SUR LA VARIÉTÉ DES CARACTÈRES p-ADIQUE DE $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$

GAËTAN CHENEVIER

Soient[1] K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et X_n la variété des caractères continus de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ de dimension n à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Le but principal de cette note est de démontrer le :

Théorème : *(i)* X_n *est équidimensionnel de dimension* $[K:\mathbb{Q}_p]n^2+1$.

(ii) L'ouvert Zariski $X_n^{\mathrm{irr}} \subset X_n$ *paramétrant les représentations irréductibles est dense dans* X_n.

(iii) Si $n>2$ *ou* $K \neq \mathbb{Q}_p$, X_n^{irr} *coïncide exactement avec le lieu régulier de* X_n.

(iv) Quand $n=2$ *et* $K=\mathbb{Q}_p$, *le lieu singulier de* X_2 *est celui paramétrant les torsions par un caractère de* $1 \oplus \omega$ *où* ω *est le caractère cyclotomique.*

Nous décrivons aussi complètement les composantes connexes de X_2 qui ne sont pas résiduellement scalaires quand $K=\mathbb{Q}_2$ au chapitre 4. Afin de traiter le cas de la représentation triviale de X_2 dans l'énoncé ci-dessus nous utilisons une description générale des déformations à l'ordre 1 du caractère triviale de dimension 2 (pour un groupe quelconque), démontrée au chapitre 3.

Proposition : *Soient* G *un groupe topologique,* A *un anneau topologique commutatif unitaire dans lequel* 2 *est inversible, et soit* T *le* A*-module des déformations à* $A[\varepsilon]$ *du pseudocaractère triviale de dimension* 2 *de* G *à valeurs dans* A*. Alors il existe des sous-*A*-modules canoniques* $T'' \subset T' \subset T$ *tels que*

$$T'' \simeq \mathrm{Hom}(G,A), \;\; T'/T'' \simeq \mathrm{Sym}^2(G,A), \;\; T/T' \hookrightarrow \mathrm{Alt}^3(G,A).$$

Nous terminons en discutant en appendice d'une relation entre l'espace T ci-dessus et l'espace des fonctions $f: G \to A$ vérifiant *l'identité du parallélogramme*

$$f(gh^{-1})+f(gh)=2(f(g)+f(h)) \;\; \forall g,h \in G.$$

Nous déterminons toutes ces fonctions dans certains cas particuliers amusants. Nous donnons enfin une variante du théorème principal ci-dessus quand G est remplacé par un groupe (discret) libre à un nombre fini de générateurs.

1. Rappels sur la variété des caractères p-adiques

Soient G un groupe profini, p un nombre premier et $n \geq 1$ un entier. On suppose que pour tout sous-groupe ouvert $H \subset G$, l'ensemble des homomorphismes continus $H \to \mathbb{F}_p$ est fini. Soit $X_n(G)$, où simplement

$$X_n$$

[1]Version préliminaire de décembre 2009, dernières corrections : juillet 2010. L'auteur est financé par le C.N.R.S. Nous remercions Joël Bellaïche de nous avoir signalé un argument erroné dans une version précédente de cette note.

l'espace des classes d'isomorphie de représentations continues semi-simples de G de dimension n à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On rappelle suivant [Ch1] que X_n est un espace rigide sur $\mathbb{Q}_p$ (disons au sens de Tate) dont les points à valeurs dans une $\mathbb{Q}_p$-algèbre affinoide S quelconque sont exactement l'ensemble des pseudo-caractères continus $G \to S$ de dimension n. Il s'agit là de pseudo-caractères au sens de R. Taylor et Rouquier, qui sont des substituts abstraits pour les traces des représentations usuelles fournis par la théorie des invariants. Leur usage est imposé par les problèmes de représentabilité inhérents à la théorie des espaces de modules de classes d'isomorphies de représentations d'un groupe. Ils peuvent aussi être vus comme une théorie des invariants explicite dans ce cadre, qui repose de manière fondamentale sur des travaux de Procesi et de Vaccarino. Nous renvoyons à [BCh2, Ch. 1], [Ch1] et à [Ch2], pour une introduction à ces points de vue. Nous décrivons ci-dessous brièvement quelques propriétés de X_n.

Tout d'abord, les $\overline{\mathbb{Q}}_p$-points de X_n sont en bijection naturelle avec l'ensemble des classes de conjugaison de représentations semi-simples et continues $G \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Si $x \in X_n$, on note $k(x)$ son corps résiduel, qui est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et

$$\rho_x : G \to \mathrm{GL}_n(\overline{k(x)})$$

la représentation semi-simple (de trace dans $k(x)$) associée. Si $\mathrm{Tr} : G \to \mathcal{O}(X_n)$ désigne le pseudo-caractère continu universel de dimension n, son évaluation Tr_x en $x \in X_n$ satisfait alors $\mathrm{Tr}_x = \mathrm{trace}(\rho_x)$.

Appliquant la propriété universelle de X_n aux épaississements infinitésimaux d'un point, il vient que pour tout $x \in X_n$, $\widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x}$ pro-représente de manère naturelle le foncteur des pseudo-déformations continues de $\mathrm{trace}(\rho_x)$ aux $\mathbb{Q}_p$-algèbres artiniennes locales de corps résiduel identifié à $k(x)$. En particulier, si ρ_x est irréductible, et si L est une extension finie de $k(x)$ surlaquelle ρ_x est définie, alors $\widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x} \otimes_{k(x)} L$ pro-représente de manère naturelle le foncteur des déformations continues de ρ_x (vue sur L) aux $\mathbb{Q}_p$-algèbres artiniennes locales de corps résiduel identifié à L ainsi qu'il a été défini par Mazur.

Globalement, l'espace X_n est une réunion disjointe admissible d'ouverts admissibles

$$X_n = \coprod_{r \in \overline{\mathrm{Irr}}_n(G)} X_n(r)$$

où $\overline{\mathrm{Irr}}_n(G)$ parcourt les représentations semi-simples continues $r : G \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ considérées modulo isomorphisme et action du Frobenius absolu de $\overline{\mathbb{F}}_p$ sur les coefficients. Chaque $X_n(r)$ peut être réalisé comme un fermé de la boule unité ouverte sur $\mathbb{Q}_p$ d'une certaine dimension. C'est aussi la fibre générique analytifiée de la pseudo-déformation pro-universelle continue de r (quand $p \leq n$, voir [Ch1]).

On designe par $X_n^{\mathrm{irr}} \subset X_n$ l'ouvert Zariski paramétrant les représentations absolument irreductibles, i.e. les x tels que ρ_x est irréductible. Soient deux entiers non nuls a et b tels que $a + b = n$. Si S est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre affinoide et si $T_i : G \to S$, $i = 1, 2$, sont deux pseudo-caractères continus de dimensions respectives a et b, alors $T_1 + T_2 : G \to S$ est un pseudo-caractère continu de dimension n. Cela définit un morphisme canonique

$$\iota_{a,b} : X_a \times X_b \longrightarrow X_n.$$

Ensemblistement, on a $X_n \backslash X_n^{\mathrm{irr}} = \bigcup_{a+b=n} \iota_{a,b}(X_a \times X_b)$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1. *Soient $a, b \geq 1$ et $(u, v) \in X_a \times X_b$ tels que ρ_u et ρ_v soient irréductibles non isomorphes. Alors il existe un ouvert affinoide $\Omega \subset X_n$ contenant $\iota_{a,b}(u, v)$ tel que $\iota_{a,b} : (X_a \times X_b) \cap \iota_{a,b}^{-1}(\Omega) \to \Omega$ est une immersion fermée dont l'image est $\Omega \backslash X_n^{\mathrm{irr}}$.*

La preuve de ce lemme (inspirée de [BCh1, §2] et de [BCh2, §1.5]) est un peu technique et pourra être ignorée en première lecture. Il serait facile d'en donner une variante au voisinage de n'importe quel points x de X_n tel que la représentation ρ_x est sans multiplicité.

