 0$ et $F = q + B_2(x) q^2 + B_3(x) q^3 + \dots \in \mathcal{O}(B(k,r))[[q]]$, $\mathcal{O}(B(k,r)) = \mathbb{Q}_p\langle \frac{x-k}{\dots} \rangle$

tels que (i) $F(k) = f_\alpha$

(ii) si $k' \in (k + (p-1)\mathbb{N}) \cap B(k,r)$, $F(k')$ est de la forme $f'_{\alpha'}$ où $f' \in S_{k'}(-)$ et $\alpha' = B_p(k')$

(en fait, F est unique. De plus, il y a un énoncé sous les hyp $v(\alpha) < k-1$ ou $\alpha^2 \neq p^{k-1}$)

Rem. (i) $r = p^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $|B_n(x) - B_n(k)| \leq p^{\nu}|x-k|$ si $x \in B(k,r)$ et $n \geq 1$

donc $F(k + (p-1)p^{n+\nu}) \equiv f_\alpha \ (p^n) \ \forall n \geq 0$

Ces "congruences automatiques" généralisent celles de Kummer sur les nb de Bernoulli (qui peuvent être vues sous cet angle via la famille d'Eisenst. (serie))

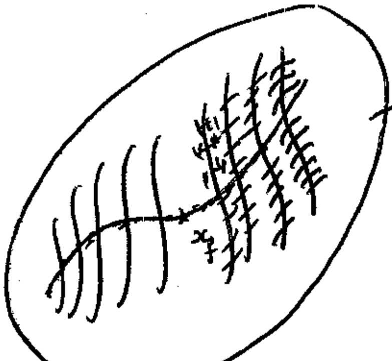
(ii) f étant fixé, si $\alpha \neq \beta$ sont les 2 racines de ..., F_α et F_β sont très différentes

ex: si $k' \in (k + (p-1)\mathbb{N}) \cap B(k,r)$ est assez grand $F_\alpha(k')$ n'est ni égale, ni jumelle à $F_\beta(k')$! (exercice!)

(iii) F donne lieu à $\rho_F : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \to GL_2(\mathcal{O}(B(k,r)))$ cont.

"interpolant les rep de Deligne" $\quad \operatorname{tr}(\rho_F(\mathrm{Frob}_\ell)) = B_\ell \ \forall \ell \neq p$

Retour au pb. $f / \bar\rho = \bar\rho_f$, on choisit α qcq, $\rightsquigarrow F_\alpha$ et ρ_{F_α}, et on recommence en utilisant les 2 jumelles.



$\longrightarrow$ l'image des familles de Coleman = "fougère infinie"

La théorie de Sen $\Rightarrow$ la fougère reste ds une hypersurface
$\Rightarrow$ les points quasi-modulaires sont Z. denses.

Rmq: Gouvêa-Mazur avaient "deviné" expérimentalement l'énoncé du thm de Coleman, à partir de la "feuille" de Hida.

Mieux: On peut "relier les feuilles" et "désingulariser les points doubles"

Dans $\mathfrak{X}(\bar\rho) \times \mathbb{G}_m$, soit Z l'ensemble des paires (x,α) où $x = x_f$ modulaire et (f,α) paire. On pose $\mathcal{C}(\bar\rho) := \overline{Z} \subset \mathfrak{X}(\bar\rho) \times \dots$

Théorème $\mathcal{C}(\bar\rho)$ est une courbe (équidimensionnelle)

(Son image dans $\mathfrak{X}(\bar\rho)$ contient la fougère, on conjecture que $\mathcal{C}(\bar\rho)$ n'a qu'un nombre fini de comp irréductibles!)

Objectif du cours : généraliser ces résultats en dim supérieure

Plan

Ⓐ Construction des familles p-adiques de formes automorphes (à la Coleman) dans le contexte des Groupes unitaires $/\mathbb{Q}$ définis, de tout rang.
Construction de la variété de Hecke (approche non galoisienne)

Ensuite, objectif galoisien : étudier les déformations des
$\bar{\rho} : G_E \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_q)$, $\left(\bar{\rho}^{*,c} \simeq \bar{\rho}(n-1), \text{"impaire"}\right)$
idem pour les relèvements

$\mathcal{X}(\bar{\rho})$: dim $\frac{n(n+1)}{2}$
fougère : dim n, comprendre si elle est Z-dense.
(ex: dim 3, à un twist près dim 2 dans un espace de dim 5)

↳ Ⓑ Etude des propriétés des représentations galoisiennes attachées aux familles p-adiques de f. aut., essentiellement $|\,\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Nous étudierons en particulier des problèmes de déformations des représentations cristallines (en car. 0, dim n) ("déformations trianguline").

Ⓒ Application globale à la Z-densité des points autom. (les résultats les plus complets concerneront $n \leq 3$, mais $n=3$ déjà intéressant)

Autres applications de Ⓐ, Ⓑ dont je ne parlerai pas :
- utiles au projet de livre visant à associer des rep. gal. aux rep. aut. cohomologiques de $GL_n(\mathbb{A}_E)$ π, $\pi^{*,c} \simeq \pi$. (projet GRFA)
- construction d'extensions galoisiennes prévues par les conj. de Bloch-Kato (travail avec J. Bellaïche, une partie de Ⓑ est issue de notre livre en commun)

II. Variétés de Hecke des groupes unitaires définis

(A) Groupes unitaires définis

- $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire, $n \geq 1$ entier, $G/\mathbb{Q}$ groupe unitaire à n variables attaché à $E/\mathbb{Q}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta/E & E\text{-algèbre centrale simple rang } n^2 \\ x \mapsto x^* & \mathbb{Q}\text{-antiinvolution} \\ \text{tq} & (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \text{ si } \lambda \in E \end{cases} \rightsquigarrow G(A) = \{x \in \Delta \otimes_{\mathbb{Q}} A,\ xx^* = 1\}$$

A : $\mathbb{Q}$-algèbre

Exemple standard f forme hermitienne non deg. / E^n, $\Delta = M_n(E)$, $x \mapsto x^*$ l'adjonction ass. à f, $G = U(f)$ groupe unitaire usuel.

- $G(\mathbb{C}) \underset{E \to \mathbb{C}}{\xrightarrow{\sim}} GL_n(\mathbb{C})$, $G(\mathbb{R})$ un groupe unitaire réel signature (p,q)

Def. G est défini si $G(\mathbb{R})$ compact $\Leftrightarrow pq = 0$

("toute forme tordue définie de $GL_n/\mathbb{Q}$ est d'un gr. unitaire défini")

- $G(\mathbb{Q}_p)$ i) $p = v\bar{v}$ déc. ds E, $G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \Delta_{E_v}^\times$ donc $\simeq GL_n(\mathbb{Q}_p)$ pour pptout p décomposé

  ii) p inerte ou ramifié, $G(\mathbb{Q}_p)$ unitaire p-adique (standard ou quaternionique)

Ces groupes ont bcp de formes intérieures, régies par un principe de Hasse connu.

Exercice $f = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$, $U(f)$ est q. deployé à ttes les places finies ssi $n \not\equiv 2\ (4)$

(B) Formes automorphes $G/\mathbb{Q}$ unitaire défini.

$$\mathcal{A} = L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \circlearrowleft G(\mathbb{A}) \text{ translations à droite}$$

mesure $G(\mathbb{A})$-invariante finie

$G(\mathbb{R})$-finies, $G(\mathbb{A}_f)$-lisses (denses par P.W.)

$$= \bigoplus_{\substack{\pi \\ \text{irred } G(\mathbb{A})}} m(\pi)\,\pi \quad , m(\pi) \text{ multiplicité de } \pi \quad (\text{tjrs finie})$$

Def π rep. automorphe de G si $m(\pi) \neq 0$.

"tout est discret, cuspidal, algébrique" car $G(\mathbb{R})$ compact.

poids et niveau

- Les représentations continues irr. de $G(\mathbb{R})$ sont paramétrées par leur plus haut poids. Notation $\underline{k} = (k_1 < k_2 < \dots < k_n) \in \mathbb{Z}^{n,+}$. On fixe $E \to \mathbb{C}$

$G(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{C}) \simeq Gl_n(\mathbb{C})$, on note $W_{\underline{k}}$ la rep. de $G(\mathbb{R})$ de plus haut poids (Borel sup de $Gl_n(\mathbb{C})$) $-k_1 \geq -k_2+1 \geq \dots \geq -k_n+n-1$

Def: π de poids $\underline{k}$ si $\pi_\infty \simeq W_{\underline{k}}$

- $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ sous-groupe compact ouvert

Def: π niveau K si $\pi_f^K \neq 0$.

- L'espace des "formes de poids $\underline{k}$ et niveau K"

$$S_{\underline{k}}(K) = \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{R})}(W_{\underline{k}}, \mathcal{A}^K) = \bigoplus_{\substack{\pi \text{ aut.} \\ \text{poids } \underline{k}}} m(\pi)\,\pi_f^K = \left\{ f : G(\mathbb{A}_f)/K \longrightarrow W_{\underline{k}}^* \right\}$$

$f(\gamma g) = \gamma f(g)$ où $\gamma \in G(\mathbb{Q})$

L'ensemble de classes $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ est fini $= \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h\}$

$$\simeq \prod_{i=1}^{h} (W_{\underline{k}}^*)^{\Gamma_i}$$

$\Gamma_i = G(\mathbb{Q}) \cap x_i K x_i^{-1}$: fini car $G(\mathbb{Q})$ discret ds $G(\mathbb{A}_f)$ ($G(\mathbb{R})$ compact...)

Rmq : i) Bien que fini, est bien sur très riche, ainsi que l'action des correspondances de Hecke sur ce dernier

(ex: $U(f)$ = classes de certains $\mathcal{O}_E$-réseaux hermitiens définis)

ii) Les conjectures de Langlands-Arthur prédisent que les rep. aut. des G unitaires définis associés à $E/\mathbb{Q}$ contiennent toutes les cuspidales cohom Π de $GL_n(\mathbb{A}_E)$ telles que $\Pi^{\vee,c} \simeq \Pi$ (et même mieux...)

Peut-être un peu contrairement aux apparences ("dim 0") ces Π aut. de G sont très générales!

(C) "Raffinements" des représentations non ramifiées de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ ($f \rightsquigarrow f_\alpha, f_\beta$)

(version provisoire suffisante pour énoncer le théorème)

Soit π_p rep. irr. lisse de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ non ramifiée, i.e $\pi^{GL_n(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$.

$$\pi_p \longleftrightarrow L(\pi_p) \text{ classe de conjugaison ss. } \in GL_n(\mathbb{C})$$

Déf: Un raffinement de π_p est un ordre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sur les v.p de $L(\pi_p)$

On définira plus tard ce qu'est un raffinement "accessible". Pour l'instant, disons simplement que

* il y a toujours au moins un raff. accessible
* si $\varphi_i \varphi_j \neq p$ $\forall i,j$ alors tous les raffinements de π_p sont accessibles

ex: . π_p tempérée, ts les raff. accessibles.
. π_p la triviale, seul $(p^{\frac{n-1}{2}}, p^{\frac{n-3}{2}}, \dots, p^{\frac{1-n}{2}})$ accessible

(D) Interpolation p-adique

1. Espace des poids

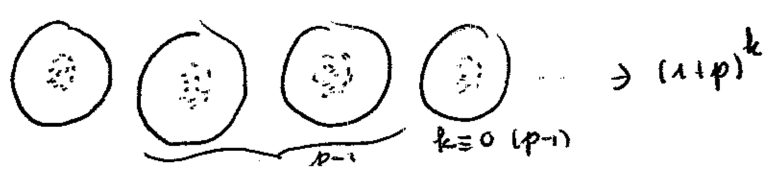
$$W_1(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{gr,\,cont}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times) \xrightarrow{\sim} B(0,1)^- \times \hat{\mu}$$

$\mathbb{Z}_p^\times = \mu \times (1+p)^{\mathbb{Z}_p}$ $\qquad \kappa \longmapsto (\kappa(1+p), \kappa|_\mu)$

$(p \neq 2 \dots)$

$\mathbb{Z} \hookrightarrow W_1(\mathbb{C}_p)$

$k \longmapsto (x \mapsto x^k)$



$\mathbb{Z}$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}_1$, même "très Zariski-dense"

(déf. $Z \subset X$ très Z-dense si Zariski-dense et si $\forall z \in Z$ et $\mathcal{U} \ni z$ voisinage aff $\exists\ \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U}' \ni z$, tel que $Z \cap \mathcal{U}'$ Z-dense dans $\mathcal{U}'$.)

