LISSITÉ DE LA COURBE DE HECKE DE GL_2 AUX POINTS EISENSTEIN CRITIQUES.

J. BELLAÏCHE ET G. CHENEVIER

Abstract : Let p be a prime number and $\mathcal{C}$ be the p-adic tame level 1 eigencurve introduced by Coleman-Mazur. We prove that $\mathcal{C}$ is smooth at the evil Eisenstein points and we give necessary and sufficient conditions for etaleness of the map to the weight space at these points in terms of p-adic zeta values. A key step is the determination at these points of the schematic reducibility locus of the pseudo-character carried by $\mathcal{C}$ restricted to a decomposition group at p. Then, the smoothness appears to be a consequence of the fact that the Dirichlet L-functions only have simple zeros at integers.

Introduction

Soient p un nombre premier et $\mathcal{C}$ la courbe de Hecke p-adique de GL_2 de niveau modéré 1, "*the eigencurve*", introduite par Coleman et Mazur dans [CM]. Notons G le groupe de Galois de $\mathbb{Q}$ non ramifié hors de p et $T : G \to A(\mathcal{C})$ le pseudo-caractère de dimension 2 porté par $\mathcal{C}$. Les points Eisenstein critiques sont les points $x_{(k,\varepsilon)}$ de $\mathcal{C}$ en lesquels $U_p(x_{(k,\varepsilon)}) = p^{k-1}$ et T est la trace de la représentation

$$\mathbb{Q}_p.\varepsilon \oplus \mathbb{Q}_p(1-k),$$

$k \geq 2$ étant un entier et ε un caractère d'ordre fini de G non trivial si $k = 2$ et vérifiant $\varepsilon(-1) = (-1)^k$. Ces points forment une partie discrète de la partie non ordinaire de $\mathcal{C}$ et tout point de cette dernière où T est réductible est de cette forme. Dans cet article, nous prouvons que $\mathcal{C}$ est lisse en $x_{(k,\varepsilon)}$ et nous donnons un critère pour que le morphisme vers l'espace des poids, $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$, y soit étale.

On conjecture que $\mathcal{C}$ est lisse en tous ses points classiques. Aux points classiques réductibles[1] ordinaires, il est aisé de vérifier que $\mathcal{C}$ est lisse et même que κ est étale, de sorte que nous démontrons cette conjecture pour tout point classique réductible. En ce qui concerne la lissité aux points classiques irréductibles, elle est connue dans de nombreux cas par les travaux de Kisin [K, thm. 11.10].

Notons également qu'en un point classique non critique z, le théorème de classicité de Coleman montre que le degré de κ en z est égal à la dimension de l'espace caractéristique (pour les T_l, $l \neq p$, et U_p) de la forme f associée à z dans l'espace des formes classiques de même poids que f. En particulier, dans le cas non critique, κ est étale en z si, et seulement si, U_p agit de manière semi-simple sur cet espace caractéristique, ce qui est conjecturé, et implique la lissité dans certains cas (cf. [CM, cor. 7.6.3]).

[1] Nous dirons qu'un point x de $\mathcal{C}$ est réductible (resp. irréductible) si l'évaluation de T en x l'est.

Notre démonstration repose sur l'étude des lieux de réductibilité schématique $\mathrm{Spec}(R)$ et $\mathrm{Spec}(R_p)$ respectifs de T et $T_{|D}$ au voisinage d'un point x Eisenstein critique, $D \subset G$ étant un groupe de décomposition en p. Nous montrons en utilisant un résultat de Kisin que $\mathrm{Spec}(R_p)$ est inclus dans la fibre en x de κ, puis qu'ils sont égaux en utilisant le cas limite du critère de classicité de Coleman. Nous en déduisons que $\mathrm{Spec}(R)$ est le point fermé réduit x. En utilisant des techniques de Mazur-Wiles [MW], nous obtenons une majoration du nombre minimal de génerateurs de l'idéal définissant $\mathrm{Spec}(R)$ (donc ici de l'idéal maximal m de $\mathcal{O}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{C},x}$) en terme de la dimension de certains groupes de Selmer. La principalité de m apparaît alors comme conséquence de ce que les fonctions L de Dirichlet n'ont que des zéros simples aux entiers et des conjectures de Bloch-Kato, connues pour ces dernières. En ce qui concerne le degré de κ en x, nombre assez mystérieux du fait que x est critique, nous montrons qu'il vaut 1 si, et seulement si, une certaine valeur explicite de la fonction ζ p-adique est non nulle. Cette non-annulation est conjecturée, mais non connue ; elle est équivalente à la non-annulation d'un certain régulateur p-adique.

Les auteurs sont heureux de remercier Pierre Colmez, Barry Mazur, Christophe Soulé et Jacques Tilouine pour leur soutien et des discussions utiles, ainsi que le C.I.R.M. (Luminy, France) où une partie de ce travail a été réalisée en novembre 2003. L'un des auteurs (J. B.) remercie de plus l'I.P.D.E. pour son soutien financier et l'université de Rome I pour son hospitalité.

Notations et conventions : p est un nombre premier, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{Q}_p$, et $v : \overline{\mathbb{Q}}_p^* \to \mathbb{Q}$ la valuation p-adique normalisée par $v(p) = 1$. Si $X/\mathbb{Q}_p$ est un espace rigide, on note $A(X)$ l'anneau des fonctions analytiques globales sur X et $\mathcal{O}^{\mathrm{rig}}_X$ le faisceau structural de X. Nous entendrons par $X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ la réunion des $X(F)$ où F parcourt les sous-extensions finies de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Nous prenons pour convention que $\mathbb{Q}_p(1)$ a pour poids de Hodge-Tate -1 (et polynôme de Sen $T+1$), de sorte que, par exemple, les poids d'une représentation de De Rham sont les sauts de la filtration de son module filtré.

1. Rappels sur $\mathcal{C}$

La référence pour cette partie est [CM].

1.1. Soient p un nombre premier, $\mathcal{W} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr-cont}}(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{G}_m^{rig})_{pairs}$ l'espace rigide paramétrant les caractères p-adiques continus χ de $\mathbb{Z}_p^*$ tels que $\chi(-1) = 1$, et $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$ la courbe de Hecke p-adique de niveau modéré 1 pour le groupe GL_2. C'est la courbe analytique[2] sur $\mathbb{Q}_p$ construite par Coleman et Mazur dans [Co1] et [CM, Chap. 7] (voir aussi [Bu] pour $p = 2$) à partir du système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ des formes modulaires p-adiques surconvergentes. La courbe $\mathcal{C}$ est séparée, réduite, équidimensionnelle de dimension 1. Le morphisme κ est plat, localement fini.

[2]Précisément, la courbe $\mathcal{C}$ étudiée ici est celle notée D loc.cit. Nous n'utiliserons pas l'identification de D avec la nilréduction de l'espace C_p considéré aussi loc.cit.