Preuve — Soient $x = \iota_{a,b}(u, v)$, L une extension finie de $k(x)$ telle que ρ_u et ρ_v soient définies sur L et $A = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{k(x)} L$. Soit S la $\mathcal{O}(X_n)$-algèbre quotient de $\mathcal{O}(X_n)[G]$ par l'idéal bilatère engendré par la relation de Cayley-Hamilton de degré n pour Tr (voir [BCh2, Example 1.2.4 (i)]). En particulier Tr se factorise en un pseudo-caractère $S \to \mathcal{O}(X_n)$ de dimension n pourlequel S satisfait le théorème de Cayley-Hamilton de degré n. Sous l'hypothèse sur (ρ_u, ρ_v), le théorème 1.4.4 de [BCh2] assure que $S_A := S \otimes_{\mathcal{O}(X_n)} A$ est une algèbre de matrices généralisées de type (a, b). Cela signifie notament qu'il existe un morphisme de A-algèbres

$$\psi_A : M_a(A) \times M_b(A) \to S_A$$

tel que $\mathrm{Tr} \circ \psi_A$ coïncide avec la trace naturelle matricielle $M_a(A) \times M_b(A) \to A$. L'anneau A étant une limite inductive sur les voisinage ouverts affinoides de x dans X_n, on peut trouver un tel voisinage Ω tel que ψ_A provienne par extension des scalaires d'un morphisme de $\mathcal{O}(U)$-algèbres

$$\psi_U : M_a(\mathcal{O}(U)) \times M_b(\mathcal{O}(U)) \to S_U := S \otimes_{\mathcal{O}(X_n)} \mathcal{O}(U),$$

où $U = \Omega \times_{\mathbb{Q}_p} L$, tel que $\mathrm{Tr} \circ \psi_U$ coïncide avec la trace naturelle matricielle $M_a(\mathcal{O}(U)) \times M_b(\mathcal{O}(U)) \to \mathcal{O}(U)$. Nous allons vérifier que Ω convient.

Rappelons tout d'abord qu'un idéal bilatère d'une algèbre de matrices $M_k(B)$, B un anneau commutatif quelconque, est toujours de la forme $M_k(I)$ où I est un idéal de B. Ceci et la condition ci-dessus sur $\mathrm{Tr} \circ \psi_U$ assurent que ψ_U est injectif : on le verra comme une inclusion pour simplifier. On note alors $e \in S_U$ l'élément $(1, 0)$ de $M_a(\mathcal{O}(U)) \times M_b(\mathcal{O}(U))$. L'idéal bilatère $eS_U(1-e)S_Ue$ de $eS_ue = M_a(\mathcal{O}(U))$ est de la forme $M_a(I)$ pour un unique idéal $I \subset \mathcal{O}(U)$. En fait $I = \mathrm{Tr}(eS_U(1-e)S_Ue)$. Nous allons vérifier que l'immersion fermée de l'énoncé est définie par l'idéal I : notons $F = \mathrm{Sp}(\mathcal{O}(U)/I)$ ce fermé. Remarquons avant cela que puisque $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ pour tout $x, y \in S_U$, on a en fait $(1-e)S_UeS_U(1-e) = M_b(I)$, et aussi $\mathrm{Tr}(eS_U(1-e)) = \mathrm{Tr}((1-e)S_Ue) = 0$ soit

$$\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(exe) + \mathrm{Tr}((1-e)x(1-e) \ \ \forall x \in S_U. \tag{1.1}$$

Tout d'abord, remarquons que pour $i = 1, 2$, et si on pose $(n_1, n_2) = (a, b)$, l'application naturelle

$$\rho_i : S_U \to eS_Ue/eS_U(1-e)S_Ue = M_{n_i}(\mathcal{O}(U)/I)$$

est un morphisme de $\mathcal{O}(U)$-algèbres car $ese.es'e - ess'e = es(e-1)s'e$. Si T_i est la trace de la représentation $G \to \mathrm{GL}_{n_i}(\mathcal{O}(U)/I)$ ainsi obtenue, alors (1.1) s'écrit $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_1 + \mathrm{Tr}_2 \bmod I$. Comme les Tr_i sont clairement continus par construction (car $\mathrm{Tr}_1(g) = \mathrm{Tr}(eg) \bmod I$), on a construit un morphisme naturel $F \to X_a \times X_b$.

Réciproquement, soit V un L-affinoide et (T'_1, T'_2) des pseudo-caractères continus de G à valeurs dans $\mathcal{O}(V)$, de dimensions respectives (a, b), tels que $T'_1 + T'_2$ définisse un morphisme $f : V \to U$. Regardons $S_V = S_U \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(V)$. Il nous reste à démontrer que l'image de I dans $\mathcal{O}(V)$ est nulle, de sorte que f se factorise par $F \subset U$, puis que T'_1 et T'_2 sont les extensions des scalaires à $\mathcal{O}(V)$ des T_1 et T_2 définis plus haut (à valeurs dans $\mathcal{O}(F)$). D'après [BCh2, §1.2.4] (formule pour le polynôme caractéristique d'une somme), T'_1 et T'_2 se factorisent en des pseudo-caractères de S_V. Pour les mêmes raisons que plus haut nous disposons d'une injection compatible à la trace $\psi_V := \psi_U \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(V)$. On peut donc voir T'_1 et T'_2 comme des pseudo-caractères de $M_a(\mathcal{O}(V))$ et $M_b(\mathcal{O}(V))$. Rappelons que si B est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative quelconque, les seuls pseudo-caractères de $M_k(B)$ sont les multiples entiers de la trace matricielle évidente. Ainsi, il existe des entiers $m, m' \geq 0$ tels que $T'_1(e) = ma$ et $T'_2(e) = m'a$. Comme $(m + m')a = (T'_1 + T'_2)(e) = \mathrm{Tr}(e) = a$ on a $\{m, m'\} = \{0, 1\}$. Si $T'_1(e) \neq 0$ on en déduit que T'_1 coïncide sur eS_Ve et vaut 0 sur $(1-e)S_V(1-e)$. Autrement dit, $T'_1(x) = \mathrm{Tr}(ex)$ pour tout $x \in S_V$. De même on a alors $T'_2(x) = \mathrm{Tr}((1-e)x)$ pour tout $x \in S_V$. Si $T'_1(e) = 0$, alors $T'_1(1-e) = T'_1(1) = a \neq 0$ et la même analyse montre que T'_1 coïncide avec la trace matricielle de $(1-e)S_V(1-e)$, en particulier $a = b$ et quitte à échanger e et $(1-e)$ on peut supposer qu'on est toujours dans le premier cas. Notons que T'_1 étant un pseudo-caractère de S_V, on a l'annulation

$$T'_1(eS_V(1-e)S_Ve) = T'_1((1-e)S_VeS_V) = T(e(1-e)S_VeS_V) = 0.$$

Mais $eS_V(1-e)S_Ve = M_a(I')$ où I' est l'image de I dans $\mathcal{O}(V)$, il vient que $I' = 0$ puis que $T'_i = f^*T_i$: cela termine la démonstration de ce que le pull-back de $\iota_{a,b}$ au dessus de U est l'immersion fermée d'idéal I. Mais si $W \to W'$ est un morphisme d'espaces rigides tel que $W \times L \to W' \times L$ est une immersion fermée (L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ quelconque), alors $W \to W'$ est une immersion fermée[2], ce qui conclut la première assertion du lemme.