Espace des poids $\quad \mathcal{W} = \mathrm{Hom}_{g,\mathrm{cont}}((\mathbb{Z}_p^\times)^n, \mathbb{G}_m) \simeq \mathcal{W}_1^{\,n}$, espace anal. au sens de Tate

$$\underset{\text{très Zariski-dense}}{\mathbb{Z}^n} \hookrightarrow \mathcal{W}(\mathbb{Q}_p) \qquad (k_1, \dots, k_n) \mapsto ((x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})$$

II. Variété de Hecke

- Fixons
  - $p = v\bar{v}$ décomp. dans E et tel que $G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} Gl_n(\mathbb{Q}_p)$
  - $S \ni p$ ensemble fini, $K = K_p \times K_{S-\{p\}} \times K^S$, $K_p \to Gl_n(\mathbb{Z}_p)$, $K^S \to$ maximal hyperspécial

$H^S = \mathbb{Z}[K^S \backslash G(\mathbb{A}^S) / K^S]$ algèbre de Hecke sphérique (commutative)

- $\bar{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ de sorte que $v : E \to \mathbb{Q}_p$ et $E \to \mathbb{C}$ fixés soient compatibles

- Soit π aut. de poids $\underline{k}$ et niveau K, alors H^S agit sur $(\pi^S)^{K^S}$ (dim 1) par un caractère $\psi_\pi : H^S \to \mathbb{C}$ "système v. propre de Hecke"

$$\begin{tikzcd} H^S \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[drr, bend right, "\text{ça c'est } \psi_\pi"'] & \mathbb{C} & \\ & \bar{\mathbb{Q}} \arrow[u, "?"] \arrow[r] & \bar{\mathbb{Q}}_p \end{tikzcd}$$

on pourra parler de congruences entre π et π' mod p^m

$$\pi \equiv \pi' \ (p^m) \iff |\psi_\pi(h) - \psi_{\pi'}(h)| \leq p^{-m} \quad \forall h.$$

On va montrer qu'il existe toujours des congruences, mieux des familles analytiques quand $\underline{k}$ varie

• Soit (Π, R) une paire où Π rep. automorphe poids $\underline{k}$, niv. K et R raffinement accessible de $\tau_p|\cdot|^{\frac{1-n}{2}} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, on leur associe

$$\left(\psi_\Pi,\ \underline{k},\ \left(\frac{\varphi_1}{p^{k_1}}, \dots, \frac{\varphi_n}{p^{k_n}}\right)\right) \in \mathrm{Hom}(H^S, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times W(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

on note Z l'ensemble $\subset$ de tels triplets..
($Z \neq \emptyset$ à cause de la triviale !)

<u>Théorème</u> Il existe un unique (X, ψ, ν, Z) où

- X espace analytique p-adique réduit $(/\mathbb{Q}_p)$
- $\psi : H^S \longrightarrow \mathcal{O}(X)^{\leq 1}$ hom d'anneaux
- $\nu = (\kappa, (F_1, \dots, F_n)) : X \longrightarrow W \times \mathbb{G}_m^n$ morphisme fini
- $Z \subset X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ très Zariski-dense

tel que

(i) L'application naturelle $X(\overline{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^S, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times W(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$

$$x \longmapsto (\psi(x), \kappa(x), (F_1(x), \dots, F_n(x)))$$

induit une bijection $Z \xrightarrow{\sim} Z$

(ii) $\forall x \in X$, $\quad \mathcal{O}_{\nu(x)} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} H^S \longrightarrow \mathcal{O}_x$ est surjective.

C'est la variété de Hecke de niveau K. Elle satisfait de plus

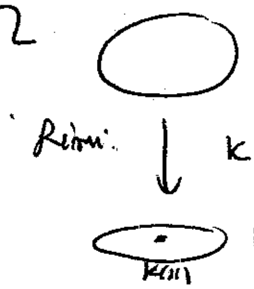
(iii) X est équidimensionnel de dim n.

(iv) $\kappa : X \longrightarrow W$ est localement fini, et $\forall T$ comp. irréduct. de X, $\kappa(T)$ est un ouvert Zariski de W.

(v) ("classicité") Si $x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est tel que $\kappa(x) = (k_1 < \dots < k_n) \in \mathbb{Z}^{n,+}$

et si $\begin{cases} v(F_1(x)) < k_2 - k_1 \\ v(F_1 F_2(x)) < k_3 - k_2 \\ \quad\vdots \\ v(F_1(x) F_2(x) \cdots F_{n-1}(x)) < k_n - k_{n-1} \end{cases}$ $\quad$ <u>alors</u> $x \in Z$.

Rmq: iv) et v) $\Rightarrow$ (d)   En effet, si T est une composante irréductible de X, $k(T)$ contient un élément de $\mathbb{Z}^n$ par (iv). Soit $x \in T$, $k(x) \in \mathbb{Z}^n$. Par (iv) $\exists$ Ω



$k(\Omega) \subset W$ ouvert

les F_i sont analytiques donc bornées sur Ω, donc (v) va être satisfait dès que $k(z) = (k_1(z) < \dots < k_n(z))$ est tel que $k_i(z) - k_{i-1}(z) \gg 0$ $\rightsquigarrow$ ensemble Zariski dense dans Ω (donc dans $T \cap \Omega$)

III. Preuve du théorème

La preuve du théorème est essentiellement "locale en p". Elle consiste en partie en la construction et l'étude des propriétés élémentaires de certaines repr localement analytiques d'un sous-groupe d'Iwahori de $Gl_n(\mathbb{Q}_p)$

(A) Série principale localement analytique d'un Iwahori de $Gl_n(\mathbb{Q}_p)$

1. Notations

$I \subset Gl_n(\mathbb{Z}_p)$ Iwahori des éléments triangulaires inférieurs mod

$U = \{(p^{a_1}, \dots, p^{a_n}),\ a_i \in \mathbb{Z}\} \supset \underset{a_1 \geq \dots \geq a_n}{U^-} \supset \underset{a_1 > \dots > a_n}{U^{--}}$

$M = \langle I, U^- \rangle \subset Gl_n(\mathbb{Q}_p)$ sous monoïde engendré.

c'est un fait classique que $M = \coprod_{u \in U^-} IuI$ et $IuIu'I = Iuu'I$, $\forall u, u'$
(conséquence simple déc. Iwahori)

II. Exemple $(n=2$, Morita, étudié par Stevens, Buzzard, Schneider-Teitelbaum ...$)$

- Soit $L/\mathbb{Q}_p$ ext. finie, $\quad \mathcal{C} = \mathcal{C}ont(\mathbb{Z}_p, L)$

$\forall m \geq 0$, soit $\mathcal{C}_m = \{ f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in \mathbb{Z}_p \quad f_{|x+p^m\mathbb{Z}_p}(t) \in L\langle \frac{t-x}{p^m} \rangle \}$

"espace des fonctions m-analytiques, Banach pour norme de Gauss $\sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f_{|x+p^m\mathbb{Z}_p}|$

On a $\mathcal{C}_m \hookrightarrow \mathcal{C}_{m+1}$ compacte im dense, $\quad \mathcal{C}^+ = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{C}_m$ fonctions loc analytiques $\mathbb{Z}_p \to L$.

- L'endomorphisme $u : \mathcal{C}^+ \to \mathcal{C}^+$, $f(t) \mapsto f(pt)$, préserve chaque $\mathcal{C}_m$ et "améliore la convergence" : $u : \mathcal{C}_m \to \mathcal{C}_m \Rightarrow u$ compact.

$\uparrow$ can $\cup$ $\mathcal{C}_{m-1}$

ex sur $\mathcal{C}_0$ $\quad u \circlearrowleft (1, p, p^2, \dots)$ dans la base naturelle $1, t, t^2, \dots$

- Soit $\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère continu, on définit une rep. de I par

$$\mathcal{C}_{\chi,m} = \begin{cases} \mathcal{C}_m \text{ comme Banach}/L. \\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I, \quad \gamma . f(t) = \chi(bt+d)\, f\left(\frac{at+c}{bt+d}\right) \end{cases}$$

$\in \mathbb{Z}_p$ car $p \mid b$

c'est bien défini si $m \geq m(\chi) =$ le plus petit entier m / $v(\chi(1+p)-1) > \frac{1}{(p-1)p^m}$ (dès $p \neq$)

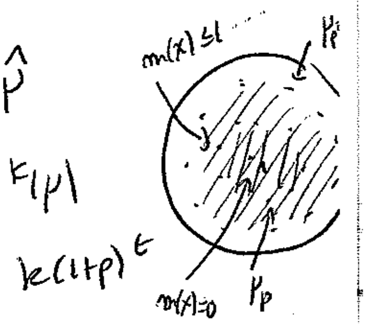
$= \underline{\qquad\qquad\qquad}$ / $t \mapsto \chi(pt+1) \in \mathcal{C}_m^{an}$

<u>Dessin</u> ("tous les caractères continus sont loc. analytiques")

$$\mathbb{Z}_p^\times = \mu \times (1+p)^{\mathbb{Z}_p}$$

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Q}_p^\times) \xrightarrow{\sim} B(1,1)^- \times \hat{\mu}$$

$$k \longmapsto (k(1+p), k_{|\mu})$$



- $\mathcal{C}_{\chi,m}$ se prolonge à M / $\begin{array}{l}(p,1) \mapsto u \\ (p,p) \mapsto id\end{array}$ (indep. de χ)

- si $\chi = (x \mapsto x^k)$, $k \geq 0 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{\chi,0} \supset \underbrace{\mathrm{Pol}\, d^\circ \leq k \text{ ent}}_{\text{sous } I\text{-rep}} \simeq \left(\mathrm{Sym}^k \mathbb{Q}_p^2\right)^*$

III. <u>Cas général</u>

- $B \subset Gl_n(\mathbb{Q}_p)$ Borel supérieur, N son radical unipotent, T tore diagonal
  B^-, N^- les opposés, $*(\mathbb{Z}_p)$-points de $*$ sens évident,

$$N^-(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ (n_{ij})}}{n} \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ (p^{a_1} \cdots p^{a_n})}}{u} = u \underset{\substack{\shortparallel \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ p^{a_j - a_i} n_{ij} & & 1 \end{pmatrix}}}{u^{-1} n u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (n_{ij})$$

On a $Gl_n(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} BwI$, décomp. en ouverts I-stables, la grosse cellule de Bruhat-Iwahori $BI \simeq B \times N^-(\mathbb{Z}_p)$ est <u>M-stable</u> / transl. à dtes.

"Quand $n=2$, $\underset{B \backslash BI}{N^-(\mathbb{Z}_p)} \simeq \mathbb{Z}_p$ et on retrouve l'action précédente de M par homographies"

- <u>Def</u> Soit $\delta : T \to \mathbb{Q}_p^\times$ $\quad \delta(x_1, \ldots, x_n) = x_2^{-1} x_3^{-2} \cdots x_n^{1-n}$ "module algébrique" de B

- Soit $\chi : T(\mathbb{Z}_p) \to L^\times$ un caractère continu. On étend $\chi\delta_{|T(\mathbb{Z}_p)}$ à B trivialement sur UN et on regarde

$$\mathcal{C}_{\chi,m} = \left\{ f : BI \to L \;\middle|\; \begin{array}{l} f(bx) = (\chi\delta)(b) f(x) \quad \forall b \in B, x \in BI \\ \text{et } f_{|x + p^m \mathbb{Z}_p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \text{ analytique } \forall x \in N^-(\mathbb{Z}_p) \end{array} \right\} \circlearrowleft M \text{ translatio à droites}$$

c'est bien défini si $m \geq m(\chi)$ (toutes les n composantes $(\chi_1, \dots, \chi_n) = \chi$ de χ sont m-analytiques, $m(\chi) = \sup_{i=1}^{n} m(\chi_i)$)

C'est un L-Banach p-adique pour la norme de Gauss. M agit par endom. de norme ≤ 1. $\mathcal{C}_{m,\chi}$ indépendant de χ (tel que $m(\chi) \leq m$) en tant qu'espace, et même en tant que $L[U^-]$-module, l'action de I varie analytiquement en χ au sens suivant:

U^- ↺ compact en améliorant la convergence.

