(Gaëtan Chenevier) 1/11

Variétés de Hecke des groupes unitaires et représentations galoisiennes

1 Introduction : La "fougère infinie" de Gouvêa-Mazur

$p > 2$, $q = p^m$, soit $\bar\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_{\{\infty,p\}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_q)$ continue, abs irréductible et impaire ($\det \bar\rho(c) = -1$)

Exemples soit $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ propre, $f = q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \cdots \in \bar{\mathbb{Z}}[[q]]$

fixons $\bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$, Deligne : $\rho_f : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow GL_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ continue et $\mathrm{tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)) = a_\ell$ $\ell \neq p$ ($\uparrow$ geom)

ops à valeurs ds $\bar{\mathbb{Z}}_p$ $\rightsquigarrow$ $\bar\rho_f : \longrightarrow GL_2(\bar{\mathbb{F}}_p)$ résiduelle associée.

Conj Serre = thm Khare et Wintenberger : tout $\bar\rho$ est modulaire, i.e $\simeq \bar\rho_f$.
En général, une infinité de f vont convenir (quand k varie $\to \infty$) et vont être plus ou moins congrues mod p^m. Pour "mesurer" ces congruences on introduit l'anneau des déformations de $\bar\rho$, suivant Mazur

- le foncteur $F : A \longmapsto \{$"relèvements" $\rho_A : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \to GL_2(A)\} / \mathrm{conj}\ 1 + m_A M_2(A)$

A local fini, $A/m_A \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q$; i.e. $\rho_A \otimes A/m_A = \bar\rho$

(pro) est représentable par un anneau local complet noeth. à rés $\simeq \mathbb{F}_q$.

$$R(\bar\rho) \simeq W(\mathbb{F}_q)[[t_1 \cdots t_n]]/I$$

On fera l'hypothèse simplificatrice Hyp : F formellement lisse ($\Leftrightarrow R(\bar\rho)$ sans formell.)

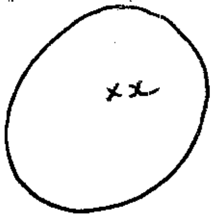
Dans ce cas, $R(\bar\rho) \simeq W(\mathbb{F}_q)[[t_1, t_2, t_3]]$.

(très fréquent (Mazur) ex : si $\bar\rho = \bar\rho_\Delta$ $\leftarrow$ Ramanujan, c'est le cas pour $p \geq 17$ et $\tau(p) \not\equiv 0$ (p) i.e. $p \leq 3.10^6$ et $p \neq 2411$

La fibre générique $\mathcal{X}(\bar\rho)$ de $R(\bar\rho)$ est alors une boule de dim 3 $/\mathbb{Q}_q$, ouverte rayon 1

$$\mathcal{X}(\bar\rho) = \{ (t_1, t_2, t_3),\ |t_i| < 1 \}$$

$\mathcal{X}(\bar\rho)$



$x \in \mathcal{X}(\bar\rho)$, la rep universelle s'évalue en x

$\rightsquigarrow \rho_x : G_{\mathbb{Q},S\cup\{p\}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_x)$ ($\mathcal{O}_x$ = entier d'une ext. finie de $\mathbb{Q}_p$ ← $W(\mathbb{F})$)

tq $\bar\rho_x \simeq \bar\rho$ et toutes ces rep. apparaissent ainsi.

Def x modulaire si $\rho_x \simeq \rho_f$ pour un certain $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$

quasi-mod $\simeq \rho_f \otimes \underset{\text{cyclot}}{\chi^m}$, $m \in \mathbb{Z}$

<u>Théorème</u> (Coleman, Gouvêa-Mazur) Les points quasi-modulaires sont Zariski-denses dans $\mathcal{X}(\bar\rho)$.