1.2. Soit $\mathcal{H} := \mathbb{Z}[\{T_l, l \neq p\}, U_p]$. On dispose par construction ([CM, Chap. 7]) d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{H} \to A(\mathcal{C})$ de sorte que l'on verra les éléments de $\mathcal{H}$ comme des fonctions analytiques globales, bornées par 1 partout, sur $\mathcal{C}$. Par construction toujours ([CM]), l'application canonique "système de valeurs propres" $\chi : \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(\mathcal{H}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ est injective, et identifie $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à l'ensemble des formes modulaires p-adiques surconvergentes propres, de pente finie, et de niveau modéré 1. Soient $F/\mathbb{Q}_p$ un corps local, $x \in \mathcal{C}(F)$. On note f_x l'unique forme p-adique surconvergente propre normalisée correspondante[3], et $M(x) \subset M^{\dagger}_{\kappa(x)}$ l'espace caractéristique pour $\mathcal{H}$ de f_x. L'image $\mathcal{H}(x)$ de $F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}$ dans $\mathrm{End}_F(M(x))$ est une F-algèbre locale de dimension finie. L'accouplement standard $M(x) \times \mathcal{H}(x) \to F$, $(f, h) \mapsto a_1(h(f))$ est non dégénéré, sauf si $\kappa(x) = 1$ et x est sur la droite Eisenstein ordinaire, auquel cas il est nul mais $\dim_F(M(x)) = \dim_F(\mathcal{H}(x)) = 1$ (cf. [CM, prop. 3.6.1]).

Proposition 1. *Si $x \in \mathcal{C}(F)$, il existe un F-voisinage affinoide Ω de x tel que :*

(a) $\kappa(\Omega)$ est un ouvert affinoide,

(b) $\kappa_{|\Omega}$ est fini et plat, étale hors de x, de degré $\dim_F M(x)$*,*

(c) la fibre de $\kappa_{|\Omega}$ au dessus de $\kappa(x)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spec}(\mathcal{H}(x))$*.*

De plus, l'application naturelle $\mathcal{O}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{W},\kappa(x)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H} \to \mathcal{O}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{C},x}$ est surjective.

Preuve : Choisir Ω tel que (a) et le premier point de (b) soient vrai est possible par construction. Posons $V := \kappa(\Omega)$, $F_x = \mathrm{Spec}(R_x)$ la fibre de $\kappa_{|\Omega}$ au dessus de $\kappa(x)$. D'après [Be, lemme 2.1.6], les $\kappa^{-1}(U)$ avec $\kappa(x) \in U$ forment une base de voisinages rigides analytiques de F_x. Ainsi, quitte à réduire V et remplacer Ω par sa composante connexe contenant x, on peut supposer que F_x est un schéma local et que κ est étale hors de x. Pour tout $z \in \mathcal{C}$, on dispose par construction d'une surjection à noyau nilpotent

$$R_z \to \mathcal{H}(z), \tag{1}$$

qui est donc un isomorphisme si κ est étale en z. Soit $y \in V \backslash \{\kappa(x)\}$, il vient que $\kappa_{|\Omega}$ est de degré $|\kappa^{-1}(y)| = \sum_{z,\,\kappa(z)=y} \dim_F(\mathcal{H}(z)) = \sum_{z,\,\kappa(z)=y} \dim_F(M(z))$. Ce degré est aussi $\dim_F(M(x))$ car la famille de formes modulaires découpée par Ω est localement libre sur $A(V)$, ce qui termine de prouver (b). Ainsi, $\dim_F(R_x) = \dim_F(M(x)) = \dim_F(\mathcal{H}(x))$, de sorte que que (1) est encore un isomorphisme si $z = x$, *i.e.* (c). La dernière assertion est satisfaite par construction. $\square$

1.3. Terminons cette section par la description de certaines composantes particulières de $\mathcal{C}$. Le *lieu parabolique* de $\mathcal{C}$, que l'on notera $\mathcal{C}^0$, est le fermé réduit de $\mathcal{C}$ défini par

$$\mathcal{C}^0 := \{x \in \mathcal{C},\ f_x \text{ s'annule à la pointe } \infty\}.$$

Par construction de $\mathcal{C}$, c'est un fermé Zariski de $\mathcal{C}$ qui est d'équidimension 1. La restriction de κ à $\mathcal{C}^0$ est encore fini et plate.

[3] Cela existe toujours sauf si x est sur la droite Eisenstein ordinaire et de poids trivial, auquel cas on pose $f_x = 1$ (cf. [CM, prop. 3.6.1]).

Enfin, le *lieu ordinaire* de $\mathcal{C}$, que l'on notera $\mathcal{C}^{\mathrm{ord}}$, est l'ouvert admissible de $\mathcal{C}$ défini par

$$\mathcal{C}^{\mathrm{ord}} := \{x \in \mathcal{C},\ |U_p(x)| = 1\}.$$

La relative compacité de l'image de $\mathcal{H}$ dans $A(\mathcal{C})$ (cf. par exemple [Ch2, §4.6 rem. i.]) assure que l'idempotent de Hida $e := \lim_{n\to\infty} U_p^{n!}$ définit un élément de $A(\mathcal{C})$. Cela montre que $\mathcal{C}^{\mathrm{ord}}$ est en fait l'ouvert fermé admissible de $\mathcal{C}$ défini par $e = 1$. On pourrait démontrer que $\kappa : \mathcal{C}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{W}$ est fini, et que c'est la fibre générique de l'algèbre de Hecke ordinaire de Hida, mais nous n'en aurons pas besoin.

2. Rappels sur la théorie de Mazur-Wiles

Nous rappelons dans cette section, en les étendant légèrement, quelques résultats démontrés dans [MW] (voir aussi [HP]).

2.1. Soit (A, m, k) un anneau local noethérien hensélien réduit. On note $K = \prod_j K_j$ son anneau total de fractions, et on suppose donnée $\rho = (\rho_j) : G \to \mathrm{GL}_2(K)$ une représentation de trace notée T telle que $T(G) \subset A$, de déterminant dans A. On suppose que T mod m est somme de deux caractères *distincts* $\chi_i : G \to k^*$, $i = 1, 2$.

Fixons $s \in G$ tel que $\chi_1(s) \neq \chi_2(s)$. Le polynôme caractéristique de s est scindé dans A car A est hensélien, à racines distinctes dans chacun des K_j. On note $\lambda_i \in A$ l'unique racine telle que $\lambda_i \bmod m = \chi_i(s)$. On peut donc trouver une K-base de K^2, e_1, e_2 telle que $s(e_i) = \lambda_i e_i$. Une telle base sera dite *adaptée à s*. On note a, b, c, d les coefficients matriciels de ρ dans cette base, et B et C les sous-A-modules de K engendrés par les $b(g)$ et $c(g')$ respectivement.

2.2. Soit $I \subsetneq A$ un idéal tel que $T \bmod I$ soit la somme de deux caractères ψ_1, ψ_2 : $G \to (A/I)^*$, tels que $\psi_i \bmod m = \chi_i$.

Proposition 2. *$\mathrm{Hom}_A(B, A/I)$ s'injecte A-linéairement dans $\mathrm{Ext}^1_{(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1)$. De plus,*

(a) si les ρ_j sont semi-simples, B est un sous-A-module de type fini de K,

(b) si les ρ_j sont irréductibles, alors l'annulateur de B est nul.