IV. Variation analytique $(= \mathrm{Hom}(T(\mathbb{Z}_p), \mathbb{G}_m^{rig}))$

Soit $\Omega \subset \mathcal{W}$ ouvert affinoïde, $\chi : T(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega)^\times$ caractère continu universel

et $m(\Omega)$ le plus petit entier m / $\Omega \subset \left(\hat{\mu} \times B(1, p^{-\frac{1}{(p-1)p^m}})^-\right)^n$.

on pose $\quad \mathcal{C}_{\Omega,m} = \left\{ \begin{array}{l} f : BI \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \\ f(bx) = (\delta\chi)(b)\, f(x) \end{array} \right., \; f_{|x + p^m N(\mathbb{Z}_p)} \in \mathcal{O}(\Omega)\langle \frac{n - x}{p^m} \rangle$

M ↺ translations à ...

($\delta\chi = \delta_{|T(\mathbb{Z}_p)}\chi$ étendu à B trivialement à UN)

- $\mathcal{O}(\Omega)$ - module de Banach avec sa norme de Gauss constant, i.e. $\simeq \mathcal{C}_{1,m} \hat{\otimes} \mathcal{O}(\Omega)$, avec action de U^-.
- $\chi \in \mathcal{W}(L)$, $\mathcal{C}_{\Omega,m} \hat{\otimes}_{\Omega, \lambda} L = \mathcal{C}_{\chi,m}$ si $\chi \in \Omega(L)$. ΩM.

<u>Nota</u>: J'avais introduit ces rep. pour $m=0$ dans ma thèse, et j'en ai donné des modèles en termes du plongement de Plücker $B \backslash \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \prod \mathbb{P}^{n_i}$

Elles ont été aussi étudiées par Ash-Stevens. Elles s'insèrent maintenant naturellement dans le cadre de Schneider-Teitelbaum (dont cette présentation a bénéficié)

V. Points algébriques

- Soit $\underline{k} = (k_1 < \dots < k_n) \in \mathbb{Z}^{n,+}$, on associe à $\underline{k}$ $\quad \chi_{\underline{k}} : T \longrightarrow \mathbb{Q}_p^\times$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$

on peut voir $\underline{k} \in \mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$ via $\chi_{\underline{k}|T(\mathbb{Z}_p)}$

- $W_{\underline{k}}$

$\uparrow$

rep. alg. $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ plus haut poids $/_B$ $(\chi_{\underline{k}}\delta)^{-1}$

$\rightsquigarrow \quad W_{\underline{k}}^* \xrightarrow[B.W.B]{\sim} \left\{ \begin{array}{l} f : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathbb{Q}_p \text{ algébriques} \\ f(bg) = (\chi_{\underline{k}}\delta)(b)\, f(g) \quad \forall b \in B \end{array} \right\}$

Lemme La restriction à BI induit une injection

$$W_{\underline{k}}^{*} \otimes (\chi_{\underline{k}}\delta)^{-1} \overset{M}{\hookrightarrow} \mathcal{C}_{\underline{k},0}$$

(↖ caractère de U^- étendu à M par $I \to 1$.).

On aura besoin de retrouver $W_{\underline{k}}^{\times}$ dans $\mathcal{C}_{\underline{k},0}$. Il y a un critère approximatif "critère de classicité". Si $\lambda : U^- \to \mathbb{Q}_p^{\times}$ caractère, on dira $\lambda < \underline{k}$ si

$$v(\lambda(\underbrace{p, \dots, p}_{i}, 1, \dots, 1)) < k_{i+1} - k_i \quad \forall i \in \{1 \dots n-1\}$$

Lemme i) Soit $v \neq 0 \in \mathcal{C}_{\underline{k},0}$, $u.v = \lambda(u)\, v$, $\lambda : U^- \to \mathbb{Q}_p^{\times}$. Si $\lambda < \underline{k} \Rightarrow v \in W_{\underline{k}}^{*}$

ii) (Owen Jones) Mieux, il existe une suite exacte de M-modules

$$0 \to W_{\underline{k}} \otimes (\chi_{\underline{k}}\delta)^{-1} \longrightarrow \mathcal{C}_{\underline{k},0} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{C}_{s_i(\underline{k}),0} \otimes \left(\frac{\chi_{\underline{k}}}{\chi_{\underline{k}}}\right)^{s_i}$$

où $s_i = (i, i+1)$.

Ex: $(n=2)$, $\mathcal{C}_{\underline{k},0} = \mathbb{Q}_p\langle t\rangle \supset W_{\underline{k}}^{*} \otimes (\chi_{\underline{k}}\delta)^{-1} = \mathrm{Sym}^{k_1}(\mathbb{Q}_p^2)$ i) évident,

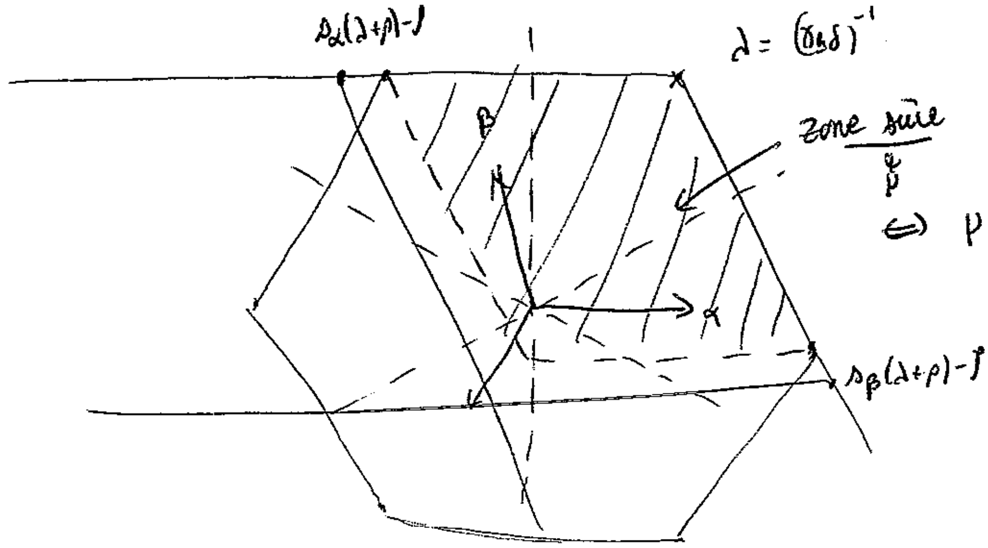
$u = (p, 1) \mapsto (1, p, \dots, p^m \dots)$ ii) l'application $\theta = \dfrac{\partial^k}{\partial t^k}$.

En général, on peut montrer (i) et une variante de (ii) en utilisant le plongement de Plücker (c'est ce que je fais dans mon article) et c'est suffisant pour le théorème. Cependant, l'énoncé (ii) nous sera utile plus loin.

Idée de (i), (ii)

$$\mathcal{C}_{\underline{k},0} \xrightarrow[\ 1\ ]{\text{germe en}} \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{b})}(U(\mathfrak{g}), d\chi_{\underline{k}}\delta) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\underbrace{U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} -d\chi_{\underline{k}}\delta}_{\downarrow\, W_{\underline{k}}}, \mathbb{Q}_p)$$

$n = 3$



zone sûre (ces poids ne sont que dans $W_{\underline{k}}$)

$\mu \Leftrightarrow \mu < \underline{k}$.

(B). Raffinements et algèbre de Hecke-Iwahori

Soit π une rep. irréductible lisse$/_{\mathbb{C}}$ de $Gl_n(\mathbb{Q}_p)$ non ramifiée (ou plus généralement telle que $\pi^I \neq 0$) $\pi \rightsquigarrow$ classe $L(\pi) \in Gl_n(\mathbb{C})$
de conj ss.

Un raffinement de π est un ordre $R = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $L(\pi)$

À $R \rightsquigarrow \chi_R : T \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ $\begin{pmatrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n \end{pmatrix}$

<u>Définition</u> : R est dit accessible si $\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_B^G \, \delta_B^{1/2} \chi_R$

(c'est toujours un sous-quotient, on retrouve bien ce qui était avancé ds le cours précédent.)

<u>Soit</u> $H_{Iw} = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][I \backslash Gl_n(\mathbb{Q}_p) / I]$ algèbre de Hecke Iwahori $(\mu(I) = 1)$

<u>Fait</u>. $U^- \longrightarrow H_{Iw}$, $u \longmapsto [IuI]$ est un mop. mult. à valeurs inversibles.

$\rightsquigarrow$ <u>induit</u> $U \longrightarrow H_{Iw}^\times$

Soit π lisse irréductible quelconque de $Gl_n(\mathbb{Q}_p)$

<u>Lemme</u> (Borel-Casselman) $\underset{U}{\pi^I \otimes \delta_B^{1/2}} \xrightarrow{\sim} (\pi_N)^{T(\mathbb{Z}_p)} \otimes \delta_B^{-1/2}$

<u>Corollaire</u> $R \longmapsto \chi_R \delta_B^{-1/2}$ induit une bijection entre raffinements accessibles de π et caractères de U sur π^I.

(R accessible $\underset{\text{Recip. Frobenius}}{\Leftrightarrow}$ χ_R : quotient de π_N $\Leftrightarrow$ $\chi_R \delta_B^{-1/2} \subset \pi^I$)

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème. Rappelons les notations :

- $G_{/\mathbb{Q}}$ groupe unitaire défini à $n \geq 1$ variables attaché à $E/\mathbb{Q}$
- $p = v\bar{v}$ déc. ds E tel que $G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow[v]{\sim} GL_n(\mathbb{Q}_p)$
- $S \ni p$ ens. fini de premiers, $K = \underset{\underset{I}{\parallel}}{K_p} \times K_{S-p} \times \underset{\text{max. hypers}}{K^S} \subset G(\mathbb{A}_f)$

de plus H^S = algèbre de Hecke sphérique $/K^S$ sur $\mathbb{Z}$

- $\bar{\mathbb{Q}} \nearrow \mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{Q}} \searrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ (v fixe aussi $G(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C})$)

© Formes automorphes classiques, p-adiques et en familles

Il sera commode d'introduire le foncteur

$$F : \mathbb{Q}_p[M]\text{-module} \longrightarrow H^S[U]\text{-module}$$

$$V \longmapsto F(V) = \{ f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f) \longrightarrow V \ \ \forall k \in K,\ f(xk) = k_p^{-1} \cdot f(x) \} \xrightarrow[\mathbb{Q}_p]{\sim} \prod_{i=1}^{h} V^{\Gamma_i}$$

$$f \longmapsto (f(x_i))_i$$

$G(\mathbb{A}_f) = \coprod_{i=1}^{h} G(\mathbb{Q}) x_i K$

$\Gamma_i = G(\mathbb{Q}) \cap x_i K x_i^{-1}$ fini

F a de très bonnes propriétés, notamment

i) il est exact,

ii) Si V est normé par $|\cdot|$, et I agit par isom. $F(V)$ hérite d'une norme par $|f| = \sup_x |f(x)| = \sup_{i=1}^{h} |f(x_i)|$

<u>Lemme</u>. $F(W_{\underline{k}}^*)$ est un modèle sur $\mathbb{Q}_p$ de $S_{\underline{k}}(K)$, (via $\bar{\mathbb{Q}} \nearrow \mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{Q}} \searrow \bar{\mathbb{Q}}_p$)
On le notera encore $S_{\underline{k}}(K)$

(<u>exercice</u>, analogue à la manière d'associer un caractère de Hecke $\bar{\mathbb{Q}}_p$-valué à un caractère algébrique$_{/\mathbb{C}}$ (Weil) "On n'a encore rien défini de purement p-adique ici")

<u>Définition</u> - Si $\chi \in W(L)$, $m \geq m(\chi)$, $S_{\chi,m}(K) := F(\mathcal{C}_{\chi,m})$ est le L-espace de Banach des formes automorphes p-adiques de G de niveau K, poids χ, m-surconvergentes. ($\circlearrowleft H^S[U]$ norme ≤ 1)

Si $\Omega \subset W$, $m \geq m(\Omega)$, $S_{\Omega,m}(K) = F(\mathcal{C}_{\Omega,m})$ espace ($\mathcal{O}(\Omega)$-module de Banach) des familles de formes aut. p-adiques niveau K, poids dans Ω, m-surc.