(Les corps de nombres (aussi) découpés par les ρ_f et ρ^{univ} sont les mêmes. Tout ρ_A est ss quotient d'une somme finie de ρ_{f_i})

<u>Outil essentiel</u> familles p-adiques de formes modulaires (Hida, Coleman)

Soit (f,α) où $f = q + a_2 q^2 + \dots \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ forme propre, et α racine de $X^2 - a_p X + p^{k-1}$

A cette paire est associée $f_\alpha = f - \frac{p^{k-1}}{\alpha} f(q^p) \in S_k(\Gamma_0(p))$

$= q + b_2 q^2 + \dots$ où $b_n = a_n$ si $(n,p) = 1$, $b_p = \alpha$

(Les f_α et f_β sont les "formes jumelles associées à f" si α, β sont les 2 racines.
NB: elles ont <u>même</u> rep. Galoisienne associée: celle de f)

<u>Théorème</u> (Hida $v(\alpha) = 0$, Coleman) Soit (f,α) ↑ et supposons $v(\alpha) < k-1$, $\alpha^2 \neq p^k$

Alors $\exists\, r > 0$ et $F = q + B_2(x) q^2 + B_3(x) q^3 + \dots \in \mathcal{O}(B(k,r))[[q]]$, $\mathcal{O}(B(k,r)) = \mathbb{Q}_p\langle \frac{x-k}{\dots} \rangle$

tels que (i) $F(k) = f_\alpha$

(ii) si $k' \in (k + (p-1)\mathbb{N}) \cap B(k,r)$, $F(k')$ est de la forme $f'_{\alpha'}$ où $f' \in S_{k'}(-)$ et $\alpha' = B_p(k')$

(en fait, F est unique. De plus, il y a un énoncé sous les hyp $v(\alpha) < k-1$ ou $\alpha^2 \neq p^{k-1}$)

Rem. (i) $r = p^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $|B_n(x) - B_n(k)| \le p^{\nu}|x-k|$ si $x \in B(k,r)$ et $n \geq 1$

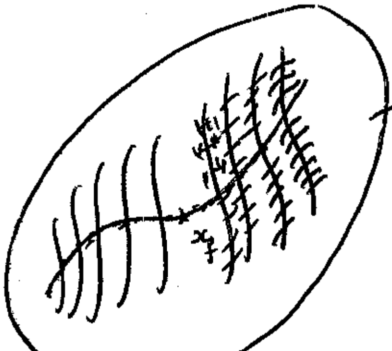
donc $F(k+(p-1)p^{n+\nu}) \equiv f_\alpha \ (p^n)$ $\forall n \geq 0$

Ces "congruences automatiques" généralisent celles de Kummer sur les nb de Bernoulli (qui peuvent être vues sous cet angle via la famille d'Eisenst. (série))

(ii) f étant fixé, si $\alpha \neq \beta$ sont les 2 racines de ..., F_α et F_β sont très différentes.
ex: si $k' \in (k+(p-1)\mathbb{N}) \cap B(k,r)$ est assez grand $F_\alpha(k')$ n'est ni égale, ni jumelle à $F_\beta(k')$! (exercice !)

(iii) F donne lieu à $\rho_F : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}(B(k,r)))$ cont.
"interpolant les rep de Deligne" $\quad \mathrm{tr}(\rho_F(\mathrm{Frob}_\ell)) = B_\ell \ \forall \ell \neq p$

Retour au pb. $f / \bar\rho = \bar\rho_f$, on choisit α qcq, $\rightsquigarrow F_\alpha$ et ρ_{F_α}, et on recommence en utilisant les 2 jumelles.



$\longrightarrow$ l'image des familles de Coleman = "fougère infinie"

La théorie de Sen $\Rightarrow$ la fougère reste ds une hypersurface
toram
$\Rightarrow$ les points quasi-modulaires sont Z. denses.

Rmq: Gouvêa–Mazur avaient "deviné" expérimentalement l'énoncé du thm de Coleman, à partir de la "feuille" de Hida.