Lemme 1. *Pour tout $g \in G$, on a $a(g)$, $d(g) \in A$ et $a(g) - \psi_1(g)$, $d(g) - \psi_2(g) \in I$. De plus, pour tous g, $g' \in G$, $b(g)c(g') \in I$.*

Preuve : Les éléments $T(sg) = \lambda_1 a(g) + \lambda_2 d(g)$ et $T(g) = a(g) + d(g)$ sont dans A, ainsi donc que $a(g)$ et $d(g)$ car $\lambda_1 - \lambda_2$ est inversible dans A. En réduisant modulo I les deux relations plus haut, il vient que $a(g) - \psi_1(g)$ et $d(g) - \psi_2(g)$ sont solutions du système $x + y = 0$ et $\bar{\lambda}_1 x + \bar{\lambda}_2 y = 0$ qui est inversible dans A/I, car dans A/m. Cela conclut le premier point. Le second point en découle, car

$$a(gg') = a(g)a(g') + b(g)c(g'). \tag{2}$$

□

Notons $\bar{b}$ l'image de b dans B/IB. Un conséquence immédiate du lemme 1 est le :

Lemme 2. *L'application*

$$G \longrightarrow \begin{pmatrix} (A/I)^* & B/IB \\ 0 & (A/I)^* \end{pmatrix}, \quad g \mapsto \begin{pmatrix} \psi_1(g) & \overline{b(g)} \\ 0 & \psi_2(g) \end{pmatrix},$$

est un morphisme de groupes.

En particulier, on dispose d'une une application A-linéaire

$$\mathfrak{j} : \mathrm{Hom}_A(B/IB, A/I) \to \mathrm{Ext}^1_{(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1),$$

associant à $f \in \mathrm{Hom}_A(B/IB, A/I)$ le 1-cocyle $g \mapsto f(\overline{b(g)})$. Posons $H := \ker(\psi_1/\psi_2)$.

Lemme 3. *B/IB est engendré comme A-module par $\{\overline{b(h)},\, h \in H\}$, et $\mathfrak{j}$ est injective.*

Preuve : Soit g dans G, un calcul montre que

$$\overline{b(sgs^{-1}g^{-1})} = \frac{\overline{b(g)}}{\psi_2(g)}(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1)$$

dans B/IB. Comme $sgs^{-1}g^{-1} \in H$, cela conclut le premier point. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{j})$, $g \mapsto f(\overline{b(g)})$ est un cobord, donc trivial restreint à H. Donc f est nulle sur $A.\overline{b(H)} = B/IB$ par le premier point. $\square$

Lemme 4. *Si les ρ_j sont semi-simples, B est un A-module de type fini.*

Preuve : Comme le A-module B est un quotient de $A[\rho(G)]$, il suffit de montrer que ce dernier est de type fini sur A. Comme $A[\rho(G)] \subset \prod_j \rho_j(A[G])$, on peut supposer que K est un corps. Comme ρ est semi-simple, la trace de $M_2(K)$ est non dégénérée sur $K[\rho(G)]$. De plus, elle est à valeurs dans A sur le sous-A-module $R := A[\rho(G)]$. Comme A est noethérien et R engendre $K[\rho(G)]$ comme K-espace vectoriel, un argument standard montre que R est de type fini. $\square$

Enfin, il est clair que si ρ_j est irréductible, $\mathrm{Im}(B \to K_j)$ est non nulle. Cela achève la preuve de la proposition 2. $\square$

2.3. Remarquons que le lemme 1 montre que $BC \subset m$ est le plus grand idéal J de A ayant la propriété que T mod J est somme de deux caractères. On l'appellera *l'idéal de réductibilité de T*.

Corollaire 1. *Supposons les ρ_j semi-simples.*

(a) Si $\dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_2, \chi_1)) = 1$, alors ρ est définie sur A. Si de plus l'annulateur de B est nul, B est libre de rang 1 sur A, et il existe une base adaptée à s dans laquelle $B = A$.

(b) Si l'idéal de réductibilité de T est l'idéal maximal de A et si $\dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_1, \chi_2)) = \dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_2, \chi_1)) = 1$, alors A est de valuation discrète.

Preuve : Prouvons le (a). Si l'on applique la proposition 2 à l'idéal maximal de A, il vient que $\dim_k B \otimes_A k \leq \dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_2, \chi_1)) = 1$. Comme B est de type fini par le lemme 4, $\dim_k B \otimes_A k = 1$ et donc B est un A-module monogène par Nakayama, ainsi donc que son image B_j dans K_j. Posons $f_j = 1$ si $B_j = 0$ et $(f_j) = B_j$ sinon, on a $f := (f_j) \in K^*$. Ainsi, quitte à remplacer e_2 par $f^{-1}e_2$, on conclut le (a).

Si pour $(i_1, i_2) = (1, 2)$ et $(2, 1)$ on a $\dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_{i_1}, \chi_{i_2})) = 1$, alors pour les mêmes raisons que plus haut, B et C sont monogènes, ainsi donc que $m = BC$ par hypothèse. L'anneau A étant réduit, il est donc de valuation discrète. □

2.4. En vue d'appliquer les résultats de cette section à un groupe topologique, nous avons besoin d'un sorite de topologie. On conserve les hypothèses du §2.1 et on suppose que G est un groupe topologique. On suppose de plus que A est un anneau topologique séparé ayant la propriété suivante : (TOP) le foncteur d'oubli des A-modules topologiques séparés de type fini vers les A-modules de type fini admet une section pleinement fidèle munissant A de sa topologie. On fixe une telle section, de sorte que tout A-module de type fini est muni de la topologie donnée par cette section. En particulier, si I est un idéal de A, on dispose d'une topologie sur A/I. Noter qu'un sous-A-module N d'un A-module M de type fini est automatiquement fermé, car M/N est séparé et $M \to M/N$ continue.

Proposition 3. *Supposons que $T : G \to A$ est continu et que les ρ_j sont semi-simples. Alors les $\psi_i : G \to (A/I)^*$ sont continus et l'application*

$$\mathrm{j} : \mathrm{Hom}_A(B/IB, A/I) \to \mathrm{Ext}^1_{(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1)$$

a son image dans $\mathrm{Ext}^1_{cont,(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1)$.

