Réseaux unimodulaires

colloquium IMJ 16/10/2025

Gaëtan Chenevier

CNRS, DMA

gaetan.chenevier@math.cnrs.fr

Plan

I. Réseaux euclidiens entiers

II. Classification des unimodulaires

III. Construction de réseaux : voisins de Kneser

I) Réseaux euclidiens entiers

$\mathbb{R}^n$ euclidien standard, $n \geq 1$

· <u>Réseau</u>: ss groupe $L \subset \mathbb{R}^n$ de la forme $\mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$
avec $e_1, \ldots, e_n$ $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^n$ ($\Leftrightarrow L$ discret, cocompact)

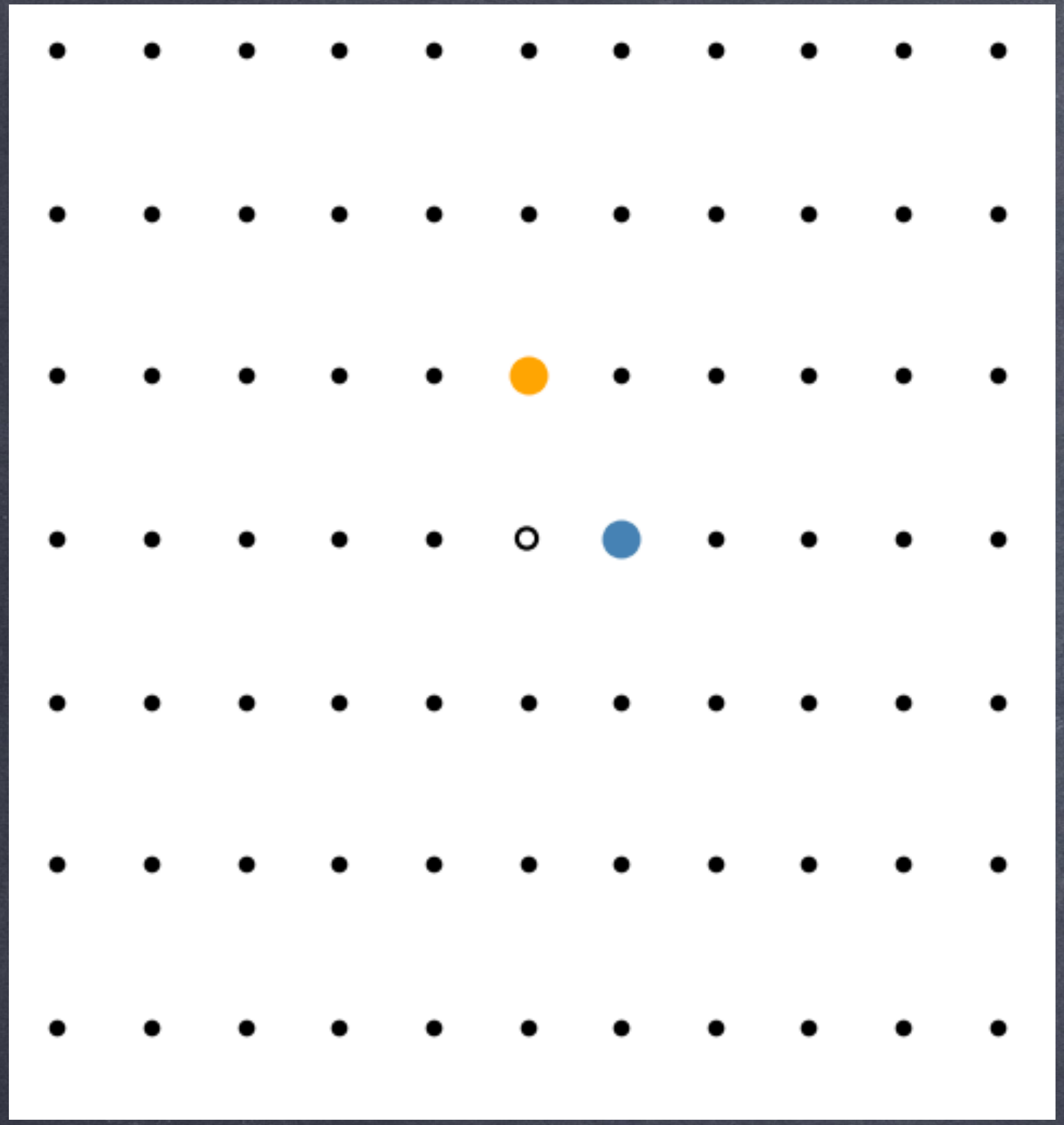
· L entier si $\forall x, y \in L$, $x \cdot y \in \mathbb{Z}$
pair si $\forall x \in L$, $x \cdot x \in 2\mathbb{Z}$ ($\Rightarrow$ entier)