Mieux: On peut "relier les feuilles" et "désingulariser les points doubles"

Dans $\mathfrak{X}(\bar\rho) \times \mathbb{G}_m$, soit Z l'ensemble des paires (x,α) où $x = x_f$ modulaire et (f,α) paire. On pose $\mathcal{E}(\bar\rho) := \overline{Z} \subset \mathfrak{X}(\bar\rho)\times\mathbb{G}_m$

Théorème $\mathcal{E}(\bar\rho)$ est une courbe (équidimensionnelle)

(Son image dans $\mathfrak{X}(\bar\rho)$ contient la fougère, on conjecture que $\mathcal{E}(\bar\rho)$ n'a qu'un nombre fini de comp irréductibles !)

Objectif du cours : généraliser ces résultats en dim supérieure

Plan

Ⓐ Construction des familles p-adiques de formes automorphes (à la Coleman) dans le contexte des Groupes unitaires $/\mathbb{Q}$ définis, de tout rang.
Construction de la variété de Hecke (approche non galoisienne)

Ensuite, objectif galoisien : étudier les déformations des
$$\bar{\rho} : G_E \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_q), \quad (\bar{\rho}^{*,c} \simeq \bar{\rho}(n-1), \text{ "impaire"})$$
idem pour les relèvements

$\mathcal{X}(\bar{\rho})$: dim $\frac{n(n+1)}{2}$
fougère : dim n , comprendre si elle est Z-dense.
(ex: dim 3, à un twist près dim 2 dans un espace de dim 5)

↳ Ⓑ Etude des propriétés des représentations galoisiennes attachées aux familles p-adiques de f. aut., essentiellement $| \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Nous étudierons en particulier des problèmes de déformations des représentations cristallines (en car. 0, dim n) ("déformations trianguliness").

Ⓒ Application globale à la Z-densité des points autom. (les résultats les plus complets concernent $n \leq 3$, mais $n=3$ déjà intéressant)

Autres applications de Ⓐ, Ⓑ dont je ne parlerai pas :
- utiles au projet de livre visant à associer des rep. gal. aux rep. aut. cohomologiques de $GL_n(\mathbb{A}_E)$ π, $\pi^{*,c} \simeq \pi$. (projet GRFA)
- construction d'extensions galoisiennes prévues par les conj. de Bloch-Kato (travail avec J. Bellaïche, une partie de Ⓑ est issue de notre livre en commun)

II. Variétés de Hecke des groupes unitaires définis

(A) Groupes unitaires définis

- $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire, $n \geq 1$ entier, $G/\mathbb{Q}$ groupe unitaire à n variables attaché à $E/\mathbb{Q}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta/E & E\text{-algèbre centrale simple rang } n^2 \\ x \mapsto x^* & \mathbb{Q}\text{-anti-involution} \\ \text{tq} & (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \text{ si } \lambda \in E \end{cases} \rightsquigarrow G(A) = \{x \in \Delta \otimes_{\mathbb{Q}} A,\ xx^* = 1\}$$

A : $\mathbb{Q}$-algèbre

Exemple standard f forme hermitienne non deg. / E^n, $\Delta = M_n(E)$, $x \mapsto x^*$ l'adjonction ass. à f, $G = U(f)$ groupe unitaire usuel.

- $G(\mathbb{C}) \xrightarrow[E \to \mathbb{C}]{\sim} Gl_n(\mathbb{C})$, $G(\mathbb{R})$ un groupe unitaire réel signature (p,q)

Def. G est défini si $G(\mathbb{R})$ compact $\Leftrightarrow pq = 0$

("toute forme tordue définie de $Gl_n/\mathbb{Q}$ est d'un gr. unitaire défini")

- $G(\mathbb{Q}_p)$ i) $p = v\bar{v}$ déc. ds E, $G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \Delta_{E_v}^{\times}$ donc $\simeq Gl_n(\mathbb{Q}_p)$ pour pptout p décomposé

  ii) p inerte ou ramifié, $G(\mathbb{Q}_p)$ unitaire p-adique (standard ou quaternionique)

Ces groupes ont bcp de formes intérieures, régies par un principe de Hasse connu.

