(IV) Représentations galoisiennes attachées aux rep. automorphes des groupes unitaires et à leurs variétés de Hecke

$G/_{\mathbb{Q}}$ groupe unitaire défini à n variables associé à $E/_{\mathbb{Q}}$ quadratique imaginaire

On fixe p et $\overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{Q}_p}$

1. Cas "classique"

Soit Π une rep. automorphe de G

Conjecture (Langlands, Arthur) Il existe une unique rep. semisimple continue

$$\rho_\pi : G_E = \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \longrightarrow Gl_n(\overline{\mathbb{Q}_p}) \quad \text{telle que}$$

ⓐ ρ_π non ramifiée aux places v au dessous desquelles π et G sont non ramifiés,

ⓑ Si $\ell = v\bar{v}$, $\ell \neq p$ et $G(\mathbb{Q}_\ell) \underset{v}{\xrightarrow{\sim}} Gl_n(\mathbb{Q}_\ell)$, $\quad (\rho_\pi | G_{E_v})^{\phi\text{-}ss} \simeq L(\pi_v |\,|^{\frac{1-n}{2}})$

(Bien défini par Harris-Taylor. $\pi_v = \pi_\ell$ vue comme $Gl_n(\mathbb{Q}_\ell)$, E_v)

ⓒ Si $p = v\bar{v}$ ______________, et si π_p non ramifiée, alors $\rho_\pi | G_{E_v}$ cristalline

- de poids de HT $k_1 < \dots < k_n$ où $\pi_\infty \underset{v,\iota,\iota_p}{\simeq} W_{\underline{k}}$ et $\underline{k} = (k_1 < \dots < k_n)$
- le pol car du φ sur $D_{cris}(\rho_\pi | G_{E_v})$ est $\det(T - L(\pi_v|\,|^{\frac{1-n}{2}})) \in \overline{\mathbb{Q}_p}[T]$

(convention : HT de $\mathbb{Q}_p(1) = -1$)

Remarques $\rho_\pi^{*,c} \simeq \rho_\pi(n-1)$ où $\langle c \rangle = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ par ⓑ. Tous les types de réductibilité sont possibles pour ρ_π (endoscopie), m̂ avec π tempérée. ρ_π sans multiplicité par ⓒ et définie sur son corps des traces. Les fibres de $\pi \longrightarrow \rho_\pi$ ("A-paquets automorphes") peuvent être infinis - mais mult 1 faible conjecturée. ⓑ aux places non décomposées est plus subtil. Avec mes conventions, si $\pi = \mathbb{1}$ trivial on a

$$\rho_\pi = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(-1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_p(1-n)$$

Théorème C'est vrai si
(i) $n \leq 3$ (Blasius - Rogawski, ...)
(ii) si $\exists\, \ell \;/\; G(\mathbb{Q}_\ell) \simeq \Delta^\times$ Δ algèbre à division $/\mathbb{Q}_\ell$
(Clozel-Kottwitz-Harris-Taylor, Labesse, Vignéras, Badulescu, ...)

Dans ce qui suit on supposera toujours (i) ou (ii). (hypothèse sur G)

II. Cas p-adique et en familles

$p = v\bar{v}$, $G(\mathbb{Q}_p) \underset{v}{\simeq} Gl_n(\mathbb{Q}_p)$, on fixe $S \ni p$ et $K = K_p \times K_{S-\{p\}} \times K^S$ comme dans (II)(III) $\left(K_p \subset Gl_n(\mathbb{Z}_p)\right)$

On dispose de la variété de Hecke p-adique de niveau K : $(X, \psi, (K, (F_i)), Z)$

Rappel : $z \in Z \leftrightarrow (\pi(z), R)$, $\pi(z)$ aut niveau K, R raff accessible de $\pi_p(z)|\cdot|$

Proposition $\exists !$ fonction continue $T : G_{E,S} \longrightarrow \mathcal{O}(X)^{\leq 1}$ telle que pour tout

z dans Z, $T_z = \text{trace } \rho_{\pi(z)}$ ($T_x :=$ évaluation en x de T)

De plus, T est un pseudocaractère de dim n de $G_{E,S}$, et $T(cg^{-1}c) = T(g)\,\chi(g)^{n-1}$ $\forall g \in$