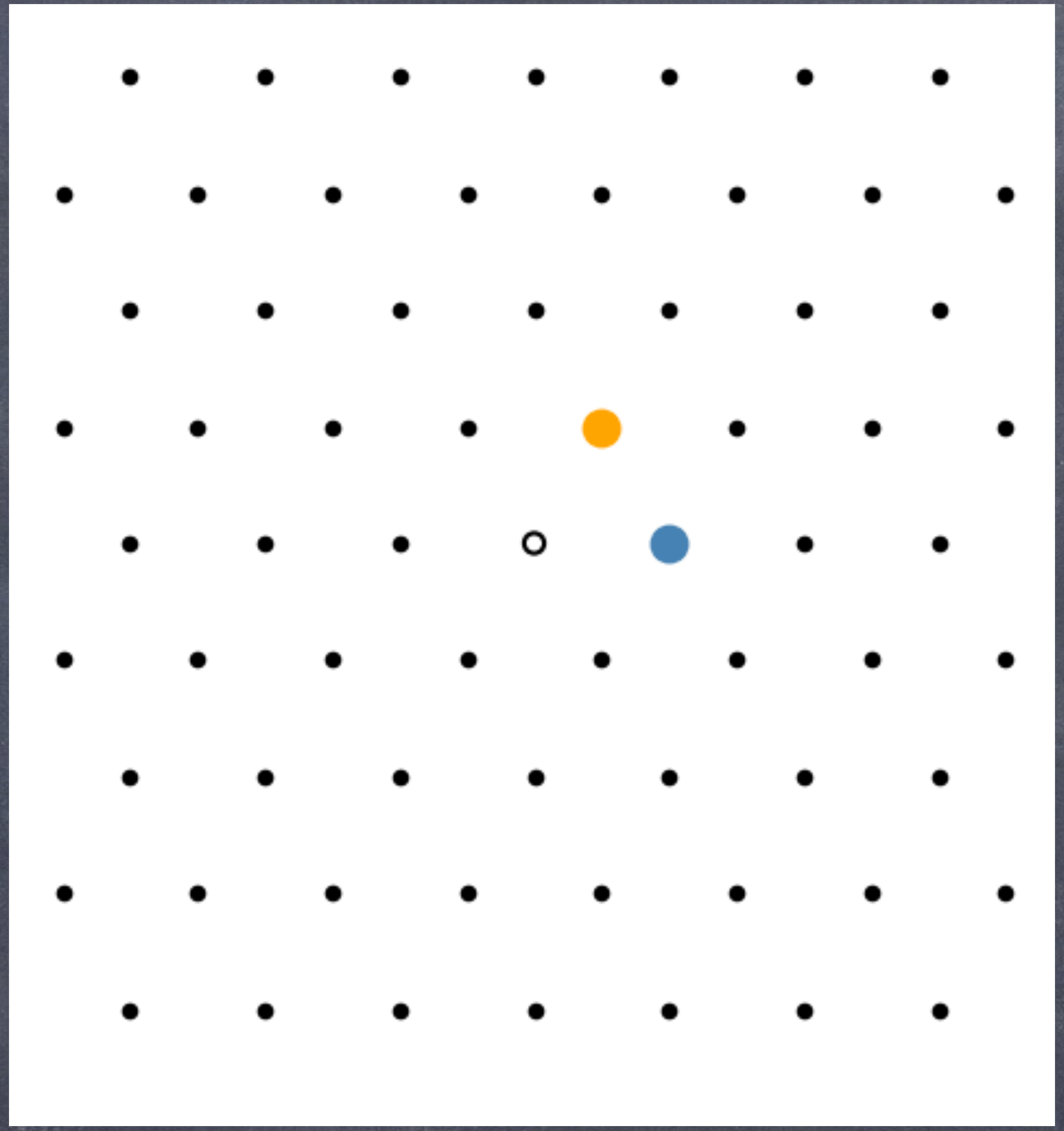
$\rightsquigarrow q_L : L \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x \cdot x$, forme quad. associée à L (entière, déf. >0)