Preuve : D'après le lemme 1 et sa preuve, ψ_1 coïncide avec a mod I et

$$a(g) = \frac{T(sg) - \lambda_2 T(g)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Ainsi, $g \mapsto a(g), \psi_1(g)$ et $\psi_1(g)^{-1} = \psi_1(g^{-1})$ sont continus, car T l'est et par (TOP). Il en va de même pour ψ_2. Cela a donc un sens de parler d'extensions continues entre ψ_2 et ψ_1. Comme B est de type fini par le lemme 4, et que toute application A-linéaire $B \to A/I$ est continue par (TOP), il ne reste qu'à montrer que $b : G \to B$ est continue. Soit B_j l'image de B dans K_j ; c'est un quotient de B, donc de type fini sur A. L'application canonique $B \to \prod_j B_j$ est injective et c'est un homéomorphisme sur son image. Il suffit donc de vérifier que $g \mapsto b(g)_j$ est continue. On peut supposer que K est un corps, puis que ρ est irréductible, car sinon $C = B = 0$. Soit $g' \in G$ tel que $c(g') \neq 0$, la multiplication par $c(g')$ induit un homéomorphisme de B sur son image dans A. Il suffit donc de vérifier que $g \mapsto c(g')b(g) \in A$ est continue, ce qui découle de ce que a l'est et de la formule (2). □

Une preuve identique à celle du corollaire 1 démontre alors le :

Corollaire 2. *Sous les hypothèses de la proposition 3, le corollaire 1 reste vrai s'il on remplace dans son énoncé les groupes d'extensions mis en jeu par leurs sous-groupes d'extensions continues.*

Exemple : Soient k un corps local non archimédien, X un k-affinoide réduit, $x \in X$ et A l'anneau local rigide en x. On rappelle que l'anneau A est limite inductive filtrante des $A(U)$ où U est un ouvert affinoide de X contenant x. C'est un anneau local noethérien réduit ([BGR, §7.3.2]) et hensélien ([Be, §2.1]). On le munit de la topologie localement convexe la plus fine telle que les $A(U) \to A$ soient continues (cf. [Sc, ch. I, E]), $A(U)$ étant muni de sa topologie de k-espace de Banach. En particulier, si m est l'idéal maximal de A, la projection canonique $A \to A/m^n$ est continue. Cette topologie fait de A une k-algèbre topologique, elle est séparée car A/m^n l'est et $\bigcap_{n\geq 0} m^n = \{0\}$. Si M est un A-module de type fini et $f : A^n \to M$ une surjection A-linéaire, la topologie localement convexe quotient de M le munit d'une structure de A-module topologique qui est en fait indépendante de la surjection f choisie, et séparée. On voit facilement que toute application linéaire entre deux A-modules de type fini est continue. Ainsi, A satisfait (TOP).

3. La pseudo-représentation portée par $\mathcal{C}$.

3.1. Soient G le groupe de Galois de la sous-extension maximale de $\overline{\mathbb{Q}}$ non ramifiée hors de p, $D \subset G$ un groupe de décomposition en p attaché à un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ que l'on fixe. On note $Z \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ l'ensemble des points classiques de $\mathcal{C}$. Par définition $z \in Z$ si, et seulement si, $\chi(z)$ est le système de valeurs propres d'une forme modulaire classique sur $X_1(p^n)$ pour un certain entier $n \geq 0$. Les formes modulaires apparaissant ainsi sur $\mathcal{C}$ sont exactement celles qui ne sont pas supercuspidales en p. On sait que l'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}$ ainsi obtenu est Zariski-dense dans $\mathcal{C}$, sans point isolé pour la topologie p-adique.

3.2. À chaque $z \in Z$ est associée, par les travaux de Eichler-Shimura, Igusa, Deligne, une unique représentation semi-simple continue

$$\rho_z : G \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p),$$

ayant la propriété que la trace d'un Frobenius géométrique en $l \neq p$ est $T_l(x)$. La compacité relative de l'image de $\mathcal{H}$ dans $A(\mathcal{C})$, et le fait que $A(\mathcal{C})$ est réduit, entraînent que la trace $x \mapsto \mathrm{tr}(\rho_x)$ de ces représentations se prolonge analytiquement en une unique pseudo-représentation continue de dimension 2 :

$$T : G \to A(\mathcal{C}),$$

satisfaisant $T(F_l) = T_l$. En particulier, pour tout $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, il existe[4] une unique représentation *semi-simple* continue $\rho_x : G \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ dont la trace est l'évaluation en x de T. Un point $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est uniquement déterminé par le couple $(\rho_x, U_p(x))$.

[4]En fait, si $x \in \mathcal{C}(F)$, alors ρ_x est définie sur F. Cela vient de ce que $\rho_x(\mathrm{Frob}_\infty)$ a pour polynôme caractéristique $(X-1)(X+1)$, donc l'obstruction à ne pas être définie sur F est nulle.

3.3. Si $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, on sait que le polynôme de Sen de $(\rho_x)_{|D}$ est $T(T - d\kappa(x) + 1)$ (voir l'introduction pour nos conventions), où $d\kappa(x)$ désigne la dérivée en 1 du caractère de $\mathbb{Z}_p^*$ associé à $\kappa(x)$. Par les travaux de Kisin ([K, thm. 6.3]), on a

$$D_{\mathrm{cris}}((\rho_x)_{|D})^{\varphi = U_p(x)} \neq 0.$$

4. Points réductibles de $\mathcal{C}$

4.1. **Points Eisenstein.** Commençons par définir les points *Eisenstein critiques* de $\mathcal{C}$. Soient $k \geq 2$ un entier et $\varepsilon : \mathbb{Z}_p^* \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ un caractère d'ordre fini tel que $\varepsilon(-1) = (-1)^k$, de sorte que $w = (x \mapsto x^k \varepsilon(x)) \in \mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On suppose que $k \neq 2$ si $\varepsilon = 1$. Il existe (cf. [Mi, thm. 4.7.1]) une unique forme modulaire classique, propre pour $\mathcal{H}$, de q-développement

$$E_w^{crit} := q + \sum_{n \geq 2} a_n q^n,\ \ a_p = p^{k-1},\ \ a_l = \varepsilon(l) + l^{k-1} \ \ si \ \ l \neq p.$$

Soit $F := \mathbb{Q}_p(\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$. La forme E_w^{crit} définit donc un unique F-point de $\mathcal{C}$ que l'on note x_w, on a $\kappa(x_w) = w$. Il est clair que $\rho_{x_w} = \varepsilon \oplus F(1-k)$. Un tel point de $\mathcal{C}$ sera dit *Eisenstein critique*.

Soit $\zeta_p : \mathcal{W}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{A}^1$ la fonction zêta p-adique de Kubota-Leopold. Si $w \neq 1$, Il existe une unique forme modulaire surconvergente, ordinaire et propre pour $\mathcal{H}$, de q-développement (cf. [Co1, §B1]) :

$$E_w^{\mathrm{ord}} := \zeta_p(w)/2 + q + \sum_{n \geq 2} a_n q^n,\ \ a_p = 1,\ \ a_l = 1 + w(l) l^{-1} \ \ si \ \ l \neq p.$$

On pose de plus $E_1^{\mathrm{ord}} := 1$. Soit $F := \mathbb{Q}_p(w(\mathbb{Z}_p^*))$. On notera y_w le F-point de $\mathcal{C}$ (en fait du lieu ordinaire $\mathcal{C}^{\mathrm{ord}}$) correspondant. Un point de la forme y_w sera dit *Eisenstein ordinaire*. Les y_w sont en fait l'ensemble des points d'un fermé Zariski $\mathcal{C}^{\mathrm{eis}} \subset \mathcal{C}^{\mathrm{ord}}$, la *droite Eisenstein* (cf. [CM, §2.2]), tel que κ induit un isomorphisme $\mathcal{C}^{\mathrm{eis}} \to \mathcal{W}$.