Il reste à montrer qu'un point réductible dans Ω est dans l'image de $\iota_{a,b}$. Si x est un tel point, on dispose encore d'un morphisme injectif

$$\psi_x = \psi_A \otimes_A \overline{k(x)} : M_a(\overline{k(x)}) \times M_b(\overline{k(x)}) \to S \otimes_L \overline{k(x)},$$

tel que $\mathrm{trace}(\rho_x) \circ \psi_x$ est la trace matricielle sur $M_a(\overline{k(x)}) \times M_b(\overline{k(x)})$. Par un argument déjà donné plus haut la seule décomposition possible de $\mathrm{trace}(\rho_x)$ comme somme de deux pseudo-caractères est donc une somme de deux irréductibles de dimensions respectives a et b. □

2. Le théorème principal

Fixons K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré $d = [K : \mathbb{Q}_p]$ et

$$G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$$

son groupe de Galois absolu. On pose $X_n = X_n(G_K)$. La théorie du corps de classes décrit explicitement $X_1(G_K) = X_1(G_K{}^{\mathrm{ab}})$ comme l'espace des caractères continus p-adiques de $\widehat{K^*}$, qui est (non canoniquement) isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}} \times \mu(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$. Rappelons que $X_1(\mathbb{Z}_p)$ est la boule unité ouverte de rayon 1 sur $\mathbb{Q}_p$ et que $X_1(\widehat{\mathbb{Z}})$

[2]Nous remercions Laurent Fargues pour une discussion à ce sujet.

est réunion disjointe, indexée par les entiers n premiers à p, de la restriction à $\mathbb{Q}_p$ de la boule unité ouverte de rayon 1 sur $\mathbb{Q}_p(\mu_n)$. Les travaux de plusieurs auteurs, notamment de M. Kisin et G. Böckle, ont permis de décrire essentiellement complètement X_2 quand $K = \mathbb{Q}_p$, sauf quand $p = 2$ auquel cas la description est encore incomplète à notre connaissance (voir le chapitre 4).

Théorème 2.1. *X_n est équi-dimensionnel de dimension dn^2+1 et l'ouvert X_n^{irr} est Zariski-dense.*

Tout d'abord, le fait que X_n^{irr} est régulier d'équi-dimension dn^2+1 est classique. En effet, il suffit de voir que si L est une extension finie de $k(x)$ sur laquelle ρ_x est définie, alors $\widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x} \otimes_{k(x)} L$ est formellement lisse sur L de dimension dn^2+1. Or comme on a vu cette L-algèbre est l'algèbre pro-universelle des déformations continues de la représentation absolument irréductible ρ_x (vue sur L). L'assertion découle alors de ce que $H^0(G_K, \mathrm{ad}(\rho_x))$ est de dimension 1 (sur $\overline{k(x)}$), $H^2(G_K, \mathrm{ad}(\rho_x)) = \mathrm{Hom}_{G_K}(\rho_x, \rho_x(1)) = 0$ (dualité de Tate), de sorte que par la formule de caractéristique d'Euler pour la cohomologie continue de G_K dûe à Tate on a $\dim H^1(G_K, \mathrm{ad}(\rho_x)) = d\dim(\mathrm{ad}(\rho_x)) + 1 = dn^2+1$.

Nous allons démontrer par récurrence sur la dimension n que X_n^{irr} est Zariski-dense dans X_n, ce qui entraîne le théorème par le paragraphe ci-dessus.

Comme X_n^{irr} est un ouvert Zariski, son adhérence Zariski est une réunion de composantes irréductibles de X_n. Supposons par l'absurde que cette réunion soit stricte, il existe donc un ouvert affinoïde $U \subset X_n$ qui ne la rencontre pas. À fortiori, $U \cap X_n^{\mathrm{irr}} = \emptyset$. Soit $x \in U$. Il existe donc deux entiers non nuls a et b tels que $a+b=n$ et tels que x est dans l'image du morphisme naturel

$$\iota_{a,b} : X_a \times X_b \to X_n.$$

Soit $(u,v) \in X_a \times X_b$ tel que $\iota_{a,b}(u,v) = x$. Par hypothèse de récurrence, l'ouvert Zariski de $X_a \times X_b$ paramétrant les paires de représentations irréductibles est Zariski-dense, on peut donc trouver (u',v') assez proche de (u,v) dans $X_a \times X_b$, de sorte que $\iota_{a,b}(u',v') \in U$ et que $\rho_{u'}$ et $\rho_{v'}$ soient irréductibles. Si $a=b$ on peut supposer de plus que $\rho_{u'} \not\simeq \rho_{v'}(m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$: il suffit de tordre l'un par un caractère assez proche de 1 bien choisi. On pose $x' = \iota_{a,b}(u',v')$.

Choisissons V une extension non triviale de $\rho_{u'}$ par $\rho_{v'}$, disons définie sur une extrension finie L assez grande de $k(u',v')$ (donc de $k(x')$). Une telle extension existe car $H^1(G_K, \mathrm{Hom}(\rho_{u'}, \rho_{v'}))$ est de dimension $[K:\mathbb{Q}_p]ab > 1$ par les théorèmes de Tate suscités. Soit $\mathcal{O}_V$ l'anneau de déformation pro-universel de V aux $\mathbb{Q}_p$-algèbres artiniennes locales de corps résiduel L (Mazur, Schlessinger). Par des arguments similaires à ceux de l'étude plus haut des points dans X_n^{irr}, $\mathcal{O}_V$ est formellement lisse sur L de dimension dn^2+1. On dispose de plus en prenant la trace d'un morphisme local de L-algèbres $\varphi : \widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x'} \otimes_{k(z)} L \longrightarrow \mathcal{O}_V$.

Lemme 2.2. *Soit W une G_K-déformation continue de V sur $L[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, telle que*

$$\mathrm{trace(g|W)} = \mathrm{trace(g|V)} \ \ \forall g \in G_K,$$

alors dans une $L[\varepsilon]$-base bien choisie, W est une déformation triangulaire supérieure de V qui est constante sur les deux blocs diagonaux.

En particulier, le noyau de l'application induite par φ sur les espaces tangents $d\varphi : T_V \to T_{X_n,x'} \otimes L$ est de dimension $dab - 1$, et $\dim(\mathrm{Im}(d\varphi)) \geq dn^2 - dab + 2$.

Preuve — En effet, la representation V étant sans multiplicité, la théorie développée dans [BCh2, §1] s'applique. Considérons pour cela la $L[\varepsilon]$-algèbre de Cayley-Hamilton

$$R = \mathrm{Im}(L[\varepsilon][G] \longrightarrow \mathrm{End}(W)).$$

Dans une base adaptée, c'est une algèbre de matrices généralisée standard de type $(1,1)$ avec $A_{1,2} = M_{ab}(B)$ et $A_{2,1} = M_{ba}(C)$ où B et C sont des sous-$L[\varepsilon]$-modules de $L[\varepsilon]$. Puis que V est non scindée, on a B ou C égal à $L[\varepsilon]$, disons que c'est B. Par l'hypothèse sur la trace, le lieu de réductibilité de R est $BC = 0$. Ainsi, $C = 0$ et R est triangulaire supérieure. Le fait que la trace est constante assure que les déformations diagonales de $\rho_{u'}$ et $\rho_{v'}$ sont de trace constante, donc constantes car ces dernières sont absolument irréductibles non isomorphes.

Pour l'assertion énoncée sur le noyau, il ne reste qu'à calculer la dimension du sous-espace de T_V constitué des déformations constantes sur la diagonale et triangulaires supérieures. C'est donc $\dim \mathrm{Ext}^1(\rho_{u'}, \rho_{v'}) - 1$, soit encore $dab - 1$ par les théorèmes de Tate. □

Retournons à l'analyse plus haut. Soit $\Omega \subset X_n$ un voisinage affinoide de x' donné par le Lemme 1.1. Quitte à rétrécir U au voisinage de x', on peut supposer que :

(i) $U \subset \Omega$,
(ii) $U' = \iota_{a,b}^{-1}(U) \subset X_a^{\mathrm{irr}} \times X_b^{\mathrm{irr}}$,
(iii) l'immersion fermée $\iota_{a,b} : U' \to U$ est surjective (car $U \cap X_n^{\mathrm{irr}} = \emptyset$).

