(VI) Déformations triangulines des représentations cristallines

Lorsque V est une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ munie d'un raffinement $\mathcal{F}$, nous allons lui associer un foncteur de déformations "$\mathcal{F}$-triangulines" et l'étudier.

I. Déformations

$L/\mathbb{Q}_p$ extension finie "coefficients". $\mathcal{C}$ catégorie $\begin{cases} \text{objets : } L\text{-algèbre locale } A \text{ artinienne com.} \mid A/m_A \simeq L \\ \text{morph : hom de } L\text{-alg.} \end{cases}$

Soit V une rep. cont. de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coeff dans L
$\dim_L V = n$.

$\mathfrak{X}_V : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ covariant $:= \mathfrak{X}_V(A) = \left\{ V_A \text{ } A\text{-mod libre rg } n \text{ } \circlearrowleft A\text{-lin. cont de } G_{\mathbb{Q}_p} + V_A \otimes_A L \xrightarrow{G_{\mathbb{Q}_p}} V \right\} / \simeq$

$=$ foncteur déf. de V à $\mathcal{C}$

Lemme Supposons $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V) = L$ et $\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V, V(1)) = 0$. Alors $\mathfrak{X}_V$ représentable, formellement lisse, de dim n^2+1 (i.e. $\mathfrak{X}_V \simeq \mathrm{Spf}(L[[X_0, X_1, \ldots, X_{n^2}]])$)

Preuve (standard) $\mathfrak{X}_V$ gouverné par $\mathrm{ad}\,V := \mathrm{End}_L(V) \circlearrowleft G_{\mathbb{Q}_p}$.

$\mathfrak{X}_V(L[\varepsilon]) = H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad}V)$ et $H^2(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad}V) = H^0(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad}V(1)) = 0 \Longrightarrow \mathfrak{X}_V$ f. lisse

on conclut par | Mazur Schlessinger que $\mathfrak{X}_V$ pro-rep. car $\mathrm{ad}V^{G_{\mathbb{Q}_p}} = L$, et la dim vient de la car. d'Euler (Tat

car $H^2 = 0$ par hyp : $\dim H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad}V) = \dim \mathrm{ad}V + \dim H^0 \mathrm{ad}V = n^2+1$ ■

II. Foncteurs de déformations triangulines

Ces foncteurs seront définis en terme de $D := D_{rig}(V)$, ce qui nous oblige à quelques sorties sur les déf. des (φ,Γ)-modules

Préliminaires :

- Si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, "l'anneau de Robba à coeff dans A" est $\mathcal{R}_A := \mathcal{R}_L \otimes_L A$.
- Un (φ,Γ)-module $/\mathcal{R}_A$ est un (φ,Γ)-module $D_A/\mathcal{R}_L$ + $\circlearrowleft A$ commute à $\mathcal{R}_L, \varphi, \Gamma$ et telle que D_A libre sur $\mathcal{R}_A$ ($\Leftarrow D_A$ libre sur A en fait)
- On vérifie qu'un (φ,Γ)-module rg 1 sur $\mathcal{R}_A \simeq \mathcal{R}_A(\delta)$, $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ car. cont, unique
- Un (φ,Γ)-module $/\mathcal{R}_A$ est dit A-triangulaire, s'il admet une A-triangulation :
$D_0 = 0 \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n = D$ où D_i ss (φ,Γ)-mod $/\mathcal{R}_A$ de rg i, facteur direct comme $\mathcal{R}_A$-mod.

Lemme Drig induit une bij. naturelle $\forall A$

$$\mathcal{X}_V(A) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} D_A \ (\varphi,\Gamma)\text{-modules} / R_A \\ + \ D_A \otimes_A L \xrightarrow[(\varphi,\Gamma)]{\sim} D \end{array} \right\} / \simeq \quad \text{où } D = \mathrm{Drig}(V)$$

"déformer V $\Leftrightarrow$ déformer D"

Preuve: équivalence de Fontaine, Colmez-Cherbonnier, Kedlaya + le fait qu'une extension entre deux (φ,Γ)-modules étales est étale, que l'on déduit des travaux de Kedlaya
($\Rightarrow D_A$ tjrs étale)

Définition Supposons V cristalline et fixons $\mathcal{F}$ un raff. de V, ou ce qui est équivalent une triangulation $\mathcal{T}$ de D (cf (V)). On définit $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$

$$\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(A) = \{ V_A \in \mathcal{X}_V(A) + \text{une triangulation de } \mathrm{Drig}(V_A) \text{ relevant } \mathcal{T} \} / \simeq$$

(Ex: si V tot. réductible ordinaire et $\mathcal{F}$ ~~raffinement ordinaire~~ $\Rightarrow$ déformations réductibles ...)