Remarques :

i) Un point $y_w \in \mathcal{C}^{\mathrm{eis}}$ est dans $\mathcal{C}^0$ si, et seulement si, $\zeta_p(w) = 0$. Ainsi, $\mathcal{C}^{\mathrm{eis}} \cap \mathcal{C}^0$ est non vide si, et seulement si, p est un nombre premier irrégulier. En général, $\mathcal{C}^{\mathrm{eis}} \cap \mathcal{C}^0$ est fini car ζ_p n'a qu'un nombre fini de zéros sur $\mathcal{W}$.

ii) Rappelons (cf. §1.3, [CM, §3.6])) que $\mathcal{C}^{\mathrm{ord}} = \mathcal{C}^{\mathrm{eis}} \cup \mathcal{C}^{0,\mathrm{ord}}$ est un ouvert fermé de $\mathcal{C}$, et que $\mathcal{C}^{0,\mathrm{ord}}$ est d'équidimension 1. Comme $\mathcal{C}^{\mathrm{eis}} \simeq \mathcal{W}$ est lisse, un point $x \in \mathcal{C}^{\mathrm{eis}}$ est singulier vu comme point de $\mathcal{C}$ si, et seulement si, il est dans $\mathcal{C}^0$, ou encore si, et seulement si, κ est de degré > 1 en x. Vérifions que cela ne se produit pas aux points classiques de $\mathcal{C}^{\mathrm{eis}}$, i.e. aux y_w tels que $w = (x \mapsto x^k \varepsilon(x))$ avec $k \geq 1$ et $\varepsilon(-1) = (-1)^k$. Il suffit de vérifier que $\zeta_p(w) = L_p(1-k, \varepsilon)$ (cf. [Co1, §B1] pour la notation) est non nul, mais cela vient de ce que la fonction L de Dirichlet $L(s, \varepsilon)$ ne s'annule pas en $s = k$ si $k \geq 1$ et $\varepsilon(-1) = (-1)^k$.

4.2. **Points réductibles de $\mathcal{C}$.** Un point $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est dit réductible si ρ_x l'est.

Proposition 4. *L'ensemble des points réductibles de $\mathcal{C}$ est exactement l'ensemble des points Eisenstein.*

Preuve : Soit x un point de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\rho_x = \chi_1 + \chi_2$ est somme de deux caractères (automatiquement continus). D'après [K, thm. 6.3], pour $i = 1$ ou 2, on a $D_{\mathrm{cris}}(\chi_i)^{\varphi = U_p(x)} \neq 0$. Supposons que $i = 1$, quitte à les renuméroter. Le caractère $(\chi_1)_{|D}$ est donc cristallin de poids $k - 1 := v(U_p(x)) \in \mathbb{N}$ (car $|U_p(x)| \leq 1$ pour tout x dans $\mathcal{C}$). D'autre part, χ_1 est non ramifié hors de p, c'est donc $\mathbb{Q}_p(1-k)$. Comme les poids de Hodge-Tate-Sen de ρ_x sont 0 et $d\kappa(x) - 1$, il y a deux possibilités :

- Si $v(U_p(x)) > 0$, alors $k \geq 2$. Il vient que $\varepsilon := \chi_2$ est un caractère de poids 0, donc d'ordre fini. Comme E_2 n'est pas surconvergente d'après [CGJ] (cf. aussi [SU, rem 4.5]), $k = 2 \Rightarrow \varepsilon \neq 1$. Ainsi, x est de la forme x_w.

- Si $v(U_p(x)) = 0$, alors χ_1 est le caractère trivial et donc $\chi_2 = \det(\rho_x)$. Ainsi, x est de la forme y_w. $\square$

La démonstration ci-dessus montre de plus que

Proposition 5. *L'ensemble des $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tels que $v(U_p(x)) \neq 0$ et $(\rho_x)_{|D}$ est réductible est discret, composé de x tels que $v(U_p(x)) = d\kappa(x) - 1$ est un entier strictement positif.*

5. Lissité de $\mathcal{C}$ aux points réductibles non ordinaires

5.1. **Rappels de cohomologie galoisienne.** Soient $k \geq 2$ un entier, $\varepsilon : \mathbb{Z}_p^* \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ un caractère d'ordre fini tel que $\varepsilon(-1) = (-1)^k$, et $F := \mathbb{Q}_p(\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$. On considère le caractère de G

$$\chi := F(k-1) \otimes \varepsilon,$$

et on fait l'hypothèse que $\chi \neq F(1)$. On rappelle le cas particulier suivant connu des conjectures de Bloch-Kato (cf. [BK], [FP]) pour les fonctions L de Dirichlet[5] :

$$\begin{array}{rcccl} \dim_F H^1_f(\mathbb{Q}, \chi) & = & 1 & = & \mathrm{ord}_{s=2-k} L(s, \varepsilon^{-1}) \\ \dim_F H^1_f(\mathbb{Q}, \chi^{-1}) & = & 0 & = & \mathrm{ord}_{s=k} L(s, \varepsilon) \end{array}$$

Les égalités de droite proviennent de l'équation fonctionnelle des caractères de Dirichlet, et de ce que $L(s, \varepsilon^{-1})$ n'a ni zéro ni pôle en $s = n$ entier si $\varepsilon \neq 1$ et $n \geq 1$ ou si $\varepsilon = 1$ et $n \geq 2$. Les égalités de gauche découlent de manière standard des travaux de Soulé ([So]). Notons que comme $k \geq 2$ et $\chi \neq \mathbb{Q}_p(1)$, $H^1_f(\mathbb{Q}_p, \chi) = H^1(\mathbb{Q}_p, \chi)$ est de dimension 1 et $H^1_f(\mathbb{Q}_p, \chi^{-1}) = 0$. En particulier, $H^1_f(\mathbb{Q}, \chi) = H^1(G, \chi)$ et $H^1_f(\mathbb{Q}, \chi^{-1}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \chi^{-1}) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_\mathrm{p}, \chi^{-1}))$. Il est clair d'autre part que $H^1(G, \chi^{-1})$ est non nul (cela découle par exemple de la formule pour la caractéristique d'Euler globale). En récapitulant, on obtient la :

[5]Tous les groupes de cohomologie galoisienne considérés dans cette section sont sous-entendu en cohomologie continue.

Proposition 6. *i) Pour $H = G$ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on a*

$$\dim_F(\mathrm{Ext}^1_{cont,F[H]}(\varepsilon, F(1-k))) = \dim_F(\mathrm{Ext}^1_{cont,F[H]}(F(1-k), \varepsilon)) = 1.$$

ii) L'application de restriction

$$\mathrm{Ext}^1_{cont,F[G]}(\varepsilon, F(1-k)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{cont,F[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(\varepsilon, F(1-k))$$

est un isomorphisme.