En particulier, U' est régulier et $\iota_{a,b} : U' \to U$ est la nilréduction de U. L'application naturelle $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V$ se factorise donc par $\iota_{a,b}^* : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U')$ car $\mathcal{O}_V$ est réduit. En particulier, l'application $d\varphi$ du Lemme 2.2 se factorise par

$$T_{(u',v')}(U') \otimes L \longrightarrow T_{x'}(X_n) \otimes L.$$

Or le terme de gauche est de dimension $da^2 + 1 + db^2 + 1$ car $(u', v') \in X_a^{\mathrm{irr}} \times X_b^{\mathrm{irr}}$, alors que $\dim(\mathrm{Im}(d\varphi)) \geq dn^2 - dab + 2$ par le Lemme 2.2. On conclut car

$$d(a+b)^2 - dab + 2 - da^2 - db^2 - 2 = dab > 0.$$

Cela termine la preuve du théorème 1.

Théorème 2.3. *Si $n > 2$ ou si $K \neq \mathbb{Q}_p$, alors X_n^{irr} coïncide avec le lieu régulier de X_n. Si $K = \mathbb{Q}_p$, alors les points singuliers de X_2 sont exactement ceux tels que $\rho_x = \chi \oplus \chi\omega$ où ω est le caractère cyclotomique p-adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$.*

Il ne reste qu'à voir que $X_n \backslash X_n^{\mathrm{irr}}$ est constitué d'éléments singuliers, à moins que $n = 2$ et $K = \mathbb{Q}_p$. Supposons en effet qu'un point régulier x de X_n soit dans l'image de $(u, v) \in X_a \times X_b$ avec $a + b = n$, $a, b \geq 1$. Le lieu régulier de X_n étant ouvert, et $X_a^{\mathrm{irr}} \times X_b^{\mathrm{irr}}$ étant Zariski-ouvert et Zariski-dense dans $X_a \times X_b$ par le théorème A, on peut supposer quitte à bouger dans un voisinage de (u, v) dans $X_a \times X_b$ (en raisonnant comme plus haut) que ρ_u et ρ_v sont irréductibles et ne sont pas tordus l'un de l'autre par une puissance entière du caractère cyclotomique.

Lemme 2.4. *Supposons que $x = \iota_{a,b}(u,v)$ avec ρ_u, ρ_v irréductibles et non tordus l'un de l'autre par le caractère cyclotomique ; alors*

$$\dim T_{x,X_n} = d(a^2+b^2) + 2 + d^2a^2b^2.$$

Preuve — En effet, on a d'après [B, Théorème 2] une suite exacte:

$$0 \to H^1(G_K, \mathrm{ad}(\rho_u)) \oplus H^1(G_K, \mathrm{ad}(\rho_v)) \to \dim T_{x,X_n} \otimes L$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\rho_u,\rho_v) \otimes \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\rho_v,\rho_u) \to \mathrm{Ext}^2_{G_K}(\rho_u,\rho_v) \times \mathrm{Ext}^2_{G_K}(\rho_u,\rho_v),$$

dont le lemme suit immédiatement par les théorèmes de Tate : les $\mathrm{Ext}^2_{G_K}(-)$ sont nuls et le terme central est de dimension $da^2+1+db^2+1+d^2a^2b^2$. □

Pour revenir au théorème, il suffit de comparer la dimension de Krull de $\mathcal{O}_{X_n,x}$, à savoir dn^2+1 (Théorème 1), à la dimension de l'espace tangent donnée par le lemme 2.4. Mais

$$(d(a+b)^2+1) - (d(a^2+b^2)+2+d^2a^2b^2) = -(1-dab)^2 < 0$$

dès que $dab > 1$, donc x n'est pas régulier dans ce cas. Cela conclut la démonstration de la première partie du théorème 2.

Supposons maintenant $K = \mathbb{Q}_p$ et $n = 2$. L'argument ci-dessus montre encore que si $x \in X_2$ est tel que $\rho_x \simeq \chi \oplus \chi'$ avec $\chi \neq \chi'$, alors la dimension de l'espace tangent en x est égale à $2+2+1=5$ si χ/χ' n'est pas égal au caractère cyclotomique où à son inverse, 6 sinon. Il vient que x est régulier dans le premier cas et non dans le second.

Terminons par le cas $\rho_x = \chi \oplus \chi$. Quitte à tordre par le caractère χ^{-1}, ce qui induit un automorphisme de $X_2 \times_{\mathbb{Q}_p} k(x)$, on peut supposer que χ est le caractère trivial, donc que ρ_x est la représentation triviale de dimension 2, notée $1 \in X_2$. On conclut donc par le lemme:

Lemme 2.5. *$T_1(X_2)$ est de dimension 5 sur $\mathbb{Q}_p$.*

Preuve — En effet, cela découle du théorème 3.1 du chapitre suivant et de ce que $W := H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ est de dimension 2, donc $\mathrm{Sym}^2(W)$ est de dimension 3 et $\Lambda^3(W) = 0$, de sorte que $\dim T_1(X_2) = 2+3 = 5$. □

Le théorème 2 est donc démontré.

3. Pseudo-déformations de la représentation triviale de dimension 2

Dans cette section, G désigne un groupe topologique et A un anneau topologique commutatif unitaire dans lequel 2 est inversible. Soit T le A-module des fonctions continues $G \to A$ telles que $f(1) = 0$, $f(gh) = f(hg)$ pour tout $g,h \in G$, et telles que pour tout $(g,g',g'') \in G^3$,

$$f(gg'g'') + f(gg''g') - 2f(gg') - 2f(gg'') - 2f(g'g'') + 2f(g) + 2f(g') + 2f(g'') = 0.$$

Un calcul immédtiat montre que l'application $f \mapsto \widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(g) = 2 + f(g)\varepsilon$ induit une bijection entre T et l'ensemble des pseudo-caractères continus $\widetilde{f} : G \to A[\varepsilon]$ de dimension 2 relevant le pseudo-caractère trivial modulo ε (identiquement égal à 2). Le second espace est en fait un A-module de manière naturelle car c'est un espace tangent relatif, et pour cette structure la bijection précédente est un isomorphisme A-linéaire.

Notons $\mathrm{Hom}(G,A)$ le A-module des homomorphismes continus $G \to A$. Plus généralement, si $n \geq 1$, nous aurons à considérer des fonctions continues $f : G^n \to A$ *multilinéaires*, c'est à dire telles que pour chaque place $1 \leq i \leq n$, ainsi que $g_1, \ldots, g_n$ et $h \in G$,

$$f(g_1, \ldots, g_i h, \ldots, g_n) = f(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) + f(g_1, \ldots, h, \ldots, g_n).$$

De telles fonctions se factorisent en chaque variable par l'abélianisé de G. On dira que f est symétrique (resp. alternée) si $\forall g_1, \ldots, g_n \in G$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors $f(g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}) = f(g_1, \ldots, g_n)$ (resp. $\varepsilon(\sigma) f(g_1, \ldots, g_n)$), et on notera $\mathrm{Sym}^n(G,A)$ (resp. $\mathrm{Alt}^n(G,A)$) le A-module des fonctions continues $G^n \to A$ multilinéaires et symétrique (resp. alternées).