dans $e_1 \ldots e_n$, $q_L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \, e_i \cdot e_j$, $\mathrm{Gram}(e_1, \ldots e_n) = \left(e_i \cdot e_j\right)$

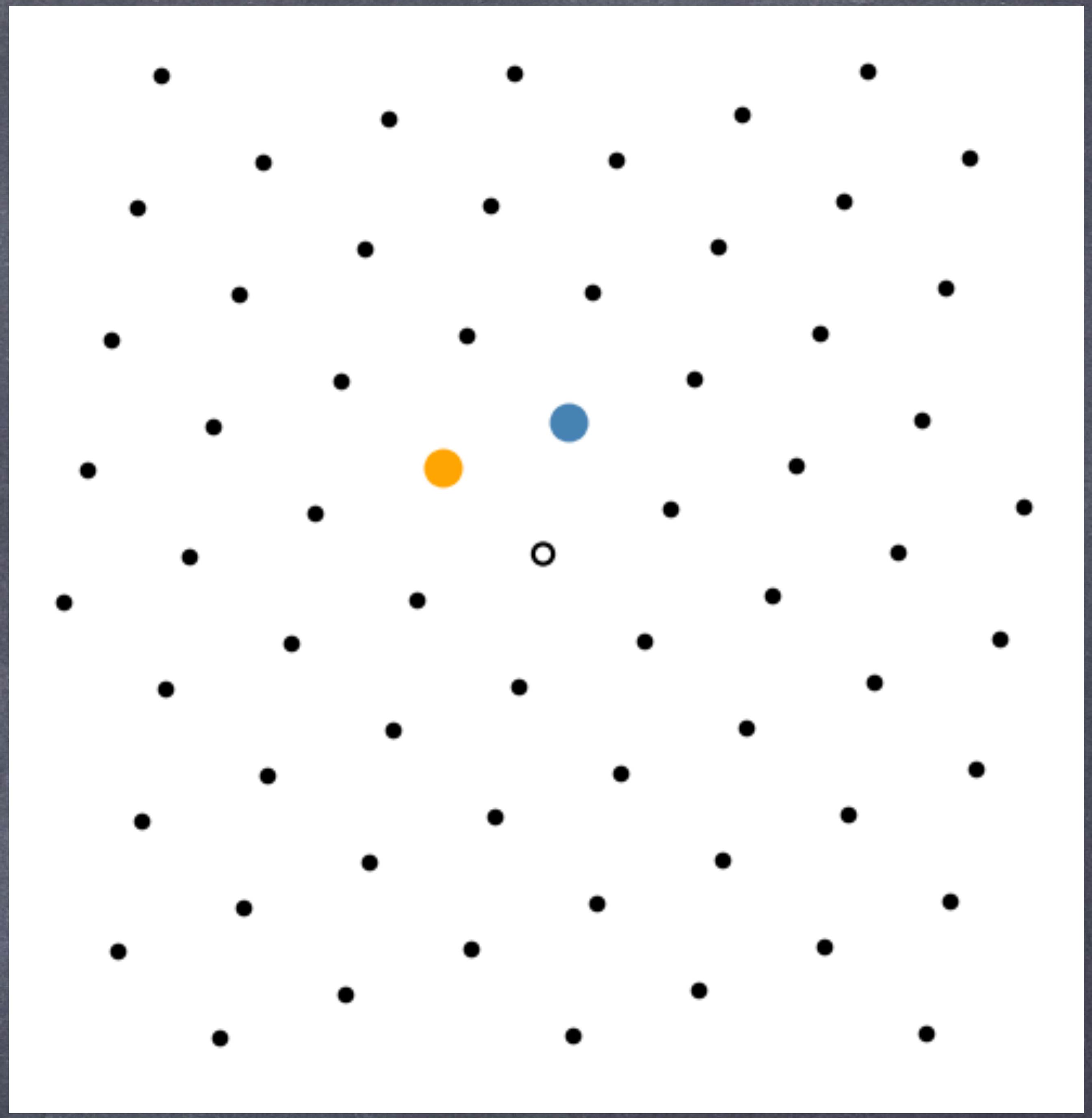
ex: $n=2$

$L = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$





$\simeq$



$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ entier impair

$x_1^2 + 3x_2^2$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ entier pair

$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

idem

Équivalence entre

$$\left\{ L \subset \mathbb{R}^n \text{ entiers} \right\} / O(n) \simeq \left\{ q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} \text{ déf } >0 \right\} \text{ mod change}^t \text{ de } \mathbb{Z}\text{-base} \simeq S_n^{>0}(\mathbb{Z}) / GL_n(\mathbb{Z})$$

$L \mapsto q_L$; $q \mapsto \text{Gram}$

Invariant : $\det L := \det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n) = (\text{covol } L)^2 \in \mathbb{Z}_{>0}$

Définition : L unimodulaire si $\det L = 1$

$$X_{n,d} = \{ \text{classes isom. de } L \subset \mathbb{R}^n,\ L \text{ entier et } \det L = d \}$$

Thm (finitude du nb de classes) $X_{n,d}$ fini $\forall n, d \geq 1$

Cas historique $n=2$ (Lagrange, Gauss) $X_{2,d}$ bien compris