Théorème (Bell-Ch) Supposons $\mathcal{F}$ non critique, $\varphi_i\varphi_j^{-1} \neq 1, p$ $\forall i \neq j$, $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V) = L$. Alors:

(i) $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$ sous foncteur de $\mathcal{X}_V$, prorep. f. lisse dim $\frac{n(n+1)}{2} + 1$

(ii) $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}} \supset \mathcal{X}_{V,\mathrm{cris}}$ le foncteur des déf. cristallines de V (i.e. de V_A cristallines)

(iii) Il existe une s. exacte nat. $0 \to \mathcal{X}_{V,\mathrm{cris}}(L[\varepsilon]) \xrightarrow{c} \mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(L[\varepsilon]) \xrightarrow{\text{HT-Sen}} L^n \to 0$

"une déf. $\mathcal{F}$-trianguline est cristalline $\Leftrightarrow$ HT"

$D_{L[\varepsilon]} \rightsquigarrow \delta_i : \mathbb{Q}_p^\times \to L[\varepsilon]^\times \longmapsto \left(-\frac{\partial \delta_i}{\partial \gamma}\Big|_{\gamma=1}\right)$

Esquisse preuve:

(i) Sous les hyp., $\mathcal{X}_V$ prorep., et $\varphi_i \neq \varphi_j$ $\forall i \neq j$ $\xRightarrow{\text{boulot}}$ $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$ ss foncteur + relative pro-rep. $\Rightarrow$ représentabilité.

$\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$ est en fait gouverné par le (φ,Γ)-module suivant:

le R_L-module $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(D) = \{ u \in \mathrm{End}_{R_L}(D),\ u(D_i) \subset D_i \}$ a une structure nat. de (φ,Γ)-module, son rang est $\frac{n(n+1)}{2}$. ($\mathcal{T} = (D_i)$ triang. de D ass. à $\mathcal{F}$)

ie: $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(L[\varepsilon]) = H^1_{(\varphi,\Gamma)}(\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(D))$ et $H^2_{(\varphi,\Gamma)}(\cdot) = 0 \Rightarrow \mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$ f. lisse.

On conclut par les résultats sur la cohom. des (φ,Γ)-modules (Colmez, Liu).

(ii) Reporté ci-dessous. (iii) se déduit de (ii) par calcul direct de $\mathcal{X}_{V,\mathrm{cris}}(L[\varepsilon]) = H^1_f(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad} V) = n\frac{(n-1)}{2} + 1$ (Bloch-Kato) ou Colmez-Fontaine, ou encore (iii) se démontre directement par dévissage et monodromie p-adique (cf. notre preuve avec Joël)

(ii) repose sur le lemme suivant généralisant à A le critère de Colmez de Colmez

<u>Lemme</u> ("poids constant") Soit V_A rep. de $G_{\mathbb{Q}_p}$ libre $/A$, $\bar{V} := V_A \otimes_A L$. Supposons $\exists \lambda \in A^\times$ et $v \in D_{cris}(V_A)^{\varphi=\lambda}$ tels que
- Av libre rg 1
- le poids de $L\bar{v} \subset D_{cris}(\bar{V})$ est le plus petit poids entier de $\bar{V}$ (" saut filtration de Hodge) disons k.

Alors (i) $Av \subset D_{cris}(V_A)$ admet k pour unique saut filtr. Hodge. En particulier V_A admet k pour poids <u>constant</u>

(ii) $\exists$ $0 \to R_A(x^{-k}\lambda) \longrightarrow D_{rig}(V_A) \longrightarrow D' \to 0$ (D' libre rg $n-1$ $/R_A$)

La preuve = élaboration des méthodes de l'exposé d'avant, il faut faire attention aux complications apportées par les A (nilpotents). d'hypothèse sur $L\bar{v}$ nécessaire pour que le poids ne diminue pas ("on peut sortir d'un cran de la filtration par déf). En fait, on a besoin pour (ii) de raisonner par récurrence $\rightsquigarrow$ énoncer un lemme poids constant pour des V_A "non étale" (ie des φ,Γ-modules quelconques).

Une autre application du lemme + cor. à Kisin + un peu de travail

<u>Prop:</u> (X variété de Hecke $\supset Z$) Soit $z \in Z$ paramétrant $(\rho_z, \mathcal{F})$ avec ρ_z irréductible, et $\mathcal{F}$ raffinement régulier, <u>non critique</u>, de $V := \rho_z|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$.