Théorème 3.1. *Il existe des sous-A-modules canoniques $T'' \subset T' \subset T$ tels que*

$$T'' \simeq \mathrm{Hom}(G,A), \;\; T'/T'' \simeq \mathrm{Sym}^2(G,A), \;\; T/T' \hookrightarrow \mathrm{Alt}^3(G,A).$$

Commençons par définir T' et T''. Si $f : G \to A$ est une fonction quelconque, on peut la voir comme une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\mathbb{Z}[G] \to A$. On définit alors $S^n(f) : G^n \to A$ par la formule

$$S^n(f)(g_1, \ldots, g_n) = f((g_1 - 1)(g_2 - 1) \ldots (g_n - 1)). \tag{3.2}$$

Par exemple, $S(f)(g) = f(g) - f(1)$, $S^2(f)(g,g') = f(gg') - f(g) - f(g') + f(1)$ et $S^3(f)(g,g',g'') = f(gg'g'') - f(gg') - f(gg'') - f(g'g'') + f(g) + f(g') + f(g'') - f(1)$. Une conséquence simple de (3.2) est que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $(g_1, \ldots, g_{n+1}) \in G^n$,

$$S^{n+1}(f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = S^n(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_n)$$
$$-S^n(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i, g_{i+2}, \ldots, g_n) - S^n(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_n).$$

En effet, $g_i g_{i+1} - 1 = (g_i - 1)(g_{i+1} - 1) + (g_i - 1) + (g_{i+1} - 1)$. En particulier, $S^n(f)$ est multilinéaire si, et seulement si, $S^{n+1}(f) = 0$. De plus, $S^n(f) = 0$ entraîne $S^{n+1}(f) = 0$.

Supposons maintenant que f est *centrale*, c'est à dire que $f(gh) = f(hg)$ pour tout $(g,h) \in G^2$. Cela entraîne que $f(xy) = f(yx)$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[G]$, et donc que $S^n(f)(g_1, g_2, \ldots, g_n) = S^n(f)(g_2, \ldots, g_n, g_1)$ (permutation circulaire) pour tout n et tout $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Si de plus $f(1) = 0$, remarquons que

$$f \in T \Leftrightarrow S^3(f)(g,g',g'') + S^3(f)(g,g'',g') = 0 \;\; \forall (g,g',g'') \in G^3.$$

Autrement dit $S^3(f)$ est une fonction alternée de (g', g''). Comme elle est de plus invariante par permutation circulaire comme on a vu ci-dessus, il vient que $f \in T$ *si et seulement si f est centrale, $f(1) = 0$, et $S^3(f)$ est une fonction alternée de* (g,g',g'').

Les considérations ci-dessus permettent de définir une filtration naturelle sur T comme suit: pour $n \geq 1$ on pose

$$T_n = \{f \in T, S^n(f) = 0\}.$$

C'est un sous-A-module de T et l'analyse plus haut entraîne que $T_n \subset T_{n+1}$. Il est évident que $T_1 = 0$ et que

$$T_2 = \mathrm{Hom}(G,A).$$

Nous allons démontrer le théorème ci-dessus avec $T'' = T_2$ et $T' = T_3$. Le théorème découle du lemme suivant.

Lemme 3.2. *On a $T_4 = T$. En particulier, T est le A-module des fonctions centrales continues $G \to A$ telles que $f(1) = 0$ et telles que $S^3(f) \in \mathrm{Alt}^3(G, A)$. L'application $f \mapsto S^2(f)$ induit un isomorphisme de $T_3/T_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^2(G, A)$.*

Un point clef est que $S^4(f) = 0$ pour tout $f \in T$, *i.e.* $T_4 = T$. Le reste de la première assertion en découle par l'analyse faite plus haut. Pour démontrer cette identité, et pour plus généralement pour comprendre les propriétés des éléments de T, il sera commode de raisonner en terme *d'algèbre de Cayley-Hamilton*.

Posons $R = A[\varepsilon][G]$ et soit $\chi_0 : R \to A$ le morphisme de A-algèbres "trivial", *i.e.* envoyant ε sur 0 et chaque $g \in G$ sur 1. Fixons $f \in T$ et considérons $\widetilde{f} : R \to A[\varepsilon]$ la pseudo-déformation associée à f : par définition on a

$$\widetilde{f} = 2\chi_0 + f\varepsilon.$$

Rappelons que $\ker \widetilde{f} = \{x \in R, \widetilde{f}(xy) = 0\}$ est un idéal bilatère de R ; on pose $S = R/\ker(\widetilde{f})$. C'est une $A[\varepsilon]$-algèbre encore munie de $\widetilde{f} : R \to A[\varepsilon]$, qui est $A[\varepsilon]$-linéaire et centrale ($\widetilde{f}(xy) = \widetilde{f}(yx)$ pour tout $x, y \in S$). Par définition, $\widetilde{f}(xy) = 0$ pour tout y entraîne $x = 0$ par définition. Elle satisfait l'identité de Cayley-Hamilton

$$\forall x \in S,\ x^2 - \widetilde{f}(x)x + \widetilde{d}(x) = 0$$

où l'on a pose $\widetilde{d}(x) := \frac{\widetilde{f}(x)^2 - \widetilde{f}(x^2)}{2}$ (voir [BCh2, §1.2.3]).

Soit $J \subset S$ l'ídéal bilatère de S formé des éléments x tels que $\widetilde{f}(xy) \in \varepsilon A$ pour tout $y \in S$. Soit J_0 le sous-$A[\varepsilon]$-module de S constitué des x tels que $\widetilde{f}(x) = 0$.

Lemme 3.3. *On a les identités suivantes:*

(a) *$S = A[\varepsilon] \oplus J_0$, $J = A\varepsilon \oplus J_0$ et $\varepsilon J = 0$,*
(b) *Pour tout $x \in J_0$, $x^2 \in \varepsilon A$; pour tous $x, y \in J$, $xy + yx = \widetilde{f}(xy) \in \varepsilon A$,*
(c) *$J^3 \subset A\varepsilon$ et $J^4 = 0$.*
(d) *Pour tout $x, y \in S$, $\widetilde{d}(xy) = \widetilde{d}(x)\widetilde{d}(y)$.*

Preuve — En effet, comme 2 est inversible $S = A[\varepsilon] \oplus J_0$. Vérifions que $J_0 \subset J$. En effet, si $x \in J_0$ et $y \in S$, $\widetilde{f}(xy) = 2\chi_0(xy) + \varepsilon f(xy)$. Or $\chi_0(xy) = \chi_0(x)\chi_0(y) = 0$, ce que l'on voulait. On en déduit immédiatement $J = J_0 \oplus \varepsilon A$. Le dernier point de (a) vient de ce que $\widetilde{f}$ est non dégénérée sur S.

Vérifions le (b). Si $x \in J_0$, $x^2 = -\widetilde{d}(x) \in A[\varepsilon] \subset S$ par Cayley-Hamilton. Comme $\widetilde{f}(x) = 0$, on a $x^2 \in J$ d'après le (a) et $\widetilde{d}(x) = -\frac{\widetilde{f}(x^2)}{2} \in \varepsilon A$, donc $x^2 \in \varepsilon A$. Appliquant ceci à x, y et $x + y$ on obtient que $xy + yx \in \varepsilon A$ quand $x, y \in J_0$. Comme $\varepsilon J = 0$ cela vaut encore quand $x, y \in J$, on conclut le (b) en appliquant $\widetilde{f}$. Pour le premier point du (c), on utilise que 2 est inversible dans A ainsi que l'identité

$$\forall x, y, x,\ \ 2xyz = (xy + yx)z - y(xz + zx) + ((yz)x + x(yz)).$$

On en déduit $J^4 = 0$.