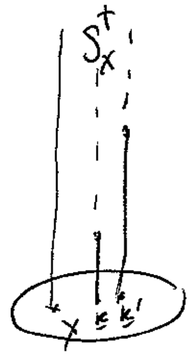
- On posera $S^\dagger_x = \bigcup_{m \geq 0} S_{x,m}$

Le lemme suivant découle immédiatement du (A) et de la description ci-dessus de F.

Lemme i) Si $k \in \mathbb{Z}^{m,+}$, $\overset{\text{" formes classiques"}}{S_{\underline{k}}(K)} \otimes (\chi_{k\delta})^{-1} \subset S_{\underline{k},0}(K)$. De plus si $\underset{\neq 0}{v} \in S_{\underline{k},0}(K)$, $uv = \lambda(u)v$, $\lambda : U^- \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$, alors $\lambda < \underline{k} \Rightarrow v \in \underline{S_{\underline{k}}(K)}$.

ii) Si $\Omega \subset W$, $m \geq m(\Omega)$, $S_{\Omega,m}(K)$ facteur direct d'un $\mathcal{O}(\Omega)$-Banach constant, $H^S[U]$ ↻ normes ≤ 1, U^{--} ↻ endom. compacts (non constants !) en améliorant la convergence. Si $x \in \Omega(L)$, $S_{\Omega,m}(K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(\Omega)} L \overset{H^S[U]}{=} S_{x,m}(K)$

La situation est très semblable à la théorie usuelle pour GL_2.



$S^\dagger(K)$ faisceau de $\mathcal{O}_W$-modules ess. constant, l'action de $H^S[U]$ elle est analytique. On va découper des familles de vecteurs propres via la théorie spectrale (due à Coleman) des opérateurs compacts ↻ modules de Banach.

En fait, un opérateur suffira : $U_p := (p^{m-1}, p^{m-2}, \dots, p, 1) \in U^{--} \subset H^S[U]$

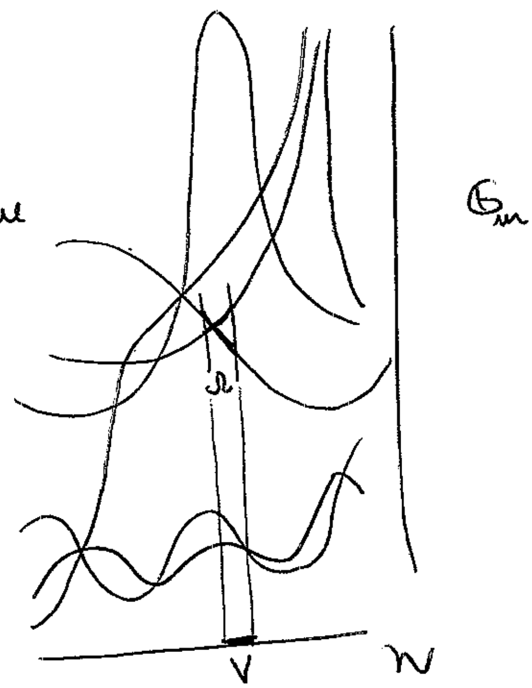
Lemme il existe une unique série $f(w,T) \in 1 + T\mathcal{O}(W)\{\{T\}\}$ (i.e. converge sur <u>tout</u> $W \times \mathbb{A}^1$) telle que $\forall x \in W(L)$ et $m \geq m(x)$

$$f(x,T) = \det(1 - TU_p \mid S_{x,m}(K))$$ (indép. de $m \geq m(x)$)

Preuve : Par la théorie de Coleman, $\forall \Omega$, $m \geq m(\Omega)$, $\det(1 - TU_p \mid S_{\Omega,m}(K)) \in 1 + T\mathcal{O}(\Omega)\{\{T\}\}$ a un sens et ils se recollent quand m et Ω varient.

(D) Factorisation de la série de Fredholm f et construction de la variété de Hecke X

Regardons le lieu des zéros de f $\quad Y \subset W \times \mathbb{G}_m$



En général, d° $pr_1 : Y \to W$ est infini. On conjecture nb fini de comp. irréductibles seulement. Ce fouilli est une bonne approximation de X !

Considérons les ouverts affinoïdes Ω de Y tels que
$V := pr_1(\Omega)$ ouvert aff. de W et
Ω est un ouvert fermé de $pr_1^{-1}(V)$
(auquel cas $\Omega \to V$ fini et plat)

__Lemme__ (Coleman, Buzzard) Ces Ω recouvrent admissiblement Y (vrai $\forall f \in 1+T\mathcal{O}(W)\{\{T\}\}$)

__Associé à un tel Ω__

i- $f(w,T)_{|V \times \mathbb{A}^1} = A(T)\,B(T)$ où $A(T) \in 1+T\mathcal{O}(V)[T]$ dont les zéros sont Ω dans $V \times \mathbb{A}^1$

("factorise f sur $V \times \mathbb{A}^1$") et $(A(T), B(T)) = 1$ dans $1+T\mathcal{O}(V)\{\{T\}\}$

ii- $S_V^\dagger(K) = P \oplus Q$ ss $\mathcal{O}(V)$-modules $H^S[U]$ stables

avec $\begin{cases} P \text{ loc. libre}_{/\mathcal{O}(V)} \text{ et } \det(1-T\,U_p|_P) = A(T) \\ \text{rg } d^\circ A \\ U_p \text{ inversible sur } P \end{cases}$

On regarde alors l'image de $H^S[U] \otimes \mathcal{O}(V)$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}(V)}(P)$, notons $X(\Omega)$ le spectre affinoïde réduit associé (en fait il est déjà réduit).

Par construction, on a le

Lemme: i) Les $X(\Omega)$ se recollent en un espace analytique $/\mathbb{Q}_p$ X (et ils en forment un rec admissible). Par construction, X est réduit, équidim. $\dim W = n$ (car les P loc libres$/\mathcal{O}(V)$), et on a un morphisme

$$X \longrightarrow Y \quad \text{fini} \quad (X(\Omega) \to \Omega)$$

ainsi que $\kappa : X \longrightarrow W$ localement fini (au sens du Hom.) après composition par pr_1.

ii) On a un morphisme d'anneaux $\Psi : H^S[U^-] \longrightarrow \mathcal{O}(X)^{\leq 1}$ canonique et $\Psi(U_p) \in \mathcal{O}(X)^*$. En particulier, Ψ s'étend à $H^S[U]$ et si on pose $F_i := \Psi((1,1,\ldots,1,p,1,\ldots,1))$ $i$ème, alors $(\kappa, (F_i)) : X \longrightarrow W \times \mathbb{G}_m^n$ est fini. Enfin, la condition (iii) du théorème est satisfaite par constr.

(E) Interprétation des points et définition de Z

Encore par construction

Lemme: L'application naturelle $X(\overline{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{an}(H^S[U^-], \overline{\mathbb{Q}}_p) \times W(\overline{\mathbb{Q}}_p)$

$$x \longmapsto (\Psi_x, \kappa(x))$$

est injective, son image est l'ens. des paires (Ψ, κ) / $\exists f \neq 0 \in S_\kappa^\dagger(K)$ telle que $h \cdot f = \Psi(h) \cdot f$ $\forall h \in H^S[U^-]$ et $\Psi(U^-) \subset \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$. ("$f$ de pente finie")

En général $x \leftrightarrow \{f_x\}$ ens. fini de formes propres avec ces propriétés.

- On définit Z comme étant les x / $\exists f_x$ classique non ramifié en p. (NB: elles apparaissent toutes car la cond. pente finie automatique). D'après le (B), l'action de U^- sur f_x définit un unique raffinement accessible de $\pi_p(f_x)|\,|^{\frac{1-n}{2}}$ qui est

$$\left(F_1(x)p^{k_1(x)}, \ldots, F_n(x)p^{k_n(x)}\right) \text{ où } k(x) = (k_1(x) < \ldots < k_n(x)) \in \mathbb{Z}^{n,+}$$

L'assertion de classicité est satisfaite par le (C).

(F) très Zariski-densité de $\mathcal{Z}$

En 2 étapes

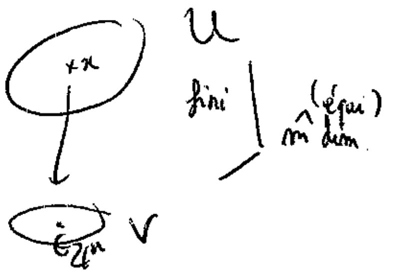
i) Si T est une composante irréductible de X, alors T contient un x / $k(x) \in \mathbb{Z}^{n,t}$.

En effet, il suffit de montrer que $k(T)$ ouvert Zariski de W (car $\mathbb{Z}^{k,t}$ Z-dense dans W)

Mais $K(T) = Pr_1(T')$ où $T' \subset Y$ comp. irréductible
$\mathcal{Z}(f') \subset \mathcal{Z}(f)$ $f' \in 1+T\mathcal{O}(W)\{\{T\}\} \,|\, f$

Mégalors c'est clair car une série entière $\in \mathbb{C}_p\{\{T\}\}$ sans zéro est constante.

ii) Soit $x \in X$ / $k(x) \in \mathbb{Z}^{n,t}$ et $\mathcal{U}$ un voisinage connexe de x de la forme $X(\Omega)$



Les F_i sont analytiques inversibles sur $\mathcal{U}$ donc

$$|v(F_i(x))| < C \text{ sur } \mathcal{U}$$

Ainsi, $\forall y \in \mathcal{U}$ tel que $|k_{i+1}(y) - k_i(y)| \geq mC$ est dans $\mathcal{Z}$ par le critère de classicité

$\Rightarrow$ très Z-densité ! ∎

IV Représentations galoisiennes attachées aux rep. automorphes des groupes unitaires et à leurs variétés de Hecke

$G/\mathbb{Q}$ groupe unitaire défini à n variables associé à $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire

On fixe p et $\overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{Q}}_p$

1. Cas "classique"

Soit Π une rep. automorphe de G

Conjecture (Langlands, Arthur) Il existe une unique rep. semisimple continue

$$\rho_\Pi : G_E = \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \longrightarrow Gl_n(\overline{\mathbb{Q}}_p) \quad \text{telle que}$$

ⓐ ρ_Π non ramifiée aux places v au dessous desquelles Π et G sont non ramifiés,

ⓑ Si $\ell = v\bar{v}$, $\ell \neq p$ et $G(\mathbb{Q}_\ell) \underset{v}{\xrightarrow{\sim}} Gl_n(\mathbb{Q}_\ell)$, $\quad (\rho_\Pi | G_{E_v})^{\phi-ss} \simeq L(\pi_v |\,|^{\frac{1-n}{2}})$

(Bien défini par Harris-Taylor. $\pi_v = \pi_\ell$ vue comme $Gl_n(\mathbb{Q}_\ell) = E_v$)

ⓒ Si $p = v\bar{v}$ __________, et si π_p non ramifiée, alors $\rho_\Pi | G_{E_v}$ cristalline

- de poids de HT $k_1 < \dots < k_n$ où $\pi_\infty \underset{v,\iota,\varphi}{\simeq} W_{\underline{k}}$ et $\underline{k} = (k_1 < \dots < k_n)$
- le pol car du φ sur $D_{cris}(\rho_\Pi | G_{E_v})$ est $\det(T - L(\pi_v |\,|^{\frac{1-n}{2}})) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[T]$

(convention : HT de $\mathbb{Q}_p(1) = -1$)

Remarques $\rho_\Pi^{*,c} \simeq \rho_\Pi(n-1)$ où $\langle c \rangle = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ par ⓑ. Tous les types de réductibilité sont possibles pour ρ_Π (endoscopie), m̂ avec π tempérée. ρ_Π sans multiplicité par ⓒ et définie sur son corps des traces. Les fibres de $\pi \longrightarrow \rho_\Pi$ ("A-paquets automorphes") peuvent être infinis - mais mult 1 faible conjecturée. ⓑ aux places non décomposées est plus subtil. Avec mes conventions, si $\Pi = \mathbb{1}$ trivial on a

$$\rho_\Pi = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(-1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_p(1-n)$$

Théorème C'est vrai si
ⓘ $n \leq 3$ (Blasius - Rogawski, ...)
ⓘⓘ si $\exists\, \ell \,/\, G(\mathbb{Q}_\ell) \simeq \Delta^\times$ Δ algèbre à division $/\mathbb{Q}_\ell$

(Clozel-Kottwitz-Harris-Taylor, Labesse, Vignéras, Badulescu, ...)