Alors $\rho_{\hat{\mathcal{O}}_z}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \in \underline{\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}(\hat{\mathcal{O}}_z)}$ (ie $\rho_{\mathcal{O}_z} \otimes \hat{\mathcal{O}}_z|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est $\mathcal{F}$-trianguline)

III <u>Comparaison des $\mathcal{X}_{V,\mathcal{F}}$</u>

Supposons dorénavant V cristalline à poids $k_1 < \dots < k_n$ $\neq$, v. propres frob $\varphi_i \varphi_j^{-1} \neq 1, p$ si $i \neq j$ et $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V) = L$. On dira que V <u>générique</u> si tous ces $n!$ raffinements sont non critiques

On pose $t_* = \mathcal{X}_{V,*}(L[\varepsilon])$

<u>Situation</u>

$$t_{cris} \overset{n}{\subset} t_{\mathcal{F}} \subset t \quad \forall \mathcal{F}$$

(dim n sur l'ensemble : $\frac{n(n+1)}{2}$)

pb: espace eng. par les $t_{\mathcal{F}}$?

<u>dim:</u> $\frac{n(n-1)}{2}+1$ $\quad$ $\frac{n(n+1)}{2}+1$ $\quad$ n^2+1

Théorème Supposons V générique, Alors $t = \sum_{\mathcal{F}} t_{\mathcal{F}}$. "toute déformation de V à $L[\varepsilon]$ est C.L. de déf. triang."

Preuve (Esquisse) On introduit un foncteur de déformations "mirabolines" : Soit ϕ op. de Frob,

$$\mathcal{X}_{V,\phi}(A) = \left\{ V_A \in \mathcal{X}_V(A) + R_A\text{-}(\varphi,\Gamma)\text{-droite} \subset D_{rig}(V_A) \text{ relevant } \mathcal{E}(x^{-k_1}\phi) \text{ et de poids constants} \right\} \overset{\text{"poids cst"}}{=} \left\{ V_A \in \mathcal{X}_V(A),\ \exists \tilde{\phi} \in A^\times \text{ relevant } \phi \text{ tel que } D_{cris}(V_A)^{\phi=\tilde{\phi}} \text{ libre rg } 1 \right\}$$

On vérifie que $\mathcal{X}_{V,\phi} \overset{ss f}{\subset} \mathcal{X}_V$, prorep, f lisse dim $\left(\boxed{}\right)$ $n^2-(n-1)-1+1 = n^2-n+1$

Lemme Soit $\mathcal{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et $\phi = \varphi_n$, alors $t = t_{\mathcal{F}} + t_\phi$. $\quad (t_\phi = \mathcal{X}_{V,\phi}(L[\varepsilon]))$

En effet, théorème 11 + dimension $\Rightarrow$ il faut voir que $t_{\mathcal{F}} \cap t_\phi = t_{cris}$, et il suffit même de montrer que $t_{\mathcal{F}} \cap t_\phi \subset t_{HT}$. Mais $\forall i = 1 \dots n-1$, on voit que si $D_\varepsilon \in t_{\mathcal{F}} \cap t_\phi$

$$D_{cris}\left(D_\varepsilon / D_{\varepsilon,i}\right)^{\varphi=\tilde{\phi}} = \left((D_\varepsilon/D_{\varepsilon,i})\left[\tfrac{1}{t}\right]\right)^{\Gamma,\varphi=\tilde{\phi}} \text{ libre rg } 1.$$

Poids constant $\Rightarrow$ le plus petit poids de est cst, i.e. k_{i+1} $\Rightarrow$ $\forall i$ $\underline{k_i \text{ cst.}}$ ∎

On finit la preuve par récurrence sur n, là encore cela nécessite d'étendre les énoncés aux (φ,Γ)-module non étales. ∎

On a montré en fait

Théorème' Supposons seulement que V a un raff non critique $\mathcal{F}_0$ / $\forall i = 1 \dots n-1$ $\mathcal{F}_i := (i,n)\mathcal{F}_{i-1}$ est non critique, alors $t = \sum_{i=0}^{n-1} t_{\mathcal{F}_i}$

Nous en aurons besoin en dim 3.