Vérifions enfin le (d). Un calcul immédiat (utilisant (b)) montre que

$$\forall a \in A[\varepsilon],\ \forall u \in J,\ \ \widetilde{d}(a + u) = a^2 - u^2 + a\widetilde{f}(u).$$

Écrivons $x = a + u$ et $y = b + v$ avec $u, v \in J_0$ et $a, b \in A[\varepsilon]$. On a $xy = ab + w$ avec $w = au+bv+uv \in J$. À l'aide de (b) et (c), on vérifie que $w^2 = a^2u^2+b^2v^2+ab\widetilde{f}(uv)$. Il vient que $(a^2 - u^2)(b^2 - v^2) = a^2b^2 - w^2 + ab\widetilde{f}(uv)$, et (d) suit (pour une autre preuve de (d), pas vraiment plus éclairante, voir [Ch1, Prop. 1.29]). $\square$

Retournons à la preuve du Lemme 3. Fixons $f \in T$. Si $\psi : \mathbb{Z}[G] \to S$ est l'application naturelle, alors par définition $\widetilde{f}(\psi(x)) = 2\chi_0(x) + \varepsilon f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}[G]$. Ainsi, si $I_G = \sum_{g\in G} \mathbb{Z}(g-1)$ est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$, on a $\psi(I_G) \subset J$. (On a même $A[\varepsilon][\psi(I_G)] = J = A[\psi(I_G)] + \varepsilon A$.) L'assertion $T_4 = T$ découle alors de l'assertion $J^4 = 0$.

Il ne reste que l'assertion sur T_3. Notons que si $f \in T_3$, alors $S^2(f)$ est bilinéaire, symétrique car $f(gh) = f(hg)$ pour tout g, h, ce qui fournit une suite exacte

$$0 \to T_2 = \mathrm{Hom}(G, A) \to T_3 \stackrel{f \mapsto S^2(f)}{\longrightarrow} \mathrm{Sym}^2(G, A). \tag{3.3}$$

Il ne reste qu'à voir que $f \mapsto S^2(f)$ est surjective. Nous allons en fait en construire une section naturelle. Pour cela considérons l'application

$$\det : T \to \mathrm{Hom}(G, A)$$

définie par $\det(f)(g) = 2f(g) - \frac{f(g^2)}{2}$, soit encore par $\widetilde{d}(g) = 1 + \varepsilon \det(f)(g)$ (où $\widetilde{d}$ est associé à f comme plus haut). Le (d) du Lemme 4 assure que $\widetilde{d}$ est un morphisme de groupes $G \to A[\varepsilon]^*$, soit encore que $\det(f) \in \mathrm{Hom}(G, A)$, ce qui justifie l'arrivée de det donnée ci-dessus. L'application det est clairement A-linéaire. On vérifie immédiatement que la restriction de det à T_2 est la multiplication par 2, donc un isomorphisme. Il vient que

$$T = T^0 \oplus T_2, \text{ si } T^0 := \ker(\det).$$

Le A-module T^0 introduit ci-dessus doit être vu comme le A-module des "pseudo-déformations de déterminant constant". Le lemme suivant conclut la preuve du théorème C.

Lemme 3.4. *L'application $f \mapsto S^2(f)$ induit une bijection $T^0 \cap T_3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^2(G, A)$.*

Preuve — L'injectivité vient de ce que $T^0 \cap T_2 = \{0\}$. Pour la surjectivité, fixons $u \in \mathrm{Sym}^2(G, A)$. Posons $f(g) = u(g, g)$. Alors $f : G \to A$ est continue, $f(1) = 0$, $f(g^2) = 4f(g)$, et $f(gh) = u(gh, gh) = f(g) + 2u(g, h) + f(h) = f(hg)$. Ainsi, $S^2(f) = u$ et $S^3(f) = 0$ car u est bilinéaire, donc $f \in T^0 \cap T_3$. $\square$

Remarque 3.5. *Il serait intéressant de peaufiner le Théorème 3.1 en déterminant l'image de $T/T_3 \to \mathrm{Alt}^3(G, A)$.*

4. Un cas d'anneau de déformations légèrement obstrué

Dans cette partie, essentiellement indépendante, nous déterminons quelques anneaux de déformations légèrement obstrués.

Soient $\mathbb{F}$ une extension finie de $\mathbb{F}_2$ et V une $\mathbb{F}$-représentation continue de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}$ de dimension n. Le caractère cyclotomique modulo 2 étant trival, on a $\mathrm{V} = \mathrm{V}(1)$ de sorte que $\mathrm{H}^2(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}, \mathrm{adV}) \simeq \mathrm{End}_{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}}(\mathrm{V})$ est non nul, et la théorie des déformations de V s'avère obstruée. Supposons pour fixer les idées que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- soit V est absolument irréductible, auquel cas si K désigne l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_2$ de degré n, il existe un caractère $\psi : \mathrm{G}_K \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}^*$ tel que $\mathrm{V} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_K}^{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}} \psi$.

- soit $n = 2$ et V est réductible indécomposable de semi-simplifiée somme de deux caractères distincts.

Soit R l'anneau universel des déformations continues de V et soit V_R la déformation universelle. Le déterminant de V_R est un caractère de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}$, qui induit par réciprocité du corps de classes local un morphisme de groupes $\mathbb{Q}_2^* \to \mathrm{R}^*$, que l'on restreint au sous-groupe $\mu = \{\pm 1\} \subset \mathbb{Q}_2^*$, de sorte que l'on dispose d'un morphisme naturel d'anneaux

$$\Lambda = \mathrm{Witt}(\mathbb{F})[\mu] \longrightarrow \mathrm{R}, \tag{4.4}$$

Witt($\mathbb{F}$) désignant l'anneau des vecteurs de Witt de $\mathbb{F}$.

Proposition 4.1. *Le morphisme* (4.4) *s'étend en un isomorphisme* $R \xrightarrow{\sim} \Lambda[[x_1, \ldots, x_r]]$ *où* $r = 1 + n^2$*.*

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. *La fibre générique rigide analytique de R est réunion disjointe de deux boules unités ouvertes sur* Witt($\mathbb{F}$)[1/2] *qui sont de dimension* r*, et sur chacune desquelles le déterminant de la représentation universelle pris en l'élément non-trivial de* μ *est constant, et prend les deux valeurs possibles* ± 1*.*

Avant de débuter la démonstration de la proposition, remarquons qu'il suffit de voir que (4.4) est formellement lisse après extension des scalaires à une extension finie de $\mathbb{F}$, on peut donc supposer que $\psi(\mathrm{G}_K) \subset \mathbb{F}^*$ dans le second cas.

Lemme 4.3. *Le morphisme* $\Lambda/2\Lambda \to \mathrm{R}/2\mathrm{R}$ *obtenu en réduisant* (4.4) *modulo* 2 *induit une surjection sur les espaces tangents. Autrement dit, l'application naturelle* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}, \mathrm{adV}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mu, \mathbb{F})$ *n'est pas nulle.*

En effet, supposons d'abord que V est irréductible. Soit

$$\psi' = 1 + \varepsilon\delta : G_K \to \mathbb{F}[\varepsilon]^*$$

un caractère résiduellement trivial, ou ce qui revient au même un morphisme continu $\delta : G_K \to \mathbb{F}$. La formule du déterminant d'une induite assure que le déterminant de

$$\mathrm{V}' := \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_K}^{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}} \psi\psi'$$

est le transfert du caractère $\psi\psi'$ de G_K à $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}$ (fois un caractère fixe à valeurs dans $\{\pm 1\}$ sans importance ici, et de toutes façons trivial en caractéristique 2). La théorie du corps de classe identifie donc $\det(\mathrm{V}')$ à la restriction à $\mathbb{Q}_2^*$ du caractère $\psi\psi'$, vu comme caractère de K^*. Il s'agit donc de démontrer que l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}(K^*, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_2^*, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mu, \mathbb{F})$$

est surjective, Hom désignant ici les morphismes de groupes (automatiquement continus). Comme $K/\mathbb{Q}_2$ est non ramifiée, et comme -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}_2$, μ est aussi le sous-groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de 2 de K^*, c'est un particulier un facteur direct de ce dernier groupe multiplicatif, ce qui conclut la preuve du lemme dans le cas irréductible.