Preuve Munissons $\mathcal{O}(X)$ de la top. de la convergence uniforme sur tout ouvert affinoïde ($\mathbb{Q}_p$-alg Fréchet) - alors $\mathcal{O}(X)^{\leq 1}$ en est un ss-ensemble compact. En effet, $X = \underset{\text{adm} \uparrow}{\bigcup} X_n$ avec $X_n \subset X_{n+1}$ ouverts aff. et $\mathcal{O}(X_{n+1}) \longrightarrow \mathcal{O}(X_n)$ compact. Cela vient de ce que $\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m^n$ a cette propriété et que X fini dessus. (NB. si Ω aff., $\mathcal{O}(\Omega)^{\leq 1}$ non compact)

$$\mu : \mathcal{O}(X)^{\leq 1} \xrightarrow{\text{éval}} \prod_{z \in Z} \overline{\mathbb{Q}}_p \quad \Rightarrow \text{homéo sur son image (top. produit)}$$

et $T'(g) := (\text{tr } \rho_{\pi(z)})_z$ tombe dans l'image de μ car c'est vrai pour $T'(\text{Frob}_w)$ où $\ell = ww' \notin S$: $T'(\text{Frob}_w) = \mu\psi([K^S(\ell \ \ddots)K^S])$ ■

$\Rightarrow$ on pose alors $T = \mu^{-1} \circ T'$, QED par Cebotarev.

La théorie des pseudocaractères implique alors (Procesi, Taylor, Nyssen, Rouquier, Bell-Ch) formellement

Corollaire (i) $\forall x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (i.e. paramétrant une forme aut p-adique propre peut-être finie) $\exists !$ $\rho_x : G_{E,S} \longrightarrow Gl_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ semisimple (cont) telle que trace $\rho_x = T_x$.

(elle satisfait une variante de (b), affaiblie sur la monodromie)

(ii) Si $z \in Z$, il existe $\Omega \subset X$ voisin ouvert aff. de z, et une représentation continue $\rho_\Omega : G_{E,S} \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{O}(\Omega)}(M_\Omega)$ de trace $T|_\Omega$

M_Ω : $\mathcal{O}(\Omega)$-m tf sans torsion gén libre rang n. (non unique en gén)

(iii) Si ρ_z est de plus irréd, on peut choisir M_Ω libre rg n, unique à isom près si Ω assez petit, d'où un canonique $\rho : G_{E,S} \longrightarrow Gl_n(\mathcal{O}_z)$ de trace T

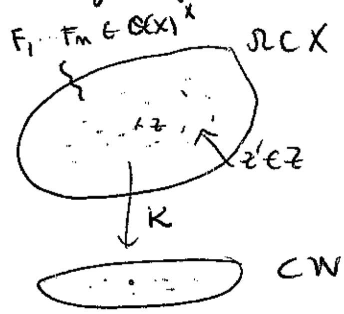
$\mathcal{O}_z$: anneau local rigide en z

Remarque : Dans (ii) on peut éclater Ω pour que le trans. strict de $M(\Omega) \rightsquigarrow$ libre.
Plus généralement on peut altérer X pour avoir une famille de rep. de trace T (non canonique).

En $\ell \neq p$, ces représentations varient simplement ("version en famille de monodromie ℓ-adique tomale")
en p c'est nettement plus fin.

III. Restriction à $G_{\mathbb{Q}_p}$ (on identifie définitivement E_v à $\mathbb{Q}_p$, $G_{E_v} = G_{\mathbb{Q}_p}$)

Analysons ce qui se passe au voisinage d'un $z \in Z$ dans X



$\rho_z | G_{\mathbb{Q}_p}$ est d'après le 1 (telle que) cristalline

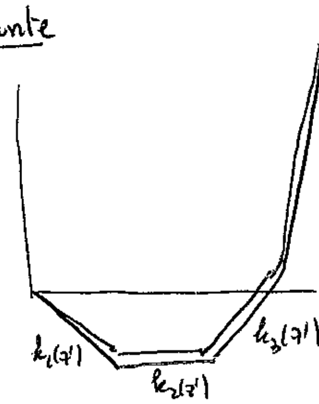
- $k(z) = (k_1 < \dots < k_n)$ poids HT
- vp Frob. cristallin sont les $(F_1(z)p^{k_1}, \dots, F_n(z)p^{k_n})$ dans l'ordre défini par le raffinement (acc de $\pi_p(z)|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ défini par z

1. Les poids bougent beaucoup.

$\forall\, c > 0$, $Z_c = \{z \in Z, |k_{i+1} - k_i| \geq c\}$ (est) Zariski dense ds X (et Ω)

2. Les F_i sont ds $\mathcal{O}(X)^\times$ donc de valuation loc. constante

Donc pour z' ds Z_c assez proche $\rightsquigarrow$
$c \gg 0$



"les polygones de Hodge et Newton coïncident "presque" "

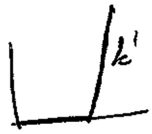
C'est une première observation.