$\forall L \subset \mathbb{R}^2$, $L = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ t.q., posant $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ u\cdot v & v\cdot v \end{bmatrix}$

on ait $0 \leq 2b \leq a \leq c$

$\Rightarrow d = ac - b^2 \geq a^2 - a^2/4 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow \boxed{a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{d}}$

<u>Preuve</u>

- $a = \mathrm{Min}\, L := \min\limits_{x \in L \setminus \{0\}} x \cdot x$, puis $u \in L$ t.q. $u \cdot u = a$
- v arbitraire $L = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ puis $\begin{matrix} v \mapsto v \pm u \\ v \mapsto -v \end{matrix}$, ops $0 \leq u\cdot v \leq \frac{a}{2}$
- $v \cdot v \geq a$ clair

<u>Mieux</u> (a, b, c) unique!

Ex $X_{2,1} = \{ \mathbb{Z}^2 \}$, car $a \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=1, b=0, c=1$

applications arithmétiques (Lagrange, Gauss, Dedekind)

- $X_{2,d} \simeq \{$ classes d'idéaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \} / [I] = [\bar{I}]$

ex : $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ principal $\iff |X_{2,d}| = 1$

- premiers de la forme $x_1^2 + d x_2^2$

(ou de la forme $x \cdot x$ avec $L \in X_{2,d}$)