Exercice $f = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$, $U(f)$ est q. déployé à ttes les places finies ssi $n \not\equiv 2\ (4)$

Ⓑ <u>Formes automorphes</u> $G/\mathbb{Q}$ unitaire défini.

$$\mathcal{A} = L^2(\underbrace{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})}_{\text{mesure } G(\mathbb{A})\text{-invariante finie}}, \mathbb{C}) \circlearrowleft G(\mathbb{A}) \text{ translations à droite}$$

$G(\mathbb{R})$-finies
$G(\mathbb{A}_f)$-lisses (denses par P.W.)

$$= \bigoplus_{\substack{\pi \\ \text{irred } G(\mathbb{A})}} m(\pi)\,\pi \quad , \; m(\pi) \text{ multiplicité de } \pi \quad (\text{tjrs finie})$$

<u>Def</u> π rep. automorphe de G si $m(\pi) \neq 0$.

" tout est discret, cuspidal, algébrique " car $G(\mathbb{R})$ compact.

<u>poids et niveau</u>

• Les représentations continues irr. de $G(\mathbb{R})$ sont paramétrées par leur plus haut poids. <u>Notation</u> $\underline{k} = (k_1 < k_2 < \cdots < k_n) \in \mathbb{Z}^{n,+}$. On fixe $E \to \mathbb{C}$

$G(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{C}) \simeq Gl_n(\mathbb{C})$, on note $W_{\underline{k}}$ la rep. de $G(\mathbb{R})$ de plus haut poids

(Borel sup. de $Gl_n(\mathbb{C})$) $\quad -k_1 \geq -k_2+1 \geq \cdots \geq -k_n+n-1$

<u>Def</u>: π de poids $\underline{k}$ si $\pi_\infty \simeq W_{\underline{k}}$

• $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ sous-groupe compact ouvert

<u>Def</u>: π niveau K si $\pi_f^K \neq 0$.

• L'espace des "formes de poids $\underline{k}$ et niveau K"

$$S_{\underline{k}}(K) = \operatorname{Hom}_{G(\mathbb{R})}(W_{\underline{k}}, \mathcal{A}^K) = \bigoplus_{\substack{\pi \text{ aut.} \\ \text{poids } \underline{k}}} m(\pi)\,\pi_f^K = \left\{ f : G(\mathbb{A}_f)/K \longrightarrow W_{\underline{k}}^* \right\}$$

$$f(\gamma g) = \gamma_\infty f(g) \quad \text{où } \gamma \in G(\mathbb{Q})$$

L'<u>ensemble de classes</u> $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ est fini $= \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_h\}$

$$\overset{\wr\|}{\prod_{i=1}^{h} (W_{\underline{k}}^*)^{\Gamma_i}}$$

$\Gamma_i = G(\mathbb{Q}) \cap x_i K x_i^{-1}$: fini car $G(\mathbb{Q})$ discret ds $G(\mathbb{A}_f)$ ($G(\mathbb{R})$ compact...)

<u>Rmq</u>: i) Bien que fini, est bien sur très riche, ainsi que l'action des correspondances de Hecke sur ce dernier

(ex: $U(f)$ = classes de certains $\mathcal{O}_E$-réseaux hermitiens définis)

ii) Les conjectures de Langlands-Arthur prédisent que les rep. aut. des G unitaires définis associés à $E/\mathbb{Q}$ contiennent toutes les cuspidales cohom Π de $GL_n(\mathbb{A}_E)$ telles que $\Pi^{\vee,c} \simeq \Pi$ (et même mieux ...)
Peut-être un peu contrairement aux apparences ("dim 0") ces π aut. de G sont très générales !