Prop: Supposons seulement V irred, de dim 3. Alors

(i) 4 raffinements au moins de V sont non critiques

(ii) $t = \sum_{\mathcal{F} \text{ non crit.}} t_{\mathcal{F}}$

En effet, le (i) est un exercice utilisant la faible admissibilité et (ii) se déduit de (i) et du théorème' appliqué à V ou V^* pour trois des 4 raff non critiques.

(VII) Applications globales à la densité Zariski des points modulaires

Soit $E/\mathbb{Q}$ quad. imaginaire, $p = v\bar{v}$ impair déc. ds E, S ens. fini de premiers $\ni p$, disc E

Soit $\bar{\rho} : G_{E,S} \longrightarrow GL_3(\mathbb{F}_q)$ cont, abs irred, et telle que $\bar{\rho}^{*,c} \simeq \bar{\rho}(2)$

$q = p^{\alpha}$

<u>Modularité</u> Soit $U(3)/\mathbb{Q}$ le groupe unitaire déf attaché à $E/\mathbb{Q}$ et $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2$ (q.depl à ttes places finies). $\bar{\rho}$ modulaire $:\Leftrightarrow$ $\exists\, \pi$ aut. de $U(3)/\mathbb{Q}$ non ram hors de $S-\{p\}$ telle que $\bar{\rho}_\pi \simeq \bar{\rho}$. <u>Conjecture</u> tout $\bar{\rho}$ comme plus haut est modulaire en ce sens.

<u>Exemple</u> $A/\mathbb{Q}$ courbe elliptique non CM bonne red hors de $S-\{p\}$, $\bar{\rho} := \mathrm{Sym}^2 A[p]^* |_{G_E}$ convient. modulaire par Wiles et coll, Gelbart-Jacquet, Rogawski

Nous allons étudier les déformations d'un tel $\bar{\rho}$ à la manière du cours (I) en dim 2.

$$F(A) = \left\{ \rho_A : G_{E,S} \xrightarrow[\text{cont}]{} GL_3(A),\ \rho_A \otimes \mathbb{F}_q = \bar{\rho},\ \rho_A^{*,c} \simeq \rho_A(2) \right\} / \simeq$$

A : local fini $A/m_A \simeq \mathbb{F}_q$

F pro-représentable par $R(\bar{\rho})$, $W(\mathbb{F}_q)$-alg locale noeth complète. F est gouverné par une représentation "ad $\tilde{\rho}$" de $G_{\mathbb{Q},S}$, et on fera l'hypothèse simplificatrice

(H) $H^2(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho}) = 0$. (il y a une variante $p=2$)

<u>Lemme</u> (H) $\Rightarrow$ $R(\bar{\rho}) \simeq W(\mathbb{F}_q)[[t_1, \dots, t_6]]$ ($6 = \frac{n(n+1)}{2}$, $n=3$). En particulier, sa fibre générique $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ est une boule ouverte unité dim 6 / $L_0 = W(\mathbb{F}_q)[\frac{1}{p}]$

<u>preuve</u>: On pose $\mathcal{G} = GL_3(\mathbb{F}_q) \rtimes \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, $cgc^{-1} := {}^t g^{-1}$ si $g \in GL_3(\mathbb{F}_q)$

On vérifie que $\bar{\rho}(1)$ s'étend en un morphisme $\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathcal{G}$ "admissible"

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q},S} \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[dr] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ & \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

ad $\tilde{\rho}$:= représentation adjointe $\tilde{\rho}$ sur $M_3(\mathbb{F}_q)$.

On vérifie que $F(\mathbb{F}_q[\varepsilon]) \simeq H^1(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho})$, (H) $\Rightarrow$ F f. lisse.

car Euler $\Rightarrow$ dim " $=$ dim ad $\tilde{\rho}$ $-$ dim $H^0(G_{\mathbb{R}}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho}) = 9 - 3 = 6$ ∎

(en fait $H^0(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho}) = 0$!)

ad $\tilde{\rho}(c)$: $X \mapsto -A\,{}^tX\,{}^tA$ où A sym. ($p \neq 2$)

Un point $x \in \mathfrak{X}(\bar\rho)$ sera dit modulaire si $\rho_x \simeq \rho_\pi$ π rep aut de $U(3)$ non ram hors $S-\{p\}$

<u>Théorème</u> Supposons $\bar\rho$ modulaire et (H) vérifiée, alors les points modulaires sont Zariski-denses dans $\mathfrak{X}(\bar\rho)$.