Dans ce qui suit on supposera toujours ⓘ ou ⓘⓘ. (hypothèse sur G)

II. Cas p-adique et en familles

$p = v\bar{v}$, $G(\mathbb{Q}_p) \underset{v}{\simeq} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, on fixe $S \ni p$ et $K = K_p \times K_{S-\{p\}} \times K^S$ comme dans (II)(III), $K_p \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$

On dispose de la variété de Hecke p-adique de niveau K : $(X, \psi, (K, (F_i)), Z)$

Rappel : $z \in Z \leftrightarrow (\pi(z), R)$, $\pi(z)$ aut niveau K, R raff accessible de $\pi_p(z)$ | |

Proposition $\exists !$ fonction continue $T : G_{E,S} \longrightarrow \mathcal{O}(X)^{\leq 1}$ telle que pour tout z dans Z, $T_z = \mathrm{trace}\ \rho_{\pi(z)}$ ($T_x :=$ évaluation en x de T)

De plus, T est un pseudocaractère de dim n de $G_{E,S}$, et $T(cg^{-1}c) = T(g)\chi(g)^{n-1}$ $\forall g \in$

Preuve Munissons $\mathcal{O}(X)$ de la top. de la convergence uniforme sur tout ouvert affinoïde ($\mathbb{Q}_p$-alg Fréchet) - alors $\mathcal{O}(X)^{\leq 1}$ en est un ss-ensemble compact. En effet, $X = \bigcup_{\text{adm} \uparrow} X_n$ avec $X_n \subset X_{n+1}$ ouverts aff. et $\mathcal{O}(X_{n+1}) \to \mathcal{O}(X_n)$ compact. Cela vient de ce que $W \times \mathbb{G}_m^n$ a cette propriété et que X fini dessus. (NB. si Ω aff., $\mathcal{O}(\Omega)^{\leq 1}$ non compact)

$$\mu : \mathcal{O}(X)^{\leq 1} \xrightarrow{\text{éval}} \prod_{z \in Z} \overline{\mathbb{Q}}_p \quad \Rightarrow \text{homéo sur son image (top. produit)}$$

et $T'(g) := (\mathrm{tr}\ \rho_{\pi(z)})_z$ tombe dans l'image de μ car c'est vrai pour $T'(\mathrm{Frob}_w)$ où $\ell = ww' \notin S$: $T'(\mathrm{Frob}_w) = \mu(\psi([K^S(\ell \ \ddots)K^S]))$ ∎

$\Rightarrow$ on pose alors $T = \mu^{-1} \circ T'$, QED par Cebotarev.

La théorie des pseudocaractères implique alors (Procesi, Taylor, Nyssen, Rouquier, Bell-Ch) formellement

Corollaire (i) $\forall x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (i.e. paramétrant une forme aut p-adique propre pente finie) $\exists !$ $\rho_x : G_{E,S} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ semi-simple (cont) telle que $\mathrm{trace}\ \rho_x = T_x$.

(elle satisfait une variante de (b), affaiblie sur la monodromie)

(ii) Si $z \in Z$, il existe $\Omega \subset X$ voisinage ouvert aff. de z, et une représentation continue $\rho_\Omega : G_{E,S} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}(\Omega)}(M_\Omega)$ de trace $T_{|\Omega}$

M_Ω : $\mathcal{O}(\Omega)$-m tf sans torsion gen libre rg n. (non unique en gén)

(iii) Si ρ_z est de plus irréd, on peut choisir M_Ω libre rg n, unique à isom près si Ω assez petit, d'où un canonique $\rho : G_{E,S} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_z)$ de trace T

$\mathcal{O}_z$: anneau local rigide en z

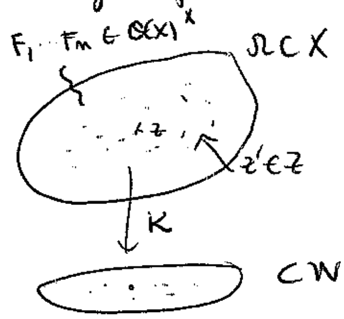
<u>Remarque</u> Dans (ii) on peut éclater Ω pour que le trans. strict de $M(\Omega)$ ⇝ libre. Plus généralement on peut altérer X pour avoir une famille de rep. de trace T (non canonique).

En $\ell \neq p$, ces représentations varient simplement ("version en famille de monodromie ℓ-adique" triviale)

en p c'est nettement plus fin.

III. <u>Restriction à $G_{\mathbb{Q}_p}$</u> (on identifie définitivement E_v à $\mathbb{Q}_p$, $G_{E_v} = G_{\mathbb{Q}_p}$)

Analysons ce qui se passe au voisinage d'un $z \in Z$ dans X



$\rho_z|G_{\mathbb{Q}_p}$ est, d'après le I, telle que cristalline

- $k(z) = (k_1 < \cdots < k_n)$ poids HT
- vp Frob. cristallin sont les $(F_1(z)p^{k_1}, \ldots, F_n(z)p^{k_n})$

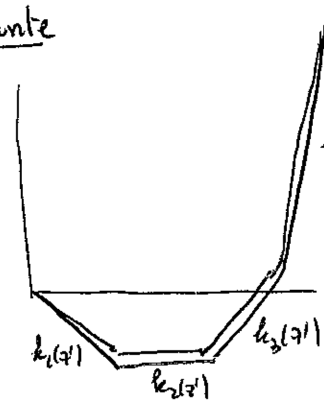
dans l'ordre défini par le raffinement (acc de $\pi(z)_p|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ défini par z

1. <u>Les poids bougent beaucoup</u>.

$\forall c > 0$, $Z_c = \{z \in Z, |k_{i+1} - k_i| \geq c\}$ est Z-dense ds X (et Ω)

2. <u>Les F_i sont ds $\mathcal{O}(X)^\times$ donc de valuation loc. constante</u>

Donc pour z' ds Z_c assez proche ⇝
$c \gg 0$



"les polygones de Hodge et Newton coïncident "<u>presque</u>" "

C'est une première observation.

3. Si π de niveau K est fixée, on peut lui associer autant de $z \in Z$ que de raff. (accessibles) de $\pi_p|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ ($n!$ génériquement). En général, les déformations associées seront très différentes et notre objectif sera de les comprendre assez bien pour pouvoir les comparer.

<u>Exemple simple mais déjà intéressant</u>: $n=2$, π a poids $0 < k$, $L(\pi_p|\cdot|^{-1/2}) = \{\alpha, \beta\}$ $v(\alpha) = 0$, $v(\beta) = k$

cas <u>ordinaire</u>

Un point z' de poids $(0 < k')$ voisin de z

si $z \leftrightarrow (\alpha, \beta)$

($\rho_{z'}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est alors réductible),

si $z \to (\beta, \alpha)$

$\rho_{z'}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est irréductible !

<u>Rmq:</u> Ce genre d'observations permet de montrer que tout ρ_π se déforme irréductiblement en 2 familles bien choisies (Bell-Ch). Notez que les π' voisins de π construits ont des propriétés locales intéressantes, peut-être difficiles à construire autrement !

Les résultats généraux sur les familles p-adiques de rep. p-adiques dont nous disposons sont les suivants (Sen, Kisin)

Poids Ecrivons $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathcal{O}(X)^\times$ et posons $k_i := \frac{dk_i}{d\gamma}\big|_{\gamma=1} \in \mathcal{O}(X)$

Prop (Sen) $\forall x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, $\rho_x|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ a pour poids de HT généralisés les $k_i(x)$.

En particulier, ρ_x HT en $p \Rightarrow k_i(x) \in \mathbb{Z}$ $\forall i$, et la plupart des points x sont donc non géom (non HT.)

continuité des v.p du Frob cristallin

Contexte abstrait. Soit $Y/_{\mathbb{Q}_p}$ espace rigide réduit et séparé, $F \in \mathcal{O}(Y)^\times$, M un $\mathcal{O}_Y$-module loc. libre de rang n + ∂ $G_{\mathbb{Q}_p}$ $\mathcal{O}_Y$-lin continue, et $Z \subset Y(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (Zarsk-dense)/ i

ⓐ $\forall z \in Z$, M_z cristalline et $D_{cris}(M_z)^{\varphi = F(z)} \neq 0$,

ⓑ —— 0 est un poids de HT de M_z et $\forall c > 0$ $Z_c = \{ z \in Z$, les autres poids sont $> c \}$ est Zarski-dense ds X.

Alors **Prop** (Kisin) Si $y \in Y$,

i) $Fil^0\, D_{cris}(M_y)^{\varphi = F(y)} \neq 0$.

ii) Si $D_{cris}(M_y^{ss})^{\varphi = F(y)}$ est de dim 1, $\forall I \subset \mathcal{O}_y$ idéal de codim finie on a $Fil^0\, D_{cris}(M \otimes \mathcal{O}_y/_I)^{\varphi = F}$ libre de rang 1 / $\mathcal{O}_y/_I$

Remarque C'est un exercice si $\forall y \in Y, v(F(y)) = 0$ car pour z dans Z_c, on voit que (M_z^I) non trivial, le Frob y admettant $F(z)$ pour v. propre. La proposition en général est l'analogue correct de cet exercice

Avant d'énoncer le corollaire à X, on définit un raffinement <u>régulier</u>

déf. $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ raff de $\pi_p |\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ régulier si $\forall i$, $\varphi_1 \dots \varphi_i$ v.p simple de $\Lambda^i L(\pi_p |\cdot|^{\frac{1-n}{2}})$.

Corollaire i) $\forall x \in X$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $Fil^0\, D_{cris}(\Lambda^i \rho_x (k_1^{-1} \dots k_i(x)))^{\varphi = F_1(x) \dots F_i(x)} \neq 0$

ii) Si $z \in Z$, ρ_z irréductible et si le raff paramétré R_z de $\pi_p(z)$ est <u>régulier</u>, alors $D_{cris}(\Lambda^i_{\mathcal{O}_z} \rho (k_1 \dots k_i) \otimes \mathcal{O}_z/_I)^{\varphi = F_1 \dots F_i}$ libre de rg 1 sur $\mathcal{O}_z/_I$ $\forall I \subset \mathcal{O}_z$ idéal codim finie.

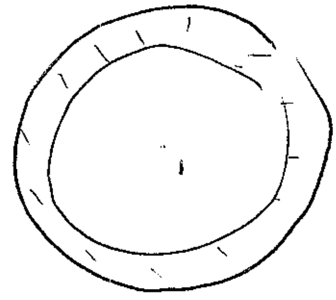
Rmque : Quand ρ_z réductible, par exemple z endoscopique, on a étendu ce résultat avec Bellaïche (ainsi que Prop (Kisin) dans le cas M non loc. libre), c'est plus complexe combinatoirement.

V Représentations trianguliness

Ainsi que l'a vu Colmez, la propropriété $D_{cris}(V)^{\varphi=\lambda} \neq 0$ s'interprète particulièrement bien en terme du (φ,Γ)-module ~~/~~ Robba attaché à V. Cette traduction nous permettra comprendre parfaitement les propriétés des déformations des ρ_π portées par X, ultimement.

1 (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba

$L/\mathbb{Q}_p$ est finie, $\mathcal{R}_L = \{ f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-1)^n$, f converge sur $r_f \leq |z-1| < 1 \}$
$a_n \in L$



$\mathcal{R}_L$ muni d'actions commutantes de φ et $\Gamma := \mathbb{Z}_p^\times$:

$$\varphi(f)(z) = f(z^p) \quad \text{et} \quad \gamma(f)(z) = f(z^\gamma) \quad \gamma \in \Gamma$$

(Γ préserve les cercles concentriques et $z \mapsto z^p$ contracte vers 1)

On pose $t = \log(z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$, $\varphi(t) = pt$
et $\gamma(t) = \gamma t \quad \forall \gamma \in \Gamma$.

Rmq : $\mathcal{R}_L$ domaine de Bézout étudié par Lazard (idéaux tf principaux, diviseurs, modules tf sans torsion sont libres, div. élémentaires). Si $I = (f) \subset \mathcal{R}_L$ idéal Γ-stable et $\mathcal{R}\varphi(I) = I$ alors $I = (t^n)$ $n \geq 0$.

Déf : Un (φ,Γ)-module$/\mathcal{R}_L$ est un $\mathcal{R}_L$-module libre de type fini + actions semi-linéaires φ et Γ qui commutent avec Γ continue et $\mathcal{R}_L \varphi(D) = D$.