(accessible)

3. Si Π de niveau K est fixée, on peut lui associer autant de $z \in Z$ que de raff. de $\pi_p|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ ($n!$ génériquement). En général, les déformations associées seront très différentes et notre objectif sera de les comprendre assez bien pour pouvoir les comparer.

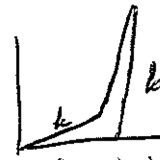
Exemple simple mais déjà intéressant : $n = 2$, π a poids $0 < k$, $L(\pi_p|\cdot|^{-1/2}) = \{\alpha, \beta\}$ $v(\alpha) = 0$, $v(\beta) = k$
cas ordinaire

Un point z' de poids $(0 < k')$ voisin de z : si $z \Leftrightarrow (\alpha, \beta)$



$\rho_{z'}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est alors réductible),

si $z \to (\beta, \alpha)$



$\rho_{z'}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est irréductible !

Rmq : Ce genre d'observations permet de montrer que tout ρ_π se déforme irréductiblement en 2 familles bien choisies (Bell-Ch). Notez que les π' voisins de π construits ont des propriétés locales intéressantes, peut-être difficiles à construire autrement !

Les résultats généraux sur les familles p-adiques de rep p-adiques dont nous disposons sont les suivants (Sen, Kisin)

Poids Ecrivons $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, $\kappa_i : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathcal{O}(X)^\times$ et posons $k_i := \frac{d\kappa_i}{d\gamma}\Big|_{\gamma=1} \in \mathcal{O}(X)$

Prop (Sen) $\forall x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, $\rho_x|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ a pour poids de HT généralisés les $k_i(x)$.

En particulier, ρ_x HT en p $\Rightarrow$ $k_i(x) \in \mathbb{Z}$ $\forall i$, et la plupart des points x sont donc non géom (non HT.)

continuité des v.p du Frob cristallin

Contexte abstrait. Soit $Y/_{\mathbb{Q}_p}$ espace rigide réduit et séparé, $F \in \mathcal{O}(Y)^\times$, M un $\mathcal{O}_Y$-module loc. libre de rang n + ∂ $G_{\mathbb{Q}_p}$ $\mathcal{O}_Y$-lin continue, et $Z \subset Y(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (Zarski-dense)/i

ⓐ $\forall z \in Z$, M_z cristalline et $D_{cris}(M_z)^{\varphi = F(z)} \neq 0$,

ⓑ —— 0 est un poids de HT de M_z et $\forall c > 0$ $Z_c = \{z \in Z$, les autres poids sont $> c\}$ est Zarski-dense ds X.

Alors Prop (Kisin) Si $y \in Y$,

i) $Fil^0 D_{cris}(M_y)^{\varphi = F(y)} \neq 0$.

ii) Si $D_{cris}(M_y^{ss})^{\varphi = F(y)}$ est de dim 1, $\forall I \subset \mathcal{O}_y$ idéal de codim finie on a $Fil^0 D_{cris}(M \otimes \mathcal{O}_y/I)^{\varphi = F}$ libre de rang 1 / $\mathcal{O}_y/I$

Remarque C'est un exercice si $\forall y \in Y, v(F(y)) = 0$ car pour z dans Z_c, on voit que (M_z^I) non trivial, le Frob y admettant $F(z)$ pour v. propre. La proposition en général est l'analogue correct de cet exercice

Avant d'énoncer le corollaire à X, on définit un raffinement régulier.

Déf. $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ raff de $\pi_p|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ régulier si $\forall i$, $\varphi_1 \dots \varphi_i$ v.p simple de $\Lambda^i L(\pi_p|\cdot|^{\frac{1-n}{2}})$.

Corollaire i) $\forall x \in X$, $\forall i \in \{1 \dots n\}$ $Fil^0 D_{cris}(\Lambda^i \rho_x (\kappa_1^{-1} \dots \kappa_i(x)))^{\varphi = F_1(x) \dots F_i(x)} \neq 0$

ii) Si $z \in Z$, ρ_z irréductible et si le raff paramétré R_z de $\pi_p(z)$ est régulier, alors $D_{cris}(\Lambda^i_{\mathcal{O}_z} \rho (\kappa_1 \dots \kappa_i) \otimes \mathcal{O}_z/I)^{\varphi = F_1 \dots F_i}$ libre de rg 1 sur $\mathcal{O}_z/I$ $\forall I \subset \mathcal{O}_z$ idéal codim finie.