<u>Exemple</u> $A_{/\mathbb{Q}}$: $y^2+y=x^3+x^2+x$ c ell conducteur 19 $(\sim X_0(19))$, $\begin{cases} E = \mathbb{Q}(\sqrt{-19}) \\ p=5,\ S=\{19, \end{cases}$

$\bar\rho = \mathrm{Sym}^2 A[p]^\times_{|G_E}$, $\mathrm{ad}\,\tilde\rho = \mathrm{Sym}^2 A[p]^*(1) \oplus \varepsilon_{E/\mathbb{Q}} \oplus \varepsilon_{E/\mathbb{Q}} \mathrm{Sym}^4 A[p]^*(2)$

On peut montrer (H) satisfait. (Poitou-Tate, Flach, nb de classes avec Pari)

Preuve du théorème. Outil principal variété de Hecke $X_{/\mathbb{Q}_p}$ de $U(3)$ niveau $K = K_p \times K_{S,p} \times K$ (max. ; assez petit ; hyp max)

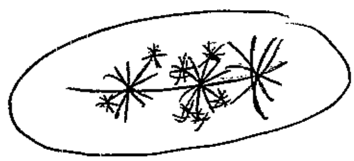
Le lemme suivant est formel (arguments de pseudo rep). $X_{L_0} = X \times_{\mathbb{Q}_p} L_0$

<u>Lemme 1</u> : $X(\bar\rho) := \{ x \in X(\bar{L_0}) \ / \ \bar\rho_x \simeq \bar\rho \}$ est un ouvert fermé rigide de X, non vide (K assez petit)

De plus, il existe un morphisme analytique can: $X(\bar\rho) \longrightarrow \mathfrak{X}(\bar\rho)$.
$x \longmapsto \rho_x$

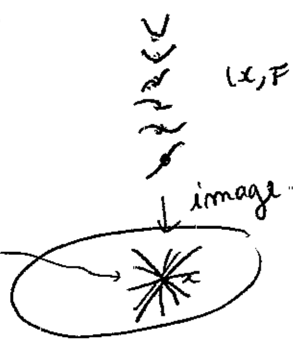
L'image de ce morphisme est la <u>fougère infinie</u> (définition) dans $\mathfrak{X}(\bar\rho)$.

$\mathfrak{X}(\bar\rho)$ dim 6 alors que $X(\bar\rho)$ dim 3



On va montrer qu'elle est Z dense

<u>Rmq</u>: L'application induite $X(\bar\rho) \longrightarrow \mathfrak{X}(\bar\rho) \times \mathbb{G}_m^3$, $x \longmapsto (\rho_x, (F_1(x), F_2(x), F_3(x)))$ est un morphisme fini par les propriétés de X. Cela démontre en particulier l'analogue du second théorème de l'introduction en dim 3 : "l'adhérence Zariski dans $\mathfrak{X}(\bar\rho) \times \mathbb{G}_m^3$ des points modulaires (ρ_π, F) raffinés est d'équi-dimension 3". En effet, un morphisme fini est d'image fermée.
(raff. normalisé)



Au voisinage d'un point modulaire $x = \rho_\pi$

Lemme 2. Soit $z \in Z \cap X(\bar\rho)$ paramétrant $(\rho_z, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est un raff. non critique, régulier, de $V := \rho_{z|G_{\mathbb{Q}_p}}$. Alors $X(\bar\rho)$ est lisse en z et mieux $\kappa : X(\bar\rho) \longrightarrow W$ est étale (isom local) en z.

Preuve. Cela découle de la proposition de classicité infinitésimale du dernier cours + de la multiplicité 1 connue pour les rep. automorphes de $U(3)$ (Rogawski) (ici, les ρ_π / $\bar\rho_\pi = \bar\rho$ sont en fait nécessairement "stable tempérée") ∎

Corollaire la composée $(L :$ corps coeff de $\rho_z)$

$$\begin{array}{c} \mathcal{X}_{\rho_z}(L[\varepsilon]) \ (\text{def } \text{Ladentu}) \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \end{array}$$

$$T_z X(\bar\rho) \longrightarrow T_{\rho_z} \mathcal{X}(\bar\rho) \xrightarrow{\ |G_{\mathbb{Q}_p}\ } \underset{V}{\mathcal{X}}(L[\varepsilon]) \xrightarrow{\ \text{Sen}\ } L^3$$

injective / surjective

$= d\kappa \quad \simeq.$

Notion de bon point. **Déf.** ρ_π bon si $\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ est irréductible, à vp Frob 2 à 2 $\neq$.