L'intérêt de ces objets est qu'ils paramètrent toutes les rep. de $G_{\mathbb{Q}_p}$, et même plus !

Théorème (Fontaine, Cherbonnier-Colmez, Kedlaya) $\exists$ une $\otimes$-équivalence de catégorie

$$\underset{\mathrm{Rep}_L G_{\mathbb{Q}_p}}{V} \longmapsto \underset{\substack{(\varphi,\Gamma)\text{-mod} \\ \text{étale}}}{D_{rig}(V)} \qquad \text{qui préserve le rang.}$$

Rmq : Etale ne dépend que du φ-module sous-jacent. Kedlaya associe $n = [D:\mathcal{R}_L]$ pentes à un φ-modules, dans $\mathbb{Q}$ (étale = pentes toutes nulles), et montre l'existence d'une filtration canonique par des sous φ-modules de gradués isoclines de pente strictement croissante ("à la Dieudonné-Manin"). La cat des (φ,Γ)-modules (non néc. étale) non abélienne, encore mal comprise, mais utile.

Il est possible de retrouver sur $D_{rig}(V)$ les invariants de Fontaine de V

Prop (Berger) $D_{cris}(V) \xrightarrow{\sim} \left(D_{rig}(V)[\frac{1}{t}]\right)^{\Gamma}$ $\supseteq$ $L[\varphi]$-équivariant, de plus il y a une recette pour la filtration de Hodge

II. Les (φ,Γ)-modules de rang 1 et leurs extensions

Construction Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ un caractère continu $\mathcal{R}_L(\delta) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{R}_L e & \mathcal{R}_L\text{-module} \\ \varphi(e) = \delta(p) e & \\ \gamma(e) = \delta(\gamma) e. \ \forall \gamma \end{array} \right.$

Sa pente de Kedlaya est $v(\delta(p)) \in \mathbb{Q}$,

si c'est 0, δ s'étend en un caractère $\tilde{\delta} : G_{\mathbb{Q}_p} \to L^\times$ via corps de classes local.

Déf: $x : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ = inclusion, $\chi . \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ $\left\{ \begin{array}{l} p \mapsto 1 \\ \chi_{|\mathbb{Z}_p^\times} = x_{|\mathbb{Z}_p^\times} \end{array} \right.$ ($\tilde{\chi}$ = cyclotomique)

Prop (Colmez) Tout (φ,Γ)-module de rang $1/\mathcal{R}_L \simeq \mathcal{R}_L(\delta)$ pour δ unique. De plus $\mathrm{Ext}_{(\varphi,\Gamma)}(\mathcal{R}(\delta_2), \mathcal{R}(\delta_1))$ est de dim $1/L$ sauf si $\delta_2\delta_1^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} x^{-i} \\ x^i\chi \end{array} \ i \in \mathbb{N} \right\}$ auquel cas dim 2.

Définition - Un (φ,Γ)-module D est dit triangulaire si $\exists$ $D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n = D$ filtration (φ,Γ)-sous-modules D_i de rang i facteur direct comme $\mathcal{R}_L$-module
- Une L-rep p-adique V est trianguline si $D_{rig}(V)$ triangulaire.

Colmez décrit alors l'espace des reps triangulines de dim 2, du moins ponctuellement. Lien avec cond "à la Kisin"!

Prop: (Colmez) V une L-rep de $G_{\mathbb{Q}_p}$, $D = D_{rig}(V)$. Il existe $\chi, \lambda \in L^\times$ / $D_{cris}(V\otimes\chi)^{\varphi=\lambda} \neq 0$ ssi D contient un sous (φ,Γ)-mod saturé rg 1 (i.e. $\exists$ $0 \to \mathcal{R}(\delta) \to D \to D' \to 0$) $\leftarrow (\varphi,\Gamma)$-module

(En particulier $\Leftrightarrow$ V trianguline si $\dim V = 2$).

Preuve ($\Leftarrow$ sera évident, $\Rightarrow$ ops $\chi = 1$) Berger $\Rightarrow$ $\exists$ $v \neq 0 \in D[\frac{1}{t}]$ / $\begin{array}{l} \varphi(v) = \lambda v \\ \gamma v = v \ \forall\gamma \end{array}$

Soit $s \in \mathbb{Z}$ / $w := t^{-s} v \in D$. L'idéal $I \subset \mathcal{R}_L$ engendré par les coeff (coordonnées) de w dans une $\mathcal{R}_L$-base de D fixée. Alors I Γ-stable et $\mathcal{R}\varphi(I) = I$ donc $I = (t^n)$ par l'ex).

Ainsi on peut supp $s / \mathcal{R}_L t^{-s} v$ saturé dans D, puis $\exists$

$$0 \to \mathcal{R}_L(\delta) \to D \to D' \to 0$$

$\delta = x^{-s}\varphi$ $\leftarrow (\varphi,\Gamma)$ module car sans torsion

Rmq: on peut voir que s est le saut de la filtration de Hodge sur $Lv \in D_{cris}(V)^{\varphi=\lambda}$.

Tableau On s'attend à ce que sur la variété de Hecke X :

(i) $\forall x \in X$, $\rho_{x|G_{\mathbb{Q}_p}}$ trianguline, avec une triangulation naturelle.

(ii) Cette triangulation varie analytiquement sur X hors du lieu critique, où la situation est plus subtile

Le (i) découle de la prop précédente + corollaire à Kisin (i) quand x est générique.
Nous allons l'étudier plus précisément aux points dans Z dans ce qui suit, et définir "critique".
Nous nous intéresserons plus tard à (ii) au voisinage infinitésimal des points de Z.

Rmq: (i) colle avec l'intuition "triangulaire" du (IV) III.2, aussi avec la philosophie de Breuil.
série principale p-adique $\Leftrightarrow$ réductible$/\mathcal{R}_L$

III Triangulations des cristallines et raffinements

Soit V une L-rep cristalline de dim $n \geq 1$, $D_{cris}(V) \supset L[\varphi]$ + $(\mathrm{Fil}^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ filtration de Hodge.
dont les sauts sont les poids de HT de V

hypothèse bénigne pol. car. φ scindé dans $L[T]$

Définition (Mazur) Un raffinement de V est la donnée d'un drapeau complet de $D_{cris}(V)$

$$\mathcal{F}_0 = 0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_i \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_n = D_{cris}(V)$$
par des sous espaces$/L$ φ-stables

(il en existe toujours) Un raffinement détermine deux ordres:

(i) Un ordre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ des valeurs propres de φ : $\det(T - \varphi_{|\mathcal{F}_j}) = \prod_{i\leq j}(T - \varphi_i)$
En retour, si φ_i distincts cela détermine $\mathcal{F}$: cela colle avec la définition "automorphe" déjà donnée au (I)

(ii) Un ordre $(s_1, \dots, s_n)$ des poids HT de V : $HT(\mathcal{F}_j) = (s_1, \dots, s_j)$

Soit $D = D_{rig}(V)$. On démontre la prop suivante en élaborant la preuve de la prop de Colmez (et la remarque qui l'a suivie) du II.

sens par Berger
$\downarrow$

Proposition (Bell-Ch) L'application $(\mathcal{F}_i) \longmapsto \left(D_i = \mathcal{R}_L \mathcal{F}_i[\frac{1}{t}] \cap D\right)$ induit une bijection entre raffinements de V et triangulations de D, de réciproque $\mathcal{F}_i = (D_i[\frac{1}{t}])^{\Gamma}$.
Dans cette bijection, $D_i/D_{i-1} = \mathcal{R}_L(\delta_i)$ avec $\delta_i = x^{-s_i}\varphi_i$.

Cor: toute cristalline est trianguline, de plusieurs façons en général, $n!$ génériquement.

Déf. (Bell-Ch) Supposons V a poids de HT distincts $k_1 < \dots < k_n$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)$ un raff. de V.

ⓐ $\mathcal{F}$ est dit non critique si il est en position générale avec Fil^i Hodge, i.e si

$$\forall i, \quad \mathcal{F}_i \oplus \mathrm{Fil}^{k_{i+1}} D_{dR}(V) = D_{dR}(V) \qquad (\Leftrightarrow s_i = k_i \ \forall i)$$

ⓑ $\mathcal{F}$ — numériquement non critique si $v(\varphi_1) < k_2$ et $\forall i \in \{2, \dots, n-1\}$ $v(\varphi_1 \cdots \varphi_i) < k_1 + \dots + k_{i-1} + k_{i+1}$

Rmq. – La faible admissibilité montre que "num. non critique" $\Rightarrow$ "non critique".
– ⓑ est la condition intervenant dans le critère de classicité.

Exemple V dim 2, poids $0 < k$, vp $\{\alpha, \beta\}$ avec disons $v(\alpha) \leq v(\beta)$. Alors tous les raff. de V sont non critiques sauf si V est réductible et scindée et $R = (\beta, \alpha)$. Les numériquement non critiques sont (α, β) si $v(\alpha) < k$.

Un exemple d'application de ces concepts est la prop. suivante, que l'on utilisera + tard:

Prop. Soit $z = (\Psi_{\pi(z)}, \underline{k}, R) \in Z$ tel que R soit régulier et non critique, alors

$$S_{\underline{k}}(K)[\Psi_{\pi(z)}] = S^{+}_{\underline{k}}(K)[\Psi_{\pi(z)}] \quad ([\Psi_{\pi(z)}] \text{ désigne l'espace caractéristique du caractère } \Psi_{\pi(z)} \text{ de } \mathcal{H}^S[U^-])$$

("classicité infinitésimale")

Preuve Par la suite exacte ($\mathcal{H}^S$-equiv) $0 \to S_{\underline{k}}(K) \to S_{\underline{k},0}(K) \to \prod_{i=1}^{n-1} S_{s_i(\underline{k}),0}(K)$ il suffit de voir que $S_{s_i(\underline{k}),0}(K)[\Psi_{\pi(z)}] = 0$. Ce serait évident si R numériquement non critique à cause des twists normalisants l'action de U^-. En général, si $S_{s_i(\underline{k}),0}(K)[\Psi_{\pi(z)}] \neq 0$, Kisin ① montre qu

$$\mathrm{Fil}^{k_1 + \dots + k_{i-1} + k_{i+1}} D_{dR}(\Lambda^i \rho_{\pi(z)})^{\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_i} \neq 0, \text{ absurde par hyp}_{\text{ R non critique}} \text{ et régularité de } R \ \blacksquare$$

Rmq. Si la multiplicité 1 ~~faible vaut pour le groupe~~ G, K isomorphisme en un tel z. (plus précisément, il faudrait rajouter assez d'op. de Hecke dans S)

Dans la suite (et fin!) du cours nous verrons que les raffinements non critiques sont ceux qui admettent une théorie des déformations "raffinées" excellente.

(VI) Déformations trianguline des représentations cristallines

Lorsque V est une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ munie d'un raffinement $\mathcal{F}$, nous allons lui associer un foncteur de déformations "$\mathcal{F}$-triangulines" et l'étudier.

I. Déformations

$L/\mathbb{Q}_p$ extension finie "coefficients". $\mathcal{C}$ catégorie $\begin{cases} \text{objets} : & L\text{-algèbre locale } A \text{ artinienne com.} \ / \ A/m_A \simeq L \\ \text{morph} : & \text{hom de } L\text{-alg.} \end{cases}$

Soit V une rep. cont. de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coeff dans L
$\dim_L V = n$.