(C) "Raffinements" des représentations non ramifiées de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ ($f \rightsquigarrow f_\alpha, f_\beta$)

(version provisoire suffisante pour énoncer le théorème)

Soit π_p rep. irr. lisse de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ non ramifiée, i.e $\pi^{GL_n(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$.

$$\pi_p \longleftrightarrow L(\pi_p) \text{ classe de conjugaison ss. } \in GL_n(\mathbb{C})$$

<u>Déf</u>: Un raffinement de π_p est un ordre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sur les v.p de $L(\pi_p)$

On définira plus tard ce qu'est un raffinement "accessible". Pour l'instant, disons simplement que

* il y a toujours au moins un raff. accessible
* si $\varphi_i\varphi_j^{-1} \neq p$ $\forall i,j$ alors tous les raffinements de π_p sont accessibles

<u>ex</u>: . π_p tempérée, ts les raff accessibles.
. π_p la triviale, seul $(p^{\frac{n-1}{2}}, p^{\frac{n-3}{2}}, \dots, p^{\frac{1-n}{2}})$ accessible

(D) Interpolation p-adique

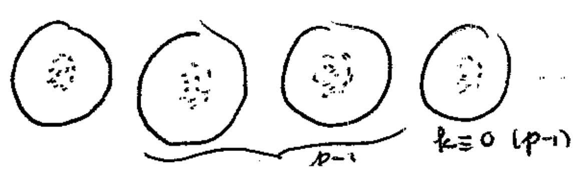
1. Espace des poids

$$W_1(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{gr,\,cont}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times) \xrightarrow{\sim} B(0,1)^- \times \hat{\mu}$$

$\mathbb{Z}_p^\times = \mu \times (1+p)^{\mathbb{Z}_p}$ $\qquad\qquad \kappa \longmapsto (\kappa(1+p), \kappa|_\mu)$

$(p \neq 2 \dots)$

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow W_1(\mathbb{C}_p)$$
$$k \longmapsto (x \mapsto x^k)$$



$\to (1+p)^k$

$k \equiv 0 \ (p-1)$

$\mathbb{Z}$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}_1$, même "très Zariski-dense"

(déf. $Z \subset X$ très Z-dense si Zariski-dense et si $\forall z \in Z$ et $\mathcal{U} \ni z$ voisinage aff
$\exists\, \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U}' \ni z$, tel que $Z \cap \mathcal{U}'$ Z-dense dans $\mathcal{U}'$.)

<u>Espace des poids</u> $\quad \mathcal{W} = \mathrm{Hom}_{\text{gr, cont}}\left((\mathbb{Z}_p^\times)^n, \mathbb{G}_m\right) \simeq \mathcal{W}_1^{\,n}$, espace anal. au sens de Tate

$\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathcal{W}(\mathbb{C}_p) \qquad (k_1, \dots, k_n) \mapsto \left((x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}\right)$

très Zariski-dense

II. <u>Variété de Hecke</u>

- Fixons • $p = v\bar{v}$ décomp. dans E et tel que $G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{Q}_p)$
  - $S \ni p$ ensemble fini, $K = K_p \times K_{S-\{p\}} \times K^S$, avec $K_p \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$ et $K^S \to$ maximal hyperspécial

$H^S = \mathbb{Z}[K^S \backslash G(\mathbb{A}^S) / K^S]$ algèbre de Hecke sphérique (commutative)

- $\bar{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ de sorte que $v : E \to \mathbb{Q}_p$ et $E \to \mathbb{C}$ fixés soient compatibles

- Soit π aut. de poids $\underline{k}$ et niveau K, alors H^S agit sur $(\pi^S)^{K^S}$ (dim 1) par un caractère $\psi_\pi : H^S \to \mathbb{C}$