$n > 2$ réductions "approchées" (Hermite, Korkine-Zolotarev, Minkowski,)

ne permettent pas en gén. de déterminer $X_{n,d}$

Mais $\exists H_n$ t.q $\forall L \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Min}\, L \leq H_n (\det L)^{1/n}$

constante de Hermite

(H_n minimal)

ex: $H_1 = 2/\sqrt{3}$

Cor:

- finitude de $X_{n,d}$
- si $\det L = 1$ et $n \leq 5$, $L \simeq \mathbb{Z}^n$ (car $H_n < 2$ pour $n \leq 5$)

$\longrightarrow$ sommes de 4 carrés (Lagrange), $n=4$

$\longrightarrow$ sommes de 3 carrés (Gauss), $n=3$

Pb: déterminer H_n (empilements de sphères optimaux sur des réseaux)

ex: $H_9 = 2$ (2025, Dutour-van Woerden)

II) Classification des réseaux entiers unimodulaires

$X_n := X_{n,1}$ ex : $I_n := \mathbb{Z}^n$

Thm :

n	≤ 7	8–11	12-13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\lvert X_n \rvert$	1	2	3	4	5	8	9	13	16	28	40	68	117	297	665

(Lagrange, Gauss, Hermite '38, Witt, Kneser '54, Niemeier '64, Conway-Sloane '82, Borcherds '84)

et

n	26	27	28	29
$\lvert X_n \rvert$	2 566	17 059	374 062	38 592 290
	Ch.	Ch.	Allombert – Ch.	Ch. – Taïbi

But suite : qq méthodes utilisées (motivations ?)

• <u>Ex :</u> $D_n = \{ x \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \ (2) \} \underset{2}{\subset} \mathbb{Z}^n$

$E_n = D_n + \mathbb{Z}e$ avec $e = \frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1)$ $\qquad e \cdot e = \frac{n}{4}$

<u>Alors</u> si $n \equiv 0 \ (4)$, E_n unim., pair $\Leftrightarrow n \equiv 0 \ (8)$

$(2e \in D_n,\ e \cdot D_n \subset \mathbb{Z})$

$E_8 \not\simeq I_8$

pair $\qquad$ impair

• <u>Comment distinguer deux réseaux ?</u>

$R_i(L) = \{ x \in L \mid x \cdot x = i \}$; $R_2(L)$ = système de racines de L

"espace métrique fini"