$\mathfrak{X}_V : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ covariant $:= \mathfrak{X}_V(A) = \{ V_A$ A-mod libre rg n $\circlearrowleft$ A-lin. cont de $G_{\mathbb{Q}_p}$ $+ V_A \otimes_A L \xrightarrow{G_{\mathbb{Q}_p}} V \} / \simeq$

= foncteur déf de V à $\mathcal{C}$

Lemme Supposons $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V) = L$ et $\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V, V(1)) = 0$. Alors $\mathfrak{X}_V$ représentable, formellement lisse, de dim n^2+1 (i.e. $\mathfrak{X}_V \simeq \mathrm{Spf}(L[[X_0, X_1, \dots, X_{n^2}]])$)

Preuve (standard) $\mathfrak{X}_V$ gouverné par $\mathrm{ad} V := \mathrm{End}_L(V) \supset G_{\mathbb{Q}_p}$

$\mathfrak{X}_V(L[\varepsilon]) = H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad} V)$ et $H^2(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad} V) = 0 \Rightarrow \mathfrak{X}_V$ f. lisse

$\phantom{H^2(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad} V)} \overset{\shortparallel}{H^0(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad} V(1))}$

on conclut par |Mazur Schlessinger que $\mathfrak{X}_V$ pro-rep. car $\mathrm{ad} V^{G_{\mathbb{Q}_p}} = L$, et la dim vient de la car. d'Euler (Tate)

car $H^2 = 0$ par hyp : $\dim H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad} V) = \dim \mathrm{ad} V + \dim H^0 \mathrm{ad} V = n^2 + 1$ ∎

II. Foncteurs de déformations triangulines

Ces foncteurs seront définis en terme de $D := D_{\mathrm{rig}}(V)$, ce qui nous oblige à quelques sorties sur les déf. des (φ, Γ)-modules

Préliminaires :

- Si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, "l'anneau de Robba à coeff dans A" est $\mathcal{R}_A := \mathcal{R}_L \otimes_L A$.
- Un (φ,Γ)-module $/\mathcal{R}_A$ est un (φ,Γ)-module $D_A/\mathcal{R}_L$ + $\circlearrowleft A$ commute à $\mathcal{R}_L, \varphi, \Gamma$ et telle que D_A libre sur $\mathcal{R}_A$ ($\Leftrightarrow D_A$ libre sur A en fait)
- On vérifie qu'un (φ,Γ)-module rg 1 sur $\mathcal{R}_A \simeq \mathcal{R}_A(\delta)$, $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ unique car. cont.
- Un (φ,Γ)-module $/\mathcal{R}_A$ est dit A-triangulaire, s'il admet une A-triangulation : $D_0 = 0 \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \dots \subsetneq D_n = D$ où D_i ss (φ,Γ)-mod $/\mathcal{R}_A$ de rg i, facteur direct comme $\mathcal{R}_A$-mod.

<u>Lemme</u> Drig induit une bij naturelle $\forall A$

$$\mathcal{X}_V(A) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} D_A \ (\varphi,\Gamma)\text{-modules} / R_A \\ + \ D_A \otimes_A L \underset{(\varphi,\Gamma)}{\xrightarrow{\sim}} D \end{array} \right\} / \simeq \quad \text{où } D = \mathrm{Drig}(V)$$

"déformer $V \Leftrightarrow$ déformer D"

<u>Preuve</u>: équivalence de Fontaine, Colmez-Cherb, Kedlaya + le fait qu'une extension entre deux (φ,Γ)-modules étales est étale, que l'on déduit des travaux de Kedlaya ($\Rightarrow D_A$ tjrs étale)

<u>Définition</u> Supposons V cristalline et fixons $\mathcal{F}$ un raff. de V, ou ce qui est équivalent une triangulation $\mathcal{T}$ de D (cf (V)). On définit $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$

$$\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(A) = \Big\{ V_A \in \mathcal{X}_V(A) + \underset{\text{relevant } \mathcal{T}}{\text{une triangulation de } \mathrm{Drig}(V_A)} \Big\} / \simeq$$

(Ex: si V tot. réductible ordinaire et $\mathcal{F}$ ~~raffinement ordinaire~~ $\Rightarrow$ déformations réductibles ...)

<u>Théorème</u> (Bell-Ch) Supposons $\mathcal{F}$ non critique, $\varphi_i\varphi_j^{-1} \neq 1, p \ \forall i \neq j$, $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V) = L$. Alors:

(i) $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$ sous foncteur de $\mathcal{X}_V$, prorep. lisse dim $\frac{n(n+1)}{2} + 1$

(ii) $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}} \supset \mathcal{X}_{V,\mathrm{cris}}$ le foncteur des déf. cristallines de V (i.e. des V_A cristallines)

(iii) Il existe une s. exacte nat. $0 \to \mathcal{X}_{V,\mathrm{cris}}(L[\varepsilon]) \xrightarrow{c} \mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(L[\varepsilon]) \xrightarrow{\text{HT-Sen}} L^n \to 0$

"une déf. $\mathcal{F}$-trianguline est cristalline $\Leftrightarrow$ HT"

$$D_{L[\varepsilon]} \rightsquigarrow \delta_i : \mathbb{Q}_p^\times \to (L[\varepsilon])^\times \longmapsto \left(-\frac{\partial \delta_i}{\partial \gamma}\Big|_{\gamma=1}\right)$$

<u>Esquisse preuve</u>:

(i) Sous les hyp., $\mathcal{X}_V$ prorep., et $\varphi_i \neq \varphi_j \ \forall i \neq j \xrightarrow{\text{boulot}} \mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$ ss foncteur + relative pro-rep. $\Rightarrow$ représentabilité.

$\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$ est en fait gouverné par le (φ,Γ)-module suivant:

le R_L-module $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(D) = \{ u \in \mathrm{End}_{R_L}(D) \mid u(D_i) \subset D_i \}$ a une structure nat. de (φ,Γ)-module. son rang est $\frac{n(n+1)}{2}$. ($\mathcal{T} = (D_i)$ triang. de D ass. à $\mathcal{F}$)

$$\text{ia: } \mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(L[\varepsilon]) = H^1_{(\varphi,\Gamma)}(\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(D)) \text{ et } H^2_{(\varphi,\Gamma)}(\text{''}) = 0 \Rightarrow \mathcal{X}_{V,\mathcal{F}} \text{ f. lisse.}$$

On conclut par les résultats sur la cohom. des (φ,Γ)-modules (Colmez, Liu).

(ii) Reporté ci-dessous. (iii) se déduit de (ii) par calcul direct de $\mathcal{X}_{V,\mathrm{cris}}(L[\varepsilon]) = H^1_f(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad}V)$ $= \frac{n(n-1)}{2} + 1$ (Bloch-Kato)

ou Colmez-Fontaine, ou encore (iii) se démontre directement par dévissage et monodromie p-adique (cf. notre preuve avec Joël)

(ii) repose sur le lemme suivant généralisant à A le critère de Colmez de Colmez

<u>Lemme</u> ("poids constant") Soit V_A rep. de $G_{\mathbb{Q}_p}$ libre $/A$, $\bar{V} := V_A \otimes_A L$. Supposons $\exists \lambda \in A^\times$ et $v \in D_{cris}(V_A)^{\varphi=\lambda}$ tels que
- Av libre rg 1
- le poids de $L\bar{v} \subset D_{cris}(\bar{V})$ est le plus petit poids entier de $\bar{V}$ (= saut filtration de Hodge) disons k.

Alors (i) $Av \subset D_{cris}(V_A)$ admet k pour unique saut filtr. Hodge. En particulier V_A admet k pour poids <u>constant</u>

(ii) $\exists$ $0 \to R_A(x^{-k}\lambda) \to D_{rig}(V_A) \to D' \to 0$ (D' libre rg $n-1$ $/R_A$)

La preuve = élaboration des méthodes de l'exposé d'avant, il faut faire attention aux complications apportées par les A (nilpotents). d'hypothèse sur $L\bar{v}$ nécessaire pour que le poids ne diminue pas ("on peut sortir d'un cran de la filtration par déf). En fait, on a besoin pour (ii) de raisonner par récurrence $\rightsquigarrow$ énoncer un lemme poids constant pour des V_A "non étale" (ie des φ,Γ-modules quelconques).

Une autre application du lemme + cor. à Kisin + un peu de travail

<u>Prop</u>: (X variété de Hecke $\supset Z$) Soit $z \in Z$ paramétrant $(\rho_z, \mathcal{F})$ avec ρ_z irréductible, et $\mathcal{F}$ raffinement régulier, <u>non critique</u>, de $V := \rho_z|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$.

Alors $\rho_{\hat{\mathcal{O}}_z}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \in \underline{\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(\hat{\mathcal{O}}_z)}$ (ie $\rho_{\mathcal{O}_z} \otimes \hat{\mathcal{O}}_z|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est $\mathcal{F}$-trianguline)

III <u>Comparaison des $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$</u>

Supposons dorénavant V cristalline à poids $k_1 < \dots < k_n$ $\neq$, v. propres frob $\varphi_i\varphi_j^{-1} \neq 1, p$ si $i \neq j$ et $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V) = L$. On dira que V <u>générique</u> si tous ces $n!$ raffinements sont non critiques

On pose $t_* = \mathcal{X}_{V,*}(L[\varepsilon])$

<u>Situation</u>

$$t_{cris} \overset{n}{\subset} t_{\mathcal{F}} \overbrace{\subset}^{\frac{n(n+1)}{2}} t \qquad \forall \mathcal{F}$$

dim: $\frac{n(n-1)}{2}+1$ $\quad \frac{n(n+1)}{2}+1$ $\quad n^2+1$

pb: espace eng. par les $t_{\mathcal{F}}$?

<u>Théorème</u> Supposons V générique, Alors $t = \sum_{\mathcal{F}} t_{\mathcal{F}}$. "toute déformation de V à $L[\varepsilon]$ est C.L. de déf. triang."

<u>Preuve</u> (Esquisse) On introduit un foncteur de déformations "mirabolines" : Soit ϕ op. de Frob,

$$\mathcal{X}_{V,\phi}(A) = \left\{ V_A \in \mathcal{X}_V(A) + R_A\text{-}(\varphi,\Gamma)\text{-droite } \subset D_{rig}(V_A) \text{ relevant } \mathcal{R}(x^{-k_1}\phi) \text{ et de poids constante} \right\} \overset{\text{"poids cst"}}{=} \left\{ V_A \in \mathcal{X}_V(A),\ \exists\, \tilde{\phi} \in A^\times \text{ relevant } \phi \text{ tel que } D_{cris}(V_A)^{\phi=\tilde{\phi}} \text{ libre rg } 1 \right\}$$

On vérifie que $\mathcal{X}_{V,\phi} \overset{ss\,f.}{\subset} \mathcal{X}_V$, pro-rep, f. lisse dim $n^2-(n-1)-1+1 = n^2-n+1$

<u>Lemme</u> Soit $\mathcal{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et $\phi = \varphi_n$, alors $t = t_{\mathcal{F}} + t_\phi$. $\quad (t_\phi = \mathcal{X}_{V,\phi}(L[\varepsilon]))$

En effet, théorème 11 + dimension $\Rightarrow$ il faut voir que $t_{\mathcal{F}} \cap t_\phi = t_{cris}$, et il suffit même de montrer que $t_{\mathcal{F}} \cap t_\phi \subset t_{HT}$. Mais $\forall\, i = 1 \dots n-1$, on voit que si $D_\varepsilon \in t_{\mathcal{F}} \cap t_\phi$

$$D_{cris}\left(D_\varepsilon / D_{\varepsilon,i}\right)^{\varphi = \tilde{\phi}^i} = \left(\left(D_\varepsilon / D_{\varepsilon,i}\right)\left[\tfrac{1}{t}\right]\right)^{\Gamma,\ \varphi = \tilde{\phi}} \text{ libre rg } 1.$$

Poids constant $\Rightarrow$ le plus petit poids de est cst, i.e. k_{i+1} $\Rightarrow$ $\forall\, i$ <u>k_i cst.</u> ∎

On finit la preuve par récurrence sur n, là encore cela nécessite d'étendre les énoncés aux (φ,Γ)-modules non étales. ∎

On a montré en fait

<u>Théorème'</u> Supposons seulement que V a un raff non critique $\mathcal{F}_0$ / $\forall\, i = 1 \dots n-1$ $\mathcal{F}_i := (i, n)\, \mathcal{F}_{i-1}$ est non critique, alors $t = \sum_{i=0}^{n-1} t_{\mathcal{F}_i}$

Nous en aurons besoin en dim 3.

<u>Prop:</u> Supposons seulement V irred, de dim 3. Alors

(i) 4 raffinements au moins de V sont non critiques

(ii) $t = \sum_{\mathcal{F} \text{ non crit.}} t_{\mathcal{F}}$

En effet, le (i) est un exercice utilisant la faible admissibilité et (ii) se déduit de (i) et du théorème' appliqué à V ou V^* pour trois des 4 raff non critiques.