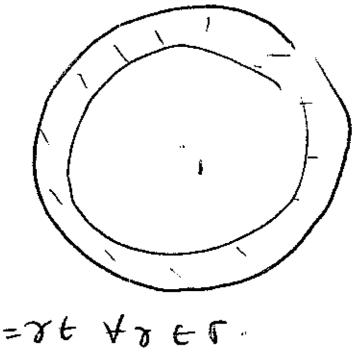
Rmque : Quand ρ_z réductible, par exemple z endoscopique, on a étendu ce résultat avec Bellaïche (ainsi que Prop (Kisin) dans le cas M non loc. libre), c'est plus complexe combinatoirement.

(V) Représentations triangulines

Ainsi que l'a vu Colmez, la propriété $D_{cris}(V)^{\varphi=\lambda} \neq 0$ s'interprète particulièrement bien en terme du (φ,Γ)-module Robba attaché à V. Cette traduction nous permettra comprendre parfaitement les propriétés des déformations des ρ_π portées par X, ultimement.

1 (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba

$L/\mathbb{Q}_p$ est finie, $\mathcal{R}_L = \{ f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-1)^n,\ f$ converge sur $r_f \le |z-1| < 1 \}$, $a_n \in L$



$\mathcal{R}_L$ muni d'actions commutantes de φ et $\Gamma := \mathbb{Z}_p^\times$:

$\varphi(f)(z) = f(z^p)$ et $\gamma(f)(z) = f(z^\gamma)$ $\gamma \in \Gamma$

(Γ préserve les cercles concentriques et $z \mapsto z^p$ contracte vers 1)

On pose $t = \log(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$, $\varphi(t) = pt$ et $\gamma(t) = \gamma t$ $\forall \gamma \in \Gamma$.

Rmq: $\mathcal{R}_L$ domaine de Bézout étudié par Lazard (idéaux tf principaux, diviseurs, modules tf sans torsion sont libres, div. élémentaires). Si $I = (f) \subset \mathcal{R}_L$ idéal Γ-stable et $\mathcal{R}\varphi(I) = I$ alors $I = (t^n)$ $n \geq 0$.

Déf: Un (φ,Γ)-module$/\mathcal{R}_L$ est un $\mathcal{R}_L$-module libre de type fini + actions semi-linéaires φ et Γ qui commutent avec Γ continue et $\mathcal{R}_L\varphi(D) = D$.

L'intérêt de ces objets est qu'ils paramètrent toutes les rep. de $G_{\mathbb{Q}_p}$, et même plus !

Théorème (Fontaine, Cherbonnier-Colmez, Kedlaya) $\exists$ une $\otimes$-équivalence de catégorie

$$\begin{array}{ccc} V & \longmapsto & D_{rig}(V) \\ \mathrm{Rep}_L G_{\mathbb{Q}_p} & & (\varphi,\Gamma)\text{-mod étale} \end{array}$$ qui préserve le rang.

Rmq: Etale ne dépend que du φ-module sous-jacent. Kedlaya associe $n = [D:\mathcal{R}_L]$ pentes à ces φ-modules, dans $\mathbb{Q}$ (étale = pentes toutes nulles), et montre l'existence d'une filtration canonique par des sous φ-modules de gradués isoclines de pente strictement croissante ("à la Dieudonné-Manin"). La cat des (φ,Γ)-modules (non néc. étale) non abélienne, encore mal comprise, mais utile.

Il est possible de retrouver sur $D_{rig}(V)$ les invariants de Fontaine de V

Prop (Berger) $D_{cris}(V) \xrightarrow{\sim} \left(D_{rig}(V)[\frac{1}{t}]\right)^{\Gamma}$ $\circlearrowleft$ $L[\varphi]$-équivariant, de plus il y a une recette pour la filtration de Hodge

II. Les (φ,Γ)-modules de rang 1 et leurs extensions

Construction Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ un caractère continu $R_L(\delta) = \begin{cases} R_L e & R_L\text{-module} \\ \varphi(e) = \delta(p)e \\ \gamma(e) = \delta(\gamma)e. \ \forall \gamma \end{cases}$

Sa pente de Kedlaya est $v(\delta(p)) \in \mathbb{Q}$,

si c'est 0, δ s'étend en un caractère $\tilde{\delta} : G_{\mathbb{Q}_p} \to L^\times$ via cap de classes local.