$\underline{n=8}$ Le réseau E_8

$$R_2(E_8) \simeq E_8 \quad (240 \text{ racines})$$

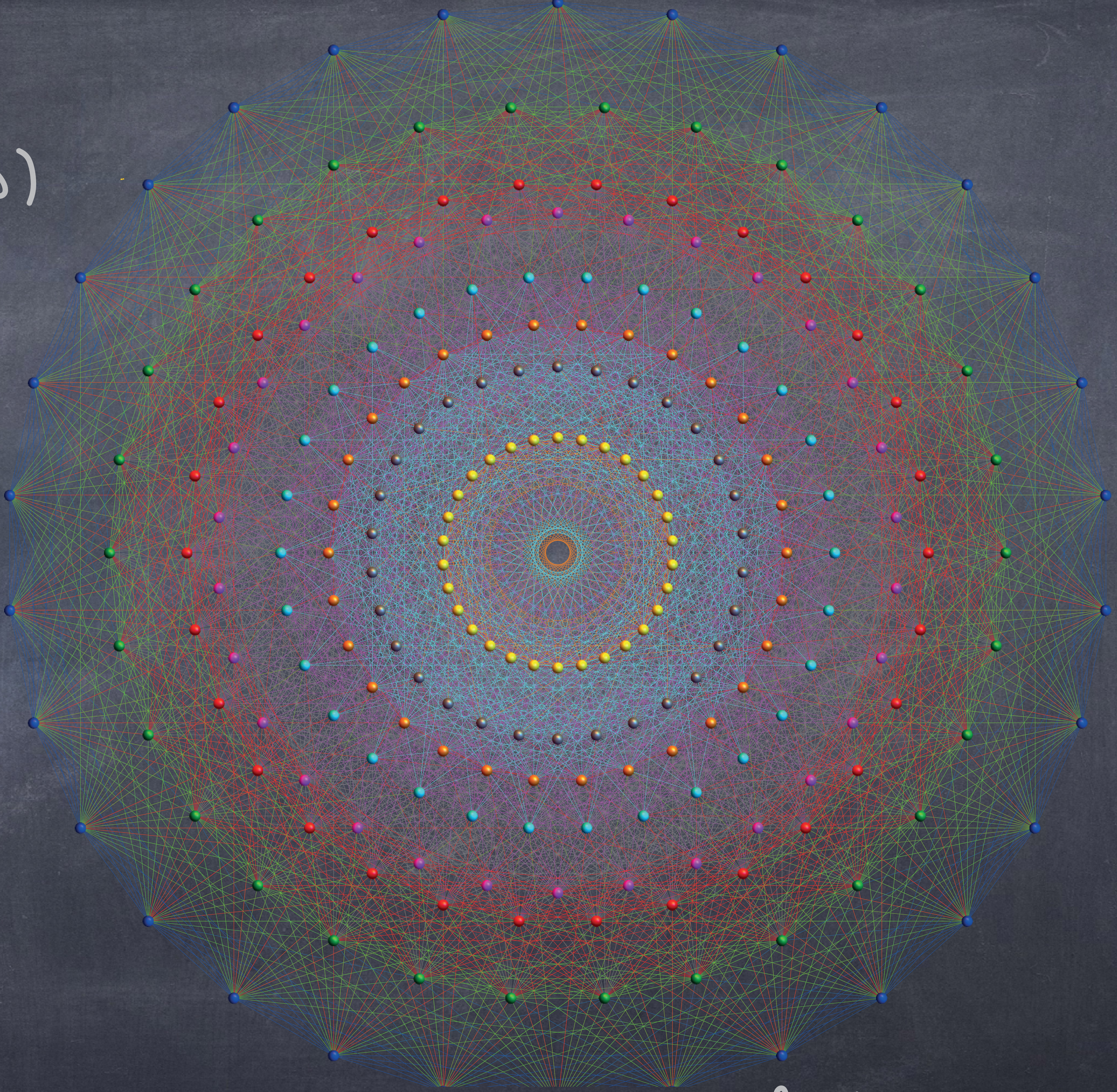
$$\tfrac{1}{2} q_{E_8} \simeq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2 - x_1 x_3 - x_2 x_4 - \sum_{i=3}^{7} x_i x_{i+1}$$

$\underline{n \geq 16}$ les racines de E_n sont les $\pm e_i \pm e_j$ avec $1 \leq i < j \leq n$

$$R_2(E_n) \simeq D_n$$

$$\Rightarrow E_8 \perp E_8 \not\simeq E_{16}$$

($\rightsquigarrow$ tores isospectraux de Milnor)



(© MacMullen, Stembridge)

Prop : $X_n^e \neq \emptyset \iff n \equiv 0\ (8)$ ← even

$X_8^e = \{E_8\}$, $X_{16}^e = \{E_8 \perp E_8,\ E_{16}\}$, $\# X_{24}^e = 24$

Mordell '38 Witt Niemeier '68

⟶ tous distinguables par R_2

Ex. : Leech '65 : unique $L \in X_{24}^e$ avec $R_2(L) = \emptyset$

— il réalise H_{24} $(=4)$ (Cohn - Kumar '04)

— $O(\text{Leech})/\{\pm 1\}$ = groupe sporadique Co_1 de Conway ('68)

où $O(L) := \{ g \in O(n) \mid g(L) = L \}$ groupe fini $\forall L$

Prop (King) $|X_{32}^e| > 10^9$ (!)