5.2. Dans ce qui suit, on se fixe un point Eisenstein critique $x := x_w$, $w : z \mapsto z^k\varepsilon(z)$. On a $x_w \in \mathcal{C}(F)$ où $F = \mathbb{Q}_p(\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$. On choisit un F-voisinage Ω de x comme en §1.2 proposition 1. Soit A l'anneau local rigide de Ω en x_w et nommons encore $T : G \to A$ le pseudo-caractère induit par T. L'anneau A est une F-algèbre topologique (cf. §2.4) et $T : G \to A$ est continu par définition de la topologie sur A et §3.2.

Si m désigne l'idéal maximal de A, on a $A/m = F$ et par construction

$$T \bmod m = \varepsilon + F(1-k),$$

de sorte que T est résiduellement somme de deux caractères, distincts une fois restreints à D. De plus, d'après la théorie des pseudo-représentations de Wiles, il existe une représentation $\rho = (\rho_j) : G \to \mathrm{GL}_2(K)$ de trace T, où K est l'anneau total de fractions de A (cf. §2.1) et les ρ_j sont semi-simples. On pose $\chi_1 := F(1-k)$ et $\chi_2 := \varepsilon$.

Fixons un $s \in D$ comme au §2.1 et choisissons une base s-adaptée de K^2. Cette base nous permet de définir B, C (resp. B_p, C_p) comme en §2.1 associés à ρ (resp. $\rho_{|D}$). On a $B_p \subset B$ et $C_p \subset C$.

Lemme 5.

(a) Les $(\rho_j)_{|D}$ sont irréductibles,

(b) ρ est définie sur A, et quitte à changer de base adaptée à s, $B_p = B = A$. De plus, C_p et C sont libres de rang 1 sur A.

Preuve : Vérifions le (a). Soient $A(\Omega_j)$ l'affinoide image de $A(\Omega)$ dans K_j, $\Omega_j \subset \Omega$ le fermé Zariski contenant x correspondant (il est d'équidimension 1), et T_j l'image de T dans $A(\Omega_j)$. Si $(\rho_j)_{|D}$ est réductible, l'image de B_p ou C_p est nulle dans K_j. Il vient que $(T_j)_{|D}$ est identiquement somme de deux caractères, chacun à valeurs dans $A(\Omega_i)$ par le lemme 1, ce qui est absurde d'après la proposition 5.

D'après (a) et la proposition 6, le corollaire 2 (a) s'applique à ρ et nous donne une base adaptée à s dans laquelle $B = A$. En particulier, ρ est définie sur A. De même, il vient que C, B_p et C_p sont libres de rang 1 sur A. De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{cont,F[G]}(\varepsilon, F(1-k)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{cont,F[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(\varepsilon, F(1-k)) \\
\mathrm{Hom}_A(B, A/m) \arrow[u, "\mathrm{j}"] \arrow[r, "can"] & \mathrm{Hom}_A(B_p, A/m) \arrow[u, "\mathrm{j}"']
\end{tikzcd}$$

La flèche du haut est un isomorphisme entre F-espaces vectoriels de dimension 1 d'après la proposition 6, et les flèches verticales sont des isomorphismes d'après ce que l'on vient de voir. Il vient que la flèche du bas est un isomorphisme, ainsi donc que l'inclusion $B_p \subset B$ d'après le lemme de Nakayama.$\square$

5.3. On se place définitivement dans la base adaptée donnée par le lemme ci-dessus, i.e. $B_p = B = A$. En particulier, $C = BC \subset m$ (resp. $C_p = B_pC_p$) est un idéal de A : c'est l'idéal de réductibilité de T (resp. $T_{|D}$) en x_w.

Théorème 1. *A est de valuation discrète et C est l'idéal maximal de A. En particulier, $\mathcal{C}$ est lisse en x_w.*

Preuve : D'après le corollaire 2 (b), qui s'applique par le lemme 5 (a) et la proposition 6, il suffit de montrer que C est l'idéal maximal de A. Un ingrédient crucial est la conséquence suivante de [K] :

Lemme 6. *Soit $J \subset m$ un idéal de codimension finie de A, alors $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{|D} \otimes A/J)^{\varphi=U_p}$ est libre de rang 1 sur A/J.*

Preuve : Tout d'abord, notons que la trace de la représentation (à composantes génériquement semi-simples) $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A)$ tombe dans l'anneau noethérien $A(\Omega)$. Par un argument standard déjà donné dans le lemme 4, $A(\Omega)[\rho(G)]$ est de type fini. Or A est limite inductive des $A(\Omega')$ où Ω' parcourt les voisinages affinoide de x dans $\mathcal{C}$. Ainsi, quitte à rétrécir Ω on peut supposer que ρ provient d'une représentation continue

$$\rho^* : G \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega)),$$

par $A(\Omega) \to A$. Nous aurons aussi besoin d'introduire la normalisation

$$\pi : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \Omega,$$

de Ω dans son anneau total de fractions, ainsi que $\rho^{\mathrm{norm}} := \rho^* \otimes_{A(\Omega)} A(\widetilde{\Omega})$. Quitte à restreindre encore Ω contenant x, on peut supposer que :

i) $\widetilde{\Omega}$ a autant de composantes connexes que de points $y \in \pi^{-1}(\{x\})$, et que l'ideal maximal en chacun de ces points est principal, disons engendré par f_y,

ii) $U_p - p^{k-1}$ est topologiquement nilpotent dans $A(\Omega)$ et $d\kappa - 1 \in A(\Omega)^*$,

iii) il existe un idéal J^* de $A(\Omega)$ tel que $J^*A = J$ et que l'application canonique $A(\Omega)/J^* \to A/J$ est un isomorphisme.

Le polynôme de Sen (cf. [Se], ainsi que nos conventions dans l'introduction) de ρ^{norm} est $T(T - d\kappa + 1) \in A(\Omega)[T]$. On peut donc appliquer la proposition 5.4 de [K] à $X := \widetilde{\Omega}$, $Y = U_p$ et $M = A(X)^2$ muni de l'action de D via ρ^{norm}. Par (2) *loc. cit.* et [K, thm. 6.3], $\widetilde{\Omega}_{fs}$ contient tous les points de $\widetilde{\Omega}$ de poids de Hodge-Tate-Sen 0 et s, avec s non entier. Ces points sont Zariski-denses dans $\widetilde{\Omega}$ car κ est fini et plat, de sorte que $\widetilde{\Omega}_{fs} = \widetilde{\Omega}$ par le (1) de [K, prop. 5.4]. Le corollaire 5.16 de [K] (prendre $\mathcal{R} := A(\widetilde{\Omega})$) assure alors que

$$\mathcal{D} := (M \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{cris}})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p),\varphi=U_p} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}(M^*, (B^+_{\mathrm{cris}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} A(\widetilde{\Omega}))^{\varphi=U_p})$$

est un $A(\widetilde{\Omega})$-module (sans torsion, de type fini) de rang générique 1. Notons que si $f \in A(\widetilde{\Omega})$ est non diviseur de 0, alors $\mathcal{D} \cap f(M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{cris}}) = f\mathcal{D}$. En appliquant ceci aux f_y, $y \in \pi^{-1}(\{x\})$, on en déduit l'existence d'un élément de $\mathcal{D}$ induisant un morphisme :