Déf: $x : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ = inclusion, $\chi . \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ $\begin{cases} p \mapsto 1 \\ \chi_{|\mathbb{Z}_p^\times} = x_{|\mathbb{Z}_p^\times} \end{cases}$ ($\tilde{\chi}$ = cyclotomique)

Prop (Colmez) Tout (φ,Γ)-module de rang $1/R_L \simeq R_L(\delta)$ pour δ unique. De plus $\mathrm{Ext}_{(\varphi,\Gamma)}(R(\delta_2), R(\delta_1))$ est de dim $1/L$ sauf si $\delta_2\delta_1^{-1} = \left\{ \begin{matrix} x^{-i} \\ x^i\chi \end{matrix} \ i \in \mathbb{N} \right\}$ auquel cas dim 2.

$\Downarrow$

Définition - Un (φ,Γ)-module D est dit triangulaire si $\exists$ $D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n = D$ filtration (φ,Γ)-sous-modules D_i de rang i facteur direct comme R_L-module

- Une L-rep p-adique V est trianguline si $D_{rig}(V)$ triangulaire.

Colmez décrit alors l'espace des rep. triangulines de dim 2, du moins ponctuellement. Lien avec cond "à la Kisin"!

Prop: (Colmez) V une L-rep de $G_{\mathbb{Q}_p}$, $D = D_{rig}(V)$. Il existe $\chi, \lambda \in L^\times$ / $D_{cris}(V \otimes \chi)^{\varphi=\lambda} \neq 0$ ssi D contient un sous (φ,Γ)-mod saturé rg 1 (i.e. $\exists$ $0 \to R(\delta) \to D \to D' \to 0$) $\underset{\uparrow}{}$ (φ,Γ)-module

(En particulier $\Leftrightarrow$ V trianguline si $\dim V = 2$).

Preuve ($\Leftarrow$ sera évident, $\Rightarrow$ ops $\chi = 1$) Berger $\Rightarrow$ $\exists$ $v \neq 0 \in D[\frac{1}{t}]$ / $\begin{matrix} \varphi(v) = \lambda v \\ \gamma v = v \ \forall \gamma \end{matrix}$

Soit $s \in \mathbb{Z}$ / $w := t^{-s}v \in D$. L'idéal $I \subset R_L$ engendré par les coeff (coordonnées) de w dans une R_L-base de D fixée. Alors I Γ-stable et $R\varphi(I) = I$ donc $I = (t^n)$ par l'ex).

Ainsi on peut supp. $s/R_L t^{-s} v$ saturé dans D, puis $\exists$

$$0 \to R_L(\delta) \to D \to D' \to 0$$

$\delta = x^{-s}\varphi$; D' : (φ,Γ) module car sans torsion

Rmq: on peut voir que s est le saut de la filtration de Hodge sur $Lv \in D_{cris}(V)^{\varphi=\lambda}$.

Tableau On s'attend à ce que sur la variété de Hecke X :

(i) $\forall x \in X$, $\rho_x|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ trianguline, avec une triangulation naturelle.

(ii) Cette triangulation varie analytiquement sur X hors du lieu critique, où la situation est plus subtile

Le (i) découle de la prop précédente + corollaire à Kisin (i) quand x est générique.
Nous allons l'étudier plus précisément aux points dans Z dans ce qui suit, et définir "critique".
Nous nous intéresserons plus tard à (ii) au voisinage infinitésimal des points de Z.

Rmq: (i) colle avec l'intuition "triangulaire" du (IV) III.2, aussi avec la philosophie de Breuil.
série principale p-adique $\Leftrightarrow$ réductible$/\mathcal{R}_L$

III Triangulations des cristallines et raffinements

Soit V une L-rep cristalline de dim $n \geq 1$, $D_{cris}(V) \supset L[\varphi]$ + $(\mathrm{Fil}^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ filtration de Hodge.
dont les sauts sont les poids de HT de V

hypothèse bénigne pol. car. φ scindé dans $L[T]$

Définition (Mazur) Un raffinement de V est la donnée d'un drapeau complet de $D_{cris}(V)$

$$\mathcal{F}_0 = 0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \quad \subsetneq \mathcal{F}_i \subsetneq \subsetneq \mathcal{F}_n = D_{cris}(V)$$

par des sous espaces$/L$ φ-stables

(il en existe toujours) Un raffinement détermine deux ordres:

(i) Un ordre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ des valeurs propres de φ : $\det(T-\varphi|_{\mathcal{F}_j}) = \prod_{i\leq j}(T-\varphi_i)$
En retour, si φ_i distincts cela détermine $\mathcal{F}$: cela colle avec la définition "automorphe" déjà donnée au (I)

(ii) Un ordre $(s_1, \dots, s_n)$ des poids HT de V : $HT(\mathcal{F}_j) = (s_1, \dots, s_j)$

Soit $D = D_{rig}(V)$. On démontre la prop suivante en élaborant la preuve de la prop de Colmez (et la remarque qui l'a suivie) du II.

Proposition (Bell-Ch) L'application $(\mathcal{F}_i) \longmapsto (D_i = \mathcal{R}_L \mathcal{F}_i[\frac{1}{t}] \cap D)$ induit une bijection entre raffinements de V et triangulations de D, de réciproque $\mathcal{F}_i = (D_i[\frac{1}{t}])^{\Gamma}$.
sens par Berger
Dans cette bijection, $D_i/D_{i-1} = \mathcal{R}_L(\delta_i)$ avec $\delta_i = x^{-s_i}\varphi_i$.

Cor: toute cristalline est trianguline, de plusieurs façons en général, $n!$ génériquement.

<u>Déf.</u> (Bell-Ch) Supposons V a poids de HT distincts $k_1 < \cdots < k_n$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)$ un raff. de V.

ⓐ $\mathcal{F}$ est dit non critique si il est en position générale avec Fil^i Hodge, i.e si

$$\forall i \; , \quad \mathcal{F}_i \oplus \mathrm{Fil}^{k_i+1}_i D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V) \qquad (\Leftrightarrow s_i = k_i \;\forall i)$$

ⓑ $\mathcal{F}$ — numériquement non critique si $v(\varphi_1) < k_2$ et $\forall i \in \{2 \ldots n-1\}$ $v(\varphi_1 \cdots \varphi_i) < k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_{i+1}$

<u>Rmq.</u> – La faible admissibilité montre que "num. non critique" $\Rightarrow$ "non critique".

– ⓑ est la condition intervenant dans le critère de classicité.

<u>Exemple</u> V dim 2, poids $0 < k$, vp $\{\alpha, \beta\}$ avec disons $v(\alpha) \leq v(\beta)$ Alors tous les raff. de V sont non critiques sauf si V est <u>réductible et scindée</u> et $R = (\beta, \alpha)$. Les numériquement non critiques sont (α, β) si $v(\alpha) < k$.

Un exemple d'application de ces concepts est la prop. suivante, que l'on utilisera + tard:

<u>Prop.</u> Soit $z = (\psi_{\pi(z)}, \underline{k}, R) \in Z$ tel que R soit régulier et non critique, alors

$$S_{\underline{k}}(K)[\psi_{\pi(z)}] = S^{+}_{\underline{k}}(K)[\psi_{\pi(z)}]$$

($[\psi_{\pi(z)}]$ désigne l'espace <u>caractéristique</u> du caractère $\psi_{\pi(z)}$ de $\mathcal{H}^S[U^-]$)

("classicité infinitésimale")

<u>Preuve</u> Par la suite exacte ($\mathcal{H}^S$ equiv) $0 \to S_{\underline{k}}(K) \to S_{\underline{k},0}(K) \to \prod_{i=1}^{n-1} S_{s_i(\underline{k}),0}(K)$ il suffit de voir que $S_{s_i(\underline{k}),0}(K)[\psi_{\pi(z)}] = 0$. Ce serait évident si R numériquement non critique à cause des twists normalisant l'action de U^-. En général, si $S_{s_i(\underline{k}),0}(K)[\psi_{\pi(z)}] \neq 0$, Kisin ① montre que

$$\mathrm{Fil}^{k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_{i+1}} D_{\mathrm{dR}}(\Lambda^i \rho_{\pi(z)})^{\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_i} \neq 0$$

, absurde par hyp. R non critique et régularité de R ∎

<u>Rmq.</u> Si la multiplicité 1 ~~faible vaut pour le groupe G~~, K. isomorphisme en un tel z.
(plus précisément, il faudrait rajouter assez d'op. de Hecke dans S)

Dans la suite (et fin!) du cours nous verrons que les raffinements non critiques sont ceux qui admettent une théorie des déformations "raffinées" excellente.