Une explication : formule de masse de Minkowski - Siegel - Smith

ex:

$$\text{mass } X_n^e := \sum_{L \in X_n^e} \frac{1}{|O(L)|} = \left| \frac{B_{n/2}}{n} \cdot \frac{B_2}{4} \cdot \frac{B_4}{8} \cdot \frac{B_6}{12} \cdots \frac{B_{2n-2}}{4n-4} \right|$$

Bernoulli #

$\geq \frac{|X_n|}{2}$

• $n = 32$ $\quad |X_{32}^e| \geq 80 \cdot 10^6$ | loin de King !|

→ nouvelle stratégie pour déterminer $X_n^{e/o}$ (Conway - Sloane)

ex: $\frac{1}{|O(E_8)|} = \text{mass } X_8^e \Rightarrow X_8^e = \{E_8\}$

⚠ • algo Plesken - Souvignier → $|O(L)|$

III) Construction de réseaux unimodulaires : voisins de Kneser

Soient $d \geqslant 1$, L et L' unimodulaires $\subset \mathbb{R}^n$.

Def : L et L' sont **d-voisins** si $L / L \cap L' \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

Kneser : Fixons $n \geqslant 1$, p premier, $* \in \{\text{pair}, \text{impair}\}$. Le graphe de sommets X_n^* et arêtes les $[L] — [L']$ avec L' p-voisin de L, est <u>connexe</u>.

→ Nouvelle méthode pour déterminer X_n^* à partir d'<u>un</u> réseau et d'<u>un</u> p.

Ex : Kneser X_n^{impair} $n \leq 16$, I_n et Niemeier X_{24}^{pair}, E_{24}
$p=2$ $p=2$

Description de tous les d-voisins d'un L donné

Soit $x \in L/dL$ "primitif" et isotrope mod d : $x \cdot x \equiv 0 \ (d)$
$(2d)$ si d pair

$$M_d(L;x) = \{ v \in L \mid v \cdot x \equiv 0 \ (d) \} \underset{d}{\subset} L$$

soit $\tilde{x} \in L$ t.q. $\tilde{x} \equiv x$ mod dL et $\hat{x} \cdot \hat{x} \equiv 0 \ (d^2)$ (Hensel)

Alors $$N_d(L;x) = M_d(L;x) + \mathbb{Z}\,\frac{\tilde{x}}{d}$$

unimodulaire, d-voisin de L, avec $N_d(L;x) \cap L = M_d(L;x)$

Fait
- ne dépend que de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\, x$ *
- tout d-voisin de L s'obtient ainsi ($\simeq d^{n-2}$ voisins)

$\underline{\mathcal{E}x}$ d-voisins de I_n : $x = (x_i)$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \equiv 0$ (d) ou $(2d)$

$$N_d(x) := N_d(I_n, x)$$

- $n \equiv 0$ (4) $N_2(1^n) = E_n$
- $N_d(x)$ pair $\Leftrightarrow$ d pair et les x_i sont impairs
- $1^2 + 3^2 + \cdots + 47^2 = \frac{n}{3}(2n-1)(2n+1) = \frac{24}{3}\, 47 \cdot 49 \equiv 0$ $(4 \cdot 47)$

$\underline{\text{donc}}$ $N_{94}(1, 3, \ldots, 47) \in X_{24}^{e}$ c'est Leech ! (Thompson)

$\underline{\text{idée}}$ $R_2(I_n) = \{\pm e_i \pm e_j\}_{i \neq j}$, $R_2(M_d(x)) = \emptyset \Leftrightarrow x_i \not\equiv \pm x_j$ (d) $\forall i \neq j$

$d = 2 \cdot 47$ premier possible !

et (miracle) marche !