Dans le cas restant, V est une extension non triviale entre deux caractères non ramifiés. Quitte à tordre par un caractère on peut supposer que c'est une extension non triviale de 1 par un caractère non trivial $\overline{\psi} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2} \to \mathbb{F}^*$. Soit $\psi : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2} \to \mathbb{F}[\varepsilon]^*$ un caractère continu relevant $\overline{\psi}$ et qui, via l'isomorphisme de réciprocité, est non trivial sur μ. Un tel caractère existe car le sous-groupe μ est facteur direct topologique de $\mathbb{Q}_2^*$. Comme $\overline{\psi}$ n'est pas le caractère cyclotomique (qui est trivial!), les théorèmes de Tate entraînent que :

— $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}, \psi)$ est libre de rang 1 sur $\mathbb{F}[\varepsilon]$ et,

— l'application canonique $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}, \psi) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}, \overline{\psi})$ est surjective.

Autrement dit, il existe une unique extension non triviale de 1 par ψ relevant V. Par construction son déterminant est ψ, donc non trivial sur μ, ce qui conclut la preuve du lemme. □

Retournons à la démonstration de la proposition. Soit t l'élément $[-1] - 1 \in \Lambda$, de sorte que

$$\Lambda = \mathrm{Witt}(\mathbb{F})[[t]]/(t^2 + 2t).$$

Tout d'abord, $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}, \mathrm{adV})$ est de dimension $r+1$ sur $\mathbb{F}$, donc le nombre minimal de générateurs de l'idéal maximal $m_{\mathrm{R}/2\mathrm{R}}$ de $\mathrm{R}/2\mathrm{R}$ est $r+1$. D'après le lemme ci-dessus, on peut choisir un système de générateurs de m_{R} contenant l'image de t. Ainsi, le morphisme $\Lambda \to \mathrm{R}$ se prolonge en une surjection locale

$$S = \mathrm{Witt}(\mathbb{F}))[[t]][[x_1, \ldots, x_r]] \to \mathrm{R}. \tag{4.5}$$

Soient m_S l'idéal maximal de l'anneau S défini ci-dessus et I le noyau du morphisme (4.5). Par construction, la surjection (4.5) est un isomorphisme sur les espaces tangents, donc $I \subset m_S^2$. Comme $\mathrm{H}^2(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}, \mathrm{adV})$ est de dimension 1, un résultat classique de Mazur [Ma, §1.6] assure que $I/m_S I$ est de dimension au plus 1 sur $\mathbb{F}$. Mais nous avons déjà vu que $t^2 + 2t$ est dans I, et il n'est bien sûr pas dans m_S^3. C'est donc un générateur de I d'après le lemme de Nakayama, et le morphisme (4.5) induit par passage au quotient un isomorphisme

$$\Lambda[[x_1, \ldots, x_r]] \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}.$$

ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 4.4. *Soit* $r : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ *une représentation continue, semi-simple et non scalaire. Alors* $X_2(r)$ *est la réunion disjointe de deux boules unités ouvertes de dimension* 5, *différenciées par le déterminant de la représentation universelle pris en l'élément non-trivial de* μ.

Preuve — Cela suit du corollaire précédent quand r est irréductible. Si r est réductible, cela se déduit d'une comparaison entre l'anneau universel R_1 des pseudo-déformations de r (au sens des déterminants) et l'anneau universel R_2 des déformation d'une extension non-triviale V de semi-simplifiée r. Par définition, $X_2(r)$ est la fibre générique analytique de R_1. De plus, R_2 est formellement lisse de dimension 5 sur Λ d'après la proposition ci-dessus. Endin, on dispose d'un morphisme canonique $\varphi : R_1 \to R_2$ au dessus de Λ. Une variante du Lemme 2.2 montre que φ est surjectif, car si $r = \chi_1 \oplus \chi_2$ alors $\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}[\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_2}]}(\chi_1, \chi_2)$ est de dimension 1 (cette observation est due à M. Kisin). Mais d'après le théorème 1 l'espace $X_2(r)$ est lisse de dimension 5 et son lieu irréductible est Zariski-dense, il n'est pas difficile d'en déduire que φ induit un isomorphisme $R_1[1/2] \to R_2[1/2]$. □

Terminons par une généralisation évidente de la proposition. Soient p un nombre premier et L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soient $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p et V une $\mathbb{F}$-représentation continue absolument irréductible de G_L de dimension n. Il est bien connu que quitte à étendre les scalaires, un tel V est induit d'un caractère $\mathrm{G}_K \to \mathbb{F}^*$, K désignant l'extension non ramifiée de degré n de L.

On suppose que le sous-groupe $\mu \subset L^*$ des racines de l'unité de L d'ordre une puissance de p a exactement p éléments, c'est à dire que

$$\mu \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Sous cette hypothèse, notamment, le caractère cyclotomique modulo p est trivial, de sorte que $\mathrm{H}^2(\mathrm{G}_L, \mathrm{Ad}(\mathrm{V}))$ est de dimension 1. Soit R l'anneau universel des déformations continues de V. La considération du déterminant de la déformation universelle restreint à $\mu \subset L^*$ par l'isomorphisme de réciprocité local fournit comme précédemment un homomorphisme naturel $\mathrm{Witt}(\mathbb{F})[\mu] \longrightarrow R$.

Proposition 4.5. *L'homomorphisme ci-dessus s'étend en un isomorphisme*

$$\mathrm{Witt}(\mathbb{F})[\mu][[x_1, \ldots, x_r]] \xrightarrow{\sim} R,$$

où $r = 1 + [L : \mathbb{Q}_p]n^2$.

La démonstration ce fait comme précédemment en étudiant les déformations qui sont des induites, et se ramène au final à vérifier que l'homomorphisme de restriction

$$\mathrm{Hom}(K^*, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mu, \mathbb{F})$$

est surjectif. Cela découle encore de ce que les seules racines de l'unité de K d'ordre une puissance de p sont les p éléments de μ, car K/L est non ramifiée.

□

On en déduit une description de la fibre générique analytique de R analogue à celle du corollaire ci-dessus.

Questions : On ne suppose plus que $|\mu| = p$ mais simplement que $V \simeq V \otimes \omega$, où ω désigne le caractère cyclotomique modulo p de G_L : quelle est la structure de R ?

Il n'est pas difficile de vérifier que $R[1/p]$ est régulier, équi-dimensionnel de dimension $r = 1 + [L : \mathbb{Q}_p]n^2$, et que c'est un quotient de $\mathrm{Witt}(\mathbb{F})[[x_0, x_1, \ldots, x_r]][1/p]$. Que peux-on dire du nombre de ses composantes irréductibles ?

Le premier cas intéressant est celui pour lequel $n = 2$ et $L = \mathbb{Q}_3$. Dans ce cas, G. Böckle a récemment vérifié par un calcul explicite que l'anneau R est intègre [Bo].

5. Appendice : digression sur l'identité du parallélogramme et et sur les groupes libres

On dira qu'une fonction $f : G \to A$ satisfait l'identité du parallélogramme si

$$\forall g, h \in G, \quad f(g^{-1}h) + f(gh) = 2(f(g) + f(h)).$$

En particulier, on a $f(g^n) = n^2 f(g)$ pour tout $g \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. En terme de la fonction $\widetilde{f} = 2 + \varepsilon f(g)$ associée, l'identité du parallélogramme équivaut à $\widetilde{f}(g^{-1}h) + \widetilde{f}(gh) = \widetilde{f}(g)\widetilde{f}(h)$.