"système v. propre de Hecke"

$$\begin{tikzcd} H^S \arrow[r] \arrow[dr, "?"] \arrow[drr, bend right, "\text{ça c'est } \psi_\pi"'] & \mathbb{C} & \\ & \bar{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \bar{\mathbb{Q}}_p \end{tikzcd}$$

on pourra parler de congruences entre π et π' mod p^m

: $\quad \pi \equiv \pi' \ (p^m) \iff |\psi_\pi(h) - \psi_{\pi'}(h)| \leq p^{-m} \quad \forall h.$

On va montrer qu'il existe toujours des congruences, mieux des familles analytiques quand $\underline{k}$ <u>varie</u>

- Soit (π, R) une paire où π rep. automorphe poids $\underline{k}$, niv. K et R raffinement accessible de $\tau_p|\,|^{\frac{1-n}{2}} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, on leur associe

$$\left(\psi_\pi, \underline{k}, \left(\frac{\varphi_1}{p^{k_1}}, \dots, \frac{\varphi_n}{p^{k_n}} \right) \right) \in \mathrm{Hom}(H^S, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times W(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

on note $\mathcal{Z}$ l'ensemble $\subset$ de tels triplets..

($\mathcal{Z} \neq \emptyset$ à cause de la triviale !)

<u>Théorème</u> Il existe un unique (X, ψ, ν, Z) où

- X espace analytique p-adique réduit $(/\mathbb{Q}_p)$
- $\psi : H^S \longrightarrow \mathcal{O}(X)^{\leq 1}$ hom d'anneaux
- $\nu = (\kappa, (F_1, \dots, F_n)) : X \longrightarrow W \times \mathbb{G}_m^n$ morphisme fini
- $Z \subset X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ très Zariski-dense

tel que

(i) L'application naturelle $X(\overline{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^S, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times W(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$

$x \longmapsto (\psi(x), \kappa(x), (F_1(x), \dots, F_n(x)))$

induit une bijection $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}$

(ii) $\forall x \in X$, $\mathcal{O}_{\nu(x)} \otimes_{\mathbb{Z}} H^S \longrightarrow \mathcal{O}_x$ est surjective.

C'est la variété de Hecke de niveau K. Elle satisfait de plus

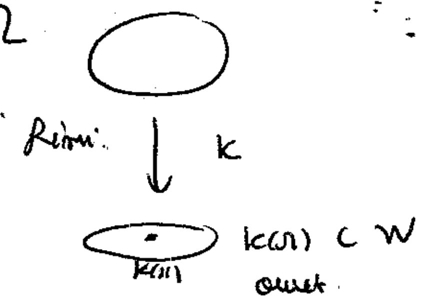
(iii) X est équidimensionnel de dim n.

(iv) $\kappa : X \longrightarrow W$ est localement fini, et $\forall T$ comp. irréduct. de X, $\kappa(T)$ est un ouvert Zariski de W.

(v) ("classicité") Si $x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est tel que $\kappa(x) = (k_1 < \dots < k_n) \in \mathbb{Z}^{n,+}$

et si
$$\begin{cases} v(F_1(x)) < k_2 - k_1 \\ v(F_1 F_2(x)) < k_3 - k_2 \\ \vdots \\ v(F_1(x) F_2(x) \cdots F_{n-1}(x)) < k_n - k_{n-1} \end{cases}$$
<u>alors</u> $x \in \mathcal{Z}$.

Rmq: iv) et v) $\Rightarrow$ (d) En effet, si T est une composante irréductible de X, $k(T)$ contient un élément de $\mathbb{Z}^n$ par (iv). Soit $x \in T$, $k(x) \in \mathbb{Z}^n$. Par (iv) $\exists$ Ω



les F_i sont analytiques
donc bornées sur Ω, donc
(v) va être satisfait dès
que $k(z) = (k_1(z) < \dots < k_n(z))$
est tel que $k_i(z) - k_{i-1}(z) \gg 0$ $\rightsquigarrow$ ensemble Zariski dense dans Ω (donc dans $T \cap \Omega$)