$$h : (M/\tilde{m}M)^* \longrightarrow \prod_{y \in \pi^{-1}(\{x\})} (B^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} A(\widetilde{\Omega})/(f_y))^{\varphi = p^{k-1}}, \tag{3}$$

dont toutes les composantes sont non nulles, où $\tilde{m}$ est l'idéal de $A(\widetilde{\Omega})$ engendré par $\prod_{y \in \pi^{-1}(\{x\})} f_y$. Soit un entier r assez grand de sorte que l'idéal

$$J^{**} := m^r \cap A(\Omega)$$

soit inclus dans J^*. D'après ce que l'on vient de montrer, la déformation $\rho^{\mathrm{norm}} \otimes A(\widetilde{\Omega})/m^r$ est une h-déformation au sens de Kisin [K, §8], et ce pour l'application h donnée par (3). Il en va donc de même de $\rho^* \otimes A(\Omega)/J^{**}$ d'après [K, prop. 8.13], puis de son quotient $\rho^* \otimes A(\Omega)/J^* = \rho_{|D} \otimes A/J$. Le lemme découle alors de la proposition 8.12 de [K]. □

5.4. Terminons la preuve du théorème 1. L'idéal C est libre de rang 1 dans l'anneau local noethérien A qui est d'équidimension 1, il est donc de codimension finie d'après le Hauptidealsatz. Notons que $r := \rho \otimes A/C$ est par construction une extension

$$0 \to (A/C).\psi_1 \to r \to (A/C).\psi_2 \to 0,$$

où ψ_1 (resp. ψ_2) est la réduction modulo C de la fonction a (resp. d). Par construction, les $\psi_i : G \to (A/C)^*$ sont des caractères continus (cf. proposition 3), tels que

$$\psi_1 \bmod m \equiv F(1-k), \quad \psi_2 \bmod m \equiv \varepsilon.$$

Considérons la suite exacte de A/C-modules :

$$0 \to D_{\mathrm{cris}}((\psi_1)_{|D})^{\varphi = U_p} \to D_{\mathrm{cris}}(r_{|D})^{\varphi = U_p} \to D_{\mathrm{cris}}((\psi_2)_{|D})^{\varphi = U_p}$$

Le lemme 6 implique que le terme central est libre de rang 1. Comme ψ_2, vu comme F-représentation, est une extension successive de caractères égaux à ε et que

$$D_{\mathrm{cris}}(\varepsilon)^{\varphi = U_p(x) = p^{k-1}} = 0,$$

le terme de droite est nul. Il vient donc que $D_{\mathrm{cris}}((\psi_1)_{|D})^{\varphi = U_p}$ est libre de rang 1 sur A/C. Cela implique que $(\psi_1)_{|D}(k-1)$ est cristallin de poids 0, donc non ramifié. En particulier, le polynôme de Sen de $r_{|D}$ vaut $T(T-k+1)$, et donc $\kappa \equiv k \in A/C$, i.e. $(\kappa - k) \subset C$. De plus, comme le caractère $\psi_1(k-1)$ est d'autre part non ramifié hors de p, il est identiquement trivial, puis

$$\psi_1 = (A/C)(1-k), \ \ U_p \equiv p^{k-1} \in A/C, \ \text{ et } \ \psi_2 = \varepsilon.(A/C).$$

Le dernier point de la proposition 1 implique alors que $A/C = F$, i.e. C est l'idéal maximal de A. □

Remarques :

i) Une conséquence du lemme 5 (b) et de la première partie de la preuve du lemme 6 est que le lieu non ordinaire de $\mathcal{C}$ est admissiblement recouvert par des ouverts affinoides sur lesquels T est la trace d'une vraie représentation de G (c'est aussi une conséquence simple du théorème 1, cf. la remarque suivant [CM, thm. 5.1.2]).

ii) Le théorème 1 montre que le diviseur de réductibilité de T sur le lieu non ordinaire de $\mathcal{C}$ est réduit. Est-il celui d'une fonction globale ?

6. Détermination de C_p et régulateurs p-adiques

6.1. Soit $x_w \in \mathcal{C}(F)$ un point Eisenstein critique comme dans la section précédente. On reprend de plus les notations précédentes pour A et C_p. Soient $\chi = F(k-1) \otimes \varepsilon$ le caractère de G correspondant à $w \in \mathcal{W}(F)$, et $w^* := (z \mapsto z^{2-k}\varepsilon^{-1}(z))$ le poids du point Eisenstein ordinaire y_{w^*} de $\mathcal{C}(F)$ jumeau à x_w.

Théorème 2. *$C_p = (\kappa - k)$ et κ a même degré en x_w qu'en y_{w^*}.*

Preuve : La démonstration du §5.4 ci-dessus appliquée à C_p plutôt qu'à C montre encore que $(\kappa - k) \subset C_p$. Nous avons donc que $(\kappa - k) \subset C_p = B_p C_p$, ce dernier étant l'idéal de A de réductibilité de $T_{|D}$. D'après la remarque débutant le §2.3, il suffit donc de montrer que $T : D \to A/(\kappa - k) = \mathcal{H}(x_w)$ est somme de deux caractères. Le cas limite du critère de classicité de Coleman [Co2, cor. 7.2.2], [Co3], montre que l'opérateur θ^{k-1} induit un isomorphisme $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} F$-équivariant :

$$M(y_{w^*}) \otimes_F \nu^{k-1} \xrightarrow{\sim} M(x_w), \tag{4}$$

où $\nu : \mathcal{H} \to F$ est le morphisme d'anneaux défini par $T_l \mapsto l$, $U_p \mapsto p$. En particulier, vue la proposition 1 b), cela prouve la seconde assertion du théorème et montre que l'on dispose d'un isomorphisme de F-algèbres locales

$$\mathcal{H}(y_{w*}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(x_w),$$

qui est un morphisme de $\mathcal{H}$-algèbres s'il on tord l'application naturelle $\mathcal{H} \to \mathcal{H}(y_{w*})$ par ν^{k-1}. D'après le théorème de Cebotarev, on en déduit que via l'identification ci-dessus, les pseudo-caractères déduits de T par évaluations, $T : G \to \mathcal{H}(x_w)$ et $T(1-k) : G \to \mathcal{H}(y_{w^*})$, sont égaux. Mais sur le lieu ordinaire $\mathcal{C}^{\mathrm{ord}} \subset \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$, qui est un ouvert admissible de $\mathcal{C}$ contenant y_{w^*}, $T_{|D}$ est réductible. En effet, il est même somme du caractère non ramifié $\chi : D \to A(\mathcal{C})^*$ envoyant un Frobenius géométrique sur U_p et de $\chi^{-1}\det(T)$. Cela conclut. $\square$

6.2. Il se trouve que pour démontrer la première assertion du théorème 2, i.e. que $(\rho \otimes A/(\kappa - k))_{|D}$ admet une droite stable facteur direct, on peut se passer du critère de Coleman, à l'aide du :

Lemme 7. *Soient R une F-algèbre locale artinienne de corps résiduel $R/m = F$, et V un R-module libre muni d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On suppose que :*

i) V/mV admet 0 pour plus grand poids de Hodge-Tate et $\dim_F(D_{\mathrm{DR}}(V/mV)) = 1$,

ii) $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ et $D_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$ sont libres de rang 1 sur R.