<u>Thm</u> $n \leq 28$, tous les réseaux unim. sont donnés comme $N_L(a)$!
(cf ma page web)

(pour $n \leq 24$, Bacher '97)

```
N24II=[
[2, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1], 0, 1/5204698426366666226930810880000, "D24", 1],
[4, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1], 1, 1/31022420086661971968000000, "A24", 1/2],
[6, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3], 0, 1/37172693925353226240000, "A17 E7", 1/2],
[6, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3], 0, 1/3887340541213409280000, "A15 D9", 1/2],
[6, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3], 0, 1/1924703466207817236480000, "2D12", 1/2],
[6, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3], 0, 1/47767640570430373232640000, "D16 E8", 1],
[8, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3], 1, 1/155103152174530560000, "2A12", 1/4],
[10, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5], 0, 1/16019260472033280000, "A11 D7 E6", 1/2],
[10, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5], 0, 1/1213580338790400000, "2A9 D6", 1/4],
[10, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5], 0, 1/824788751971516416000, "3D8", 1/6],
[12, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5], 0, 1/573416710078464000, "3A8", 1/12],
[14, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 7; 7; 7; 7; 7; 7], 0, 1/31316197926418513920000, "D10 2E7", 1/2],
[14, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7], 0, 1/47943914618880000, "2A7 2D5", 1/8],
[14, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7], 0, 1/15485790781440000, "4A6", 1/24],
[14, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 7; 7], 0, 1/6763027302973440000, "4D6", 1/24],
[18, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 9], 0, 1/2029289625631919702016000000, "3E8", 1/6],
[18, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 9; 9], 0, 1/2476694568960000, "4A5 D4", 1/48],
[18, [1; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 9; 9], 0, 1/346657985428193280000, "4E6", 1/48],
[20, [1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 9; 9], 0, 1/716636160000000, "6A4", 1/240],
[22, [1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 9; 11; 11; 11; 11], 0, 1/108208436847575040, "6D4", 1/2160],
[26, [1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 9; 11; 11; 11; 13; 13], 0, 1/295882444505088, "8A3", 1/2688],
[34, [1; 1; 1; 3; 3; 5; 5; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 11; 11; 11; 13; 13; 13; 15; 15; 15; 17; 17], 0, 1/413762786426880, "12A2", 1/190080],
[46, [1; 1; 3; 3; 5; 5; 7; 7; 9; 9; 11; 11; 13; 13; 15; 15; 17; 17; 19; 19; 21; 21; 23; 23], 0, 1/4107449023856640, "24A1", 1/244823040],
[94, [1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31; 33; 35; 37; 39; 41; 43; 45; 47], 0, 1/8315553613086720000, "", 1/8315553613086720000]
];
```

Les réseaux de Niemeier comme voisins de I_{24}

Pourquoi ça marche ?

Fixons $L, L' \in X_n$ même parité $*$, $n \geq 3$

$$N_p(L, L') := \text{nb. de } p\text{-voisins de } L \text{ isom. à } L'$$

<u>Thm</u> (Ch.) $\dfrac{N_p(L,L')}{p^{n-2}} \longrightarrow \dfrac{1/|O(L')|}{\mathrm{mass}(X_n^*)}$ $p \to \infty$

$\to L = I_n$, L' quelconque. "La probabilité que L soit un p-voisin de I_n est proportionnelle à $1/|O(L)|$"

↳ "coupon collector problem" / "album panini"

Chasse aux réseaux unimodulaires (méthode thm $n = 26, 27$ et 28)

Énumérer, pour $d = 2, 3, \dots$, les $x \in \mathbb{Z}^n$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \equiv 0 \ (\underset{2d}{d})$ et $1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \frac{d}{2}$

$\rightsquigarrow$ construire $N_d(x)$, si nouveau * on l'ajoute, calcule $|O(L)|$

etc tant que la masse n'est pas pleine.

Difficultés *· besoin d'invariants ($R_{\leq 3}$ nécessaire)

· biaiser la recherche en imposant des systèmes de racines ou des isométries, sinon ∞ long pour trouver les réseaux de petite masse

Bcp cas par cas, chance?, calculs : en dim 28, 72 ans CPU time!

Mais les listes sont vérifiables indép.