(VII) Applications globales à la densité Zariski des points modulaires

Soit $E/\mathbb{Q}$ quad imaginaire, $p = v\bar{v}$ impair déc. ds E, S ens. fini de premiers $\ni p$, disc E

Soit $\bar{\rho} : G_{E,S} \longrightarrow GL_3(\mathbb{F}_q)$ cont, abs irred, et telle que $\bar{\rho}^{\vee,c} \simeq \bar{\rho}(2)$

$q = p^{\alpha}$

<u>Modularité</u> Soit $U(3)/\mathbb{Q}$ le groupe unitaire déf attaché à $E/\mathbb{Q}$ et $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ (q.depl à ttes places finies). $\bar{\rho}$ modulaire $:=$ $\exists\, \pi$ aut. de $U(3)/\mathbb{Q}$ non ram hors de $S - \{p\}$ telle que $\overline{\rho_{\pi}} \simeq \bar{\rho}$. <u>Conjecture</u> tout $\bar{\rho}$ comme plus haut est modulaire en ce sens.

<u>Exemple</u> $A/\mathbb{Q}$ courbe elliptique non CM bonne red hors de $S - \{p\}$, $\bar{\rho} := \mathrm{Sym}^2 A[p]^* \,|\, G_E$ convient. modulaire par Wiles et coll, Gelbart-Jacquet, Rogawski

Nous allons étudier les déformations d'un tel $\bar{\rho}$ à la manière du cours (I) en dim 2.

$$F(A) = \left\{ \rho_A : G_{E,S} \xrightarrow[\text{cont}]{} GL_3(A),\ \rho_A \otimes \mathbb{F}_q = \bar{\rho},\ \rho_A^{\vee,c} \simeq \rho_A(2) \right\} /\simeq$$

A local fini $A/m_A \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q$

F pro représentable par $R(\bar{\rho})$, $W(\mathbb{F}_q)$-alg locale noeth complète. F est gouverné par une représentation "ad $\tilde{\rho}$" de $G_{\mathbb{Q},S}$, et on fera l'hypothèse simplificatrice

(H) $H^2(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho}) = 0$. (il y a une variante $p=2$)

<u>Lemme</u> (H) $\Rightarrow$ $R(\bar{\rho}) \simeq W(\mathbb{F}_q)[[t_1, \ldots, t_6]]$ $\left(6 = \frac{n(n+1)}{2},\ n=3\right)$ En particulier, sa fibre générique $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ est une boule ouverte unité dim 6 / $L_0 = W(\mathbb{F}_q)[\frac{1}{p}]$

<u>preuve</u>: On pose $\mathcal{G} = GL_3(\mathbb{F}_q) \rtimes \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, $cgc^{-1} := {}^t g^{-1}$ si $g \in GL_3(\mathbb{F}_q)$

On vérifie que $\bar{\rho}(1)$ s'étend en un morphisme $\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathcal{G}$ "admissible" ($G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$?)

ad $\tilde{\rho}$:= représentation adjointe $\tilde{\rho}$ sur $M_3(\mathbb{F}_q)$.

On vérifie que $F(\mathbb{F}_q[\varepsilon]) \simeq H^1(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho})$, (H) $\Rightarrow$ F f. lisse.

car euler $\Rightarrow$ dim " $=$ dim ad $\tilde{\rho}$ $-$ dim $H^0(G_{\mathbb{R}}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho}) = 9 - 3 = 6$ ∎

(en fait $H^0(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho}) = 0$!)

ad $\tilde{\rho}(c)$ $X \mapsto -A^t X A$ où A sym. $(p \neq 2)$

Un point $x \in \mathfrak{X}(\bar\rho)$ sera dit modulaire si $\rho_x \simeq \rho_\pi$ π rep aut de $U(3)$ non ram hors $S-\{p\}$

Théorème Supposons $\bar\rho$ modulaire et (H) vérifiée, alors les points modulaires sont Zariski-denses dans $\mathfrak{X}(\bar\rho)$.

Exemple $A_{/\mathbb{Q}}$: $y^2+y=x^3+x^2+x$ c. ell conducteur 19 $(\sim X_0(19))$, $\begin{cases} E = \mathbb{Q}(\sqrt{-19}) \\ p = 5, \ S = \{19, \text{[illegible]} \end{cases}$

$\bar\rho = \mathrm{Sym}^2 A[p]^{\times}_{|G_E}$, $\mathrm{ad}\,\tilde\rho = \mathrm{Sym}^2 A[p]^*(1) \oplus \varepsilon_{E/\mathbb{Q}} \oplus \varepsilon_{E/\mathbb{Q}} \mathrm{Sym}^4 A[p]^*(2)$

On peut montrer (H) satisfait. (Poitou-Tate, Flach, nb de classes avec Pari)

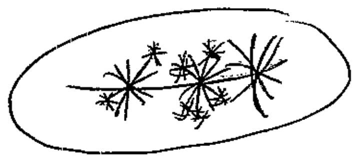
Preuve du théorème. Outil principal variété de Hecke $X_{/\mathbb{Q}_p}$ de $U(3)$ niveau $K = \underset{\text{max.}}{K_p} \times \overset{\text{assez petit}}{K_{S-p}} \times \underset{\text{hyp. max}}{K}$

Le lemme suivant est formel (arguments de pseudo rep). $X_{L_0} = X \times_{\mathbb{Q}_p} L_0$

Lemme 1 : $X(\bar\rho) := \{ x \in X(L_0) \ / \ \bar\rho_x \simeq \bar\rho \}$ est un ouvert fermé rigide de X, non vide (K assez petit).

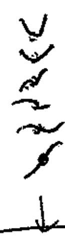
De plus, il existe un morphisme analytique can : $X(\bar\rho) \longrightarrow \mathfrak{X}(\bar\rho)$
$x \longmapsto \rho_x$

L'image de ce morphisme est la fougère infinie (définition) dans $\mathfrak{X}(\bar\rho)$.
$\mathfrak{X}(\bar\rho)$ dim 6 alors que $X(\bar\rho)$ dim 3
On va montrer qu'elle est Z dense



Rmq : L'application induite $X(\bar\rho) \longrightarrow \mathfrak{X}(\bar\rho) \times \mathbb{G}_m^3$, $x \longmapsto (\rho_x, (F_1(x), F_2(x), F_3(x)))$ est un morphisme fini par les propriétés de X. Cela démontre en particulier l'analogue du second théorème de l'introduction en dim 3 : "l'adhérence Zariski dans $\mathfrak{X}(\bar\rho) \times \mathbb{G}_m^3$ des points modulaires (ρ_π, F) raffinés est d'équi-dimension 3". En effet, un morphisme fini est d'image fermée.

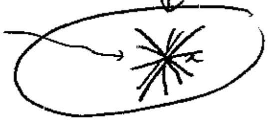
raff. normalisé



$(x, F) \in X(\bar\rho)$

image

Au voisinage d'un point modulaire $x = \rho_\pi$



Lemme 2. Soit $z \in Z \cap X(\bar\rho)$ paramétrant $(\rho_z, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est un raff. non critique, régulier, de $V := \rho_{z|G_{\mathbb{Q}_p}}$. Alors $X(\bar\rho)$ est lisse en z et mieux

$$\kappa : X(\bar\rho) \longrightarrow W \text{ est étale (isom local) en } z.$$

Preuve. Cela découle de la proposition de classicité infinitésimale du dernier cours + de la multiplicité 1 connue pour les rep. automorphes de $U(3)$ (Rogawski) (ici, les ρ_π / $\bar\rho_\pi = \bar\rho$ sont en fait nécessairement "stable tempérée") ■

$$\mathcal{X}_{\rho_z}(L[\varepsilon]) \text{ (def tangent)}$$

Corollaire la composée

$$\begin{tikzcd} T_z X(\bar\rho) \arrow[r, "\text{injective}"'] \arrow[rrr, bend right, "= d\kappa \ \simeq"'] & T_{\rho_z}\mathcal{X}(\bar\rho) \arrow[r, "|G_{\mathbb{Q}_p}"] & \mathcal{X}_V(L[\varepsilon]) \arrow[r, "\mathrm{Sen}", "\text{surjective}"'] & L^3 \end{tikzcd}$$

(L : corps coeff de ρ_z)

Notion de bon point. **Déf.** ρ_π bon si $\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ est irréductible, à vp Frob 2 à 2 $\neq$.

Lemme 3: Supposons ρ_π bon, alors on a une surjection naturelle :

$$\bigoplus_{z_F} T_{z_F}(X(\bar\rho)) \xrightarrow{\text{can}} T_{\rho_\pi}(\mathcal{X}(\bar\rho))$$

$z_F = (\rho_\pi, \mathcal{F}) \in X(\bar\rho)$

Preuve (Lemme clé) Considérons la flèche naturelle t comme au (VI)

$$\begin{tikzcd} T_{\rho_\pi}(\mathcal{X}(\bar\rho)) = \mathcal{X}_{\rho_\pi}(L[\varepsilon]) \arrow[r, "|G_{\mathbb{Q}_p}"] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{X}_{\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}}(L[\varepsilon]) \arrow[r] & t/t_{\mathrm{tors}} \end{tikzcd}$$

D'après nos calculs de dim, c'est une appl. linéaire entre 2 espaces de dim 6 $\left(= \frac{n(n+1)}{2}\right)$!

(globaux et locaux)

Il suffit de voir que la composée de l'appl. du lemme par celle-là est donc surjective.

Supposons $\mathcal{F}$ non critique et regardons $T_{z_F}(X(\bar\rho)) \longrightarrow t/t_{\mathrm{tors}}$

La prop (VI) ii assure que l'image tombe dans $t_{\mathcal{F}}/t_{\mathrm{tors}}$ car $\rho_{\hat{\mathcal{O}}_{z}|G_{\mathbb{Q}_p}}$ $\mathcal{F}$-triangulin.

Mais le lemme 2 dit que l'image est de dim au moins 3 $\Rightarrow$ l'image est tout $t_{\mathcal{F}}/t_{\mathrm{tors}}$.

Comme ρ_π irréductible, les $6=3!$ raffinements possibles de $\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ sont accessibles et la prop. VI III dit que 4 d'entre eux sont non critiques et même que

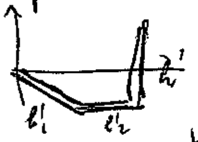
$$\sum_{F \text{ non critique}} t_F = t$$, cela conclut ! ■

Il ne reste qu'à vérifier qu'il y a assez de bons points dans $X(\bar\rho)$.

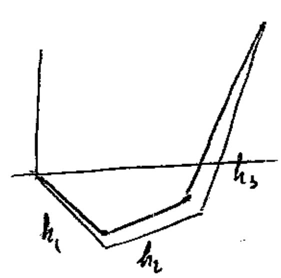
__Lemme 4__ (a) Il existe au moins un $z=(\rho_\pi, F) \in Z\cap X(\bar\rho)$ bon, ie / ρ_π bon.

(b) De plus, si z est bon, il admet un vois. ouvert aff Ω dans $X(\bar\rho)$ contenant un ensemble Zariski-dense de z' bons. (mieux, les bons z' s'accumulent en z)

Prouvons d'abord que le lemme 4 $\Longrightarrow$ théorème. Considérons l'adhérence Zariski $A \subset \mathfrak{X}(\bar\rho)$ des ρ_π bons. ~~A est non vide~~ $A\neq\emptyset$ par lemme 4(a). Considérons un $a_0 \in A$ bon, mod qui est __lisse__, il y en a toujours par définition. Il faut voir qu'en un tel point $T_{a_0}(A)=T(\mathfrak{X})_{a_0}$ mais cela découle du lemme 4 (b) et du lemme 3 ! ■

Prouvons enfin le lemme 4. Remarquons tout d'abord que $\{z \in Z,\ \rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ a des vp Frob 2 à 2 $\neq\} =: Z^{reg}$ est très Zariski-dense dans X. En effet, cela découle des observations faites au (IV) III, on peut même remplacer la cond. en "les valuations de vp de Frob sont 2 à 2 $\neq$" ( $v(\varphi_i)=h_i$)

Comme d'autre ~~part~~ la condition "$\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ irréductible" est un ouvert Zariski de $X(\bar\rho)$, il suffit de montrer (a) pour avoir (b). Pour vérifier (a), on procède comme expliqué dans (IV) III : on part d'un $z \in Z^{\cap X(\bar\rho)}$ __quelconque__ puis on le déforme en 2 coups en des z' / $\rho_{z'|G_{\mathbb{Q}_p}}$



"on crée des cassures ds le pol Newton" de sorte que P_{Newt} et P_{Hodge} ne se touchent qu'aux extrémités. C'est toujours possible ! ■