Alors $V^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est libre de rang 1 sur R.

Preuve : En appliquant $(- \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ à la suite exacte fondamentale, on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow V^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \longrightarrow D_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \longrightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{DR}}/B_{\mathrm{DR}}^+)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}.$$

Par hypothèse sur $D_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$, il suffit pour conclure de montrer que le module filtré $D_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$ n'admet que le poids 0. Il suffit encore de démontrer la même chose pour $D_{\mathrm{DR}}(V)$. Comme 0 est le plus grand poids de Hodge-Tate de V, le théorème de Tate sur la cohomologie des $\mathbb{C}_p(i)$ entraîne que l'application naturelle

$$\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{DR}}(V)) \longrightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$$

est un isomorphisme, et donc que le premier est libre de rang 1 sur R. Mais par hypothèse sur $D_{\mathrm{DR}}(V/mV)$ et l'exactitude à gauche du foncteur D_{DR}, il vient que $\dim_F D_{\mathrm{DR}}(V) \leq \dim_F R$. Ainsi, $D_{\mathrm{DR}}(V) = \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{DR}}(V))$, ce qui conclut. $\square$

Pour conclure, on applique ce lemme à $R := A/(\kappa - k)$ et $V := \rho_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \otimes R(\psi)$, où ψ est le caractère cristallin R-valué de Frobenius U_p^{-1} (et donc de poids constant égal à $1-k$). La représentation V satisfait $D_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$ d'après le lemme 6, et son polynôme de Sen est $T(T+k-1) \in R[T]$ par définition de R, de sorte qu'elle satisfait ii). La condition i) est aussi satisfaite, car V/mV est une extension non triviale de $F(k-1) \otimes \varepsilon$ par F, donc non de De Rham.

6.3. Il ne semble cependant pas possible d'en déduire que $\rho \otimes A/C_p$ est constante, i.e. que C_p est l'idéal maximal de A. Cela vient de ce que l'on ne sait pas si le morphisme régulateur $H^1(G, \chi) \to H^1(\mathbb{Q}_p, \chi)$ est trivial ou non. Concernant ce morphisme on a en fait le :

Théorème 3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) κ *est étale en* x_w,

i') $\dim_F M(x_w) = 1$,

ii) L'application naturelle $H^1(G, \chi) \to H^1(\mathbb{Q}_p, \chi)$ *est un isomorphisme,*

iii) $\zeta_p(w^*) \neq 0$.

Preuve : On a déjà vu que i) est équivalent à i') (cf. proposition 1 b)). De plus, on montre comme dans le lemme 5 que ii) est équivalent à ce que $C_p = C$. Mais ceci est équivalent à ce que $(\kappa - k)$ soit l'idéal maximal de A d'après les théorèmes 1 et 2. Cela montre l'équivalence de i) et ii). L'équivalence entre ii) et iii) est bien connue, et découle de la conjecture principale d'Iwasawa démontrée dans [MW], nous allons la redémontrer ici en vérifiant celle de i) et iii). D'après (4), κ est de degré 1 (i.e. étale) en x_{w^*} si, et seulement si, κ est de degré 1 en $y_{w^*} \in \mathcal{C}^{\mathrm{eis}}$. Mais d'après les remarques 4.1 i) et ii), ceci se produit si, et seulement si, $\zeta_p(w^*) \neq 0$. $\square$

Il est communément conjecturé que les propriétés ii) et iii) équivalentes ci-dessus sont satisfaites, ainsi donc que i), i'). Si p est un nombre premier régulier, elles sont toujours satisfaites.

Références

[Be] V. Berkovich *Étale cohomology for nonarchimedian analytic spaces*
Publications mathématiques de l'IHES 78 (1993)

[BK] S. Bloch & K. Kato *L-functions and Tamagawa numbers of motives*
Progr. Math. 86, The Grothendieck Festschrift I, pages 330-400 (1990)

[BGR] S. Bosch, U. Guntzer & R. Remmert *Non archimedian analysis*
Grundlehren der math. **261** (1982)

[Bu] K.Buzzard *Eigenvarieties*
En préparation.

[Ch1] G. Chenevier *Familles p-adiques de formes automorphes et applications aux conjectures de Bloch-Kato*, Thèse de l'université Paris 7 (2003)

[Ch2] G. Chenevier *Une correspondance de Jacquet-Langlands p-adique*
À paraître à Duke Math. Journal.

[Co1] R. Coleman *P-adic Banach spaces & families of modular forms*
Inventiones math. 127, pages 417-479 (1997)

[Co2] R. Coleman *Classical and overconvergent modular forms*
Inventiones math. 124, 214-241 (1996)

[Co3] R. Coleman *Classical and overconvergent modular forms of higher level*
Journal de théorie des nombres de Bordeaux 9, 395-403 (1997)

[CGJ] R. Coleman, F. Gouvêa & N. Jochnowitz *E_2, Θ, and overconvergence*
Int. Math. Res. Not. 1995, No.1, pages 23-41 (1995)

[CM] R. Coleman & B. Mazur *The Eigencurve*
Proc. Durham, 1996. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 254, (1998)

[FP] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou *Autour des conjectures de Bloch-Kato : cohomologie Galoisienne et valeurs de fonctions L*, Motives part 1, pages 599-706 (1994)

[HP] G. Harder & R. Pink *Modular konstruierte unverzweigte abelsche p-Erweiterungen von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ und die Struktur ihrer Galois Gruppen*, Math. Nachr. 159 pages 83-99 (1992)

[K] M. Kisin *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*
Inventiones math. 153, pages 363-454 (2003)

[Ma] B. Mazur *The theme of p-adic variation*
Math. : Frontiers and perspectives, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax & B. Mazur Ed., AMS (2000)

[MW] B. Mazur & A. Wiles *The class field of abelian extensions of $\mathbb{Q}$*
Inventiones math. 76 no.2, pages 179-330 (1984)

[Mi] T. Miyake *Introduction to modular forms*
Springer Verlag (1989)

[Sc] P. Schneider *Nonarchimedian functional analysis*
Springer Monographs in Math. (2001)

[Se] S. Sen *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*
Bull. Soc. math. France, 121, pages 13-34 (1993)

[SU] C. Skinner & E. Urban Sur les déformations p-adiques des formes de Saito-Kurokawa
C.R.A.S Paris I 335, pages 581-586 (2002). Version complète à paraître au J.I.M.J.

[So] C. Soulé *On higher p-adic regulator*
Lecture Notes in Math. 854, pages 372-401 (1981)

[W] A. Wiles *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*
Inventiones math. 94, pages 529-573 (1988)