Lemme 3. Supposons ρ_π bon, alors on a une surjection naturelle :

$$\bigoplus_{\substack{z_{\mathcal{F}} = (\rho_\pi, \mathcal{F}) \\ \in X(\bar\rho)}} T_{z_{\mathcal{F}}}(X(\bar\rho)) \xrightarrow{\ \text{can}\ } T_{\rho_\pi}(\mathcal{X}(\bar\rho))$$

Preuve (Lemme clé) Considérons la flèche naturelle $\quad \underset{\|}{t}$ comme au (VI)

$$T_{\rho_\pi}(\mathcal{X}(\bar\rho)) = \mathcal{X}_{\rho_\pi}(L[\varepsilon]) \xrightarrow{\ |G_{\mathbb{Q}_p}\ } \mathcal{X}_{\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}}(L[\varepsilon]) \longrightarrow t/t_{\text{tors}}$$

D'après nos calculs de dim, c'est une appl. linéaire entre 2 espaces de dim 6 ! $\left(\overset{\shortparallel}{\tfrac{n(n+1)}{2}}\right)$

(globaux et locaux)

Il suffit de voir que la composée de l'appl. du lemme par celle-là est donc surjective.

Supposons $\mathcal{F}$ non critique et regardons $T_{z_{\mathcal{F}}}(X(\bar\rho)) \longrightarrow t/t_{\text{tors}}$

La prop (VI) II assure que l'image tombe dans $t_{\mathcal{F}}/t_{\text{tors}}$ car $\rho_{\hat{\mathcal{O}}_{z}|G_{\mathbb{Q}_p}}$ $\mathcal{F}$-trianguline.

Mais le lemme 2 dit que l'image est de dim au moins 3 $\Rightarrow$ l'image est tout $t_{\mathcal{F}}/t_{\text{tors}}$.

Comme ρ_π irréductible, les $6=3!$ raffinements possible de $\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ sont accessible et la prop. VI III dit que 4 d'entre eux sont non critiques et même que

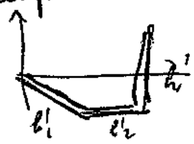
$$\sum_{F \text{ non critique}} t_F = t \quad , \text{ cela conclut ! } \blacksquare$$

Il ne reste qu'à vérifier qu'il y a assez de bons points dans $X(\bar\rho)$.

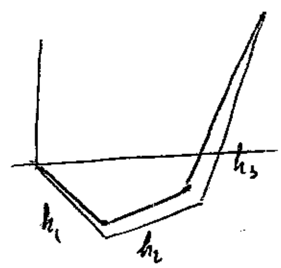
Lemme 4 ⓐ Il existe au moins un $z=(\rho_\pi, F)\in Z\cap X(\bar\rho)$ bon, ie | ρ_π bon.

ⓑ De plus, si z est bon, il admet un vois. ouvert aff Ω dans $X(\bar\rho)$ contenant un ensemble Zariski-dense de z' bons. (mieux, les bons z' s'accumulent en z)

Prouvons d'abord que le lemme 4 $\Longrightarrow$ théorème. Considérons l'adhérence Zariski $A \subset \mathcal{X}(\bar\rho)$ des ρ_π bons. ~~A est non vide~~ $A\neq\emptyset$ par lemme 4ⓐ. Considérons un $a_0\in A$ bon, mod qui est lisse, il y en a toujours par définition. Il faut voir qu'en un tel point $T_{a_0}(A)=T(\mathcal{X})_{a_0}$ mais cela découle du lemme 4 ⓑ et du lemme 3 ! $\blacksquare$

Prouvons enfin le lemme 4. Remarquons tout d'abord que $\{z\in Z,\ \rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ a des vp Frob 2 à 2 $\neq\} =: Z^{reg}$ est très Zariski-dense dans X. En effet, cela découle des observations faites au IV III, on peut même remplacer la cond. en "les valuations de vp de Frob sont 2 à 2 $\neq$" ( $v(\varphi_1)=h_1$)

Comme d'autre ~~part~~ part la condition "$\rho_{\pi|G_{\mathbb{Q}_p}}$ irréductible" est un ouvert Zariski de $X(\bar\rho)$, il suffit de montrer ⓐ pour avoir ⓑ. Pour vérifier ⓐ, on procède comme expliqué dans IV III : on part d'un $z\in Z^{\cap X(\bar\rho)}$ quelconque puis on le déforme en 2 coups en des z' / $\rho_{z'|G_{\mathbb{Q}_p}}$



"on crée des cassures ds le pol Newton" de sorte que P_{Newt} et P_{Hodge} ne se touchent qu'aux extrémités. C'est toujours possible ! $\blacksquare$