Proposition 5.1. *T^0 s'identifie au A-module des fonctions centrales continues $G \to A$ satisfaisant l'identité du parallélogramme.*

Preuve — Si $f \in T$ alors l'identité de Cayley-Hamilton assure que $\widetilde{f}((g^2 - \widetilde{f}(g)g + 1)h) = 0$ pour tout $(g, h) \in G^2$. En appliquant ceci à $(g, h) = (g', g'^{-1}h')$ on obtient l'identité du parallélogramme. Réciproquement, soit f centrale satisfaisant l'identité du parallélogramme. On veut montrer que pour tout $a, b, c \in G$,

$$\widetilde{f}(abc) + \widetilde{f}(acb) + \widetilde{f}(a)\widetilde{f}(b)\widetilde{f}(c) = \widetilde{f}(a)\widetilde{f}(bc) + \widetilde{f}(b)\widetilde{f}(ac) + \widetilde{f}(c)\widetilde{f}(ab).$$

On écrit pour cela $\widetilde{f}(abc) + \widetilde{f}(b^{-1}a^{-1}c) = \widetilde{f}(ab)\widetilde{f}(c)$, puis $\widetilde{f}(b^{-1}a^{-1}c) = -\widetilde{f}(ba^{-1}c) + \widetilde{f}(b)\widetilde{f}(a^{-1}c)$, puis $-\widetilde{f}(ba^{-1}c) = -\widetilde{f}(a^{-1}cb) = \widetilde{f}(acb) - \widetilde{f}(a)\widetilde{f}(cb)$, puis $\widetilde{f}(a^{-1}c) = -\widetilde{f}(ac) + \widetilde{f}(a)\widetilde{f}(c)$. $\square$

Proposition 5.2. *Si G est abélien alors $T = T_3$. En particulier, toute fonction centrale continue $f : G \to A$ satisfaisant l'identité du parallélogramme est de la forme $u(g, g)$ où $u \in \mathrm{Sym}^2(G, A)$.*

Preuve — Il suffit de montrer le "en particulier". On pose $u(g, h) = S^2(f)(g, h) = f(gh) - f(g) - f(h)$. Pour $a, b, c \in G$, on a

$$u(ab, c) + u(a^{-1}b, c) = f(abc) + f(a^{-1}bc) - f(ab) - f(c) - f(a^{-1}b) - f(c).$$

En appliquant l'identitée du parallélogramme à (a, bc) et à (a, b), il vient que

$$u(ab, c) + u(a^{-1}b, c) = 2u(b, c).$$

En prenant $a = b$ il vient que $u(b^2, c) = 2u(b, c)$ pour tout $b, c \in G$. Utilisons maintenant que G est abélien. Soient x, y dans G, si on pose $a = xy^{-1}$ et $b = xy$, on a $x^2 = ab$, $y^2 = a^{-1}b$ et $b^2 = x^2y^2$, de sorte que $u(x^2, c) + u(y^2, c) = u(x^2y^2, c)$, puis $2(u(x, c) + u(y, c)) = 2u(xy, c)$, donc u est bilinéaire car 2 est inversible dans A. $\square$

Un cas particulier bien connu du résultat ci-dessus est le suivant : soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant l'identité du parallélogramme $f(x-y)+f(x+y) = 2(f(x) + f(y))$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors $f(x) = u(x, x)$ pour une unique forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique u sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, si $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ alors $f(x) = ||x||^2$ où $||.||$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 5.3. *Si $G = F_2$ est le groupe libre à deux générateurs, alors on a encore $T = T_3$ car $\mathrm{Alt}^3(F_2, A) = 0$. Ainsi, toute fonction centrale $F_2 \to A$ satisfaisant l'identitée du parallélogramme est de la forme $g \mapsto u(g,g)$ où u est une forme A-bilinéaire symétrique sur F_2. Par contre, cela ne vaut pas pour le groupe libre F_3 à trois générateurs. C'est en quelque sorte le cas "universel", car la bilinéarité de $S^2(f)$ se teste sur trois éléments quelconques de G.*

Proposition 5.4. *Il existe une telle fonction $f : F_3 \to \mathbb{Q}$ satisfaisant l'identité du parallélogramme et telle que $S^3(f)(a,b,c) = 1$. Si f' est une autre telle fonction, alors $f - f'$ est de la forme $g \mapsto u(g,g)$ pour une unique forme $\mathbb{Q}$-bilinéaire symétrique u sur F_3.*

En effet, $\mathrm{Alt}^3(F_3, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$ et $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Hom}(F_3, \mathbb{Q})) = 6$, de sorte que $\dim_{\mathbb{Q}}(T^0) = 6$ ou 7. Or il est bien connu que la variété des $\mathbb{Q}$-caractères de dimension 2 et déterminant 1 de F_3 est équidimensionnelle de dimension 6, et que le point paramétrant la représentation triviale (dont T^0 est l'espace tangent) est singulier; c'est pourquoi $\dim_{\mathbb{Q}}(T^0) = 7$. Ces faits peuvent en fait s'obtenir par les méthodes du chapitre 2. Plus généralement, ces méthodes démontrent le résultat suivant, dont nous ne savons pas s'il était déjà connu.

Théorème 5.5. *Soit k un corps dans lequel $n!$ est inversible*[3]*, soit F_g le groupe libre à $g \geq 2$ générateurs, et soit X_n la variété des k-caractères de F_g dimension n. Alors X_n est équidimensionel de dimension $(g-1)n^2 + 1$, son lieu paramétrant les représentations absolument irréductibles est Zariski-dense, et pour $(g-1)n > 2$ le lieu singulier de X_n coïncide avec le lieu réductible.*

Bien entendu, dans ce cas "discret" X_n est la k-variété affine des caracères évidente. Son anneau est la k-algèbre abstraite A/I où $A = k[\{x_h, h \in F_g\}]$ et I est le plus petit idéal de A tel que l'application naturelle $g \mapsto x_g$, $G \to A/I$ soit un pseudo-caractère de dimension n. (Il s'avère que dans ce cas, I est un idéal premier.)

Preuve — Le point est que si V est un $k[F_g]$-module de k-dimension finie, alors $H^2(F_g, V) = 0$ et $\dim_k H^1(F_g, V) - \dim_k H^0(F_g, V) = (g-1)\dim_k(V)$. Les critères numériques utilisés dans la preuve du chapitre 2 sont donc formellement les mêmes avec $d = g - 1$. □

Revenons pour finir sur le cas $n = 2$ et $g = 2$, exclu par le théorème. Il est connu depuis Fricke que le lieu de déterminant 1 de $X_2(F_2)$ est l'espace affine de dimension 3, paramétré par $(x,y,z) = (\mathrm{trace}(a), \mathrm{trace}(b), \mathrm{trace}(ab))$ où a et b sont des générateurs de F_2 (voir par exemple [G]). Un calcul immédiat montre que son lieu réductible est l'hypersurface $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4 = 0$, qui est singulière exactement aux quatre points

$$(x,y,z) \in \{(2,2,2), (-2,2,-2), (2,-2,-2), (-2,-2,2)\}$$

paramétrant les représentations de F_2 de la forme $\chi \oplus \chi$ avec $\chi : F_2 \to \{\pm 1\}$. Ceci est concordant avec la remarque 2.

[3]Cette condition pourrait être supprimée en utilisant les résultats de [Ch1].

References

[B] J. Bellaïche, *Pseudodeformations*, à paraître à Math. Z, article disponible à l'adresse `http://www.math.columbia.edu/~jbellaic/preprint.html`

[BCh1] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Lissité de la courbe de Hecke aux points Eisenstein critiques*, Journal Inst. Math. Jussieu vol. 5.2, 333-349 (2006).

[BCh2] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups* Astérisque 324, Soc. Math. France (2009).

[Bo] G. Böckle, *Deformation rings for some mod* 3 *Galois representations*, dans *Représentations p-adiques de groupes p-adiques II*, Astérisque 330 (2010).

[Ch1] G. Chenevier, *The p-adic analytic space of pseudo-characters of a profinite group, and pseudo-representations over arbitrary rings*, article disponible a `http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/pub.html`.

[Ch2] G. Chenevier, *Sur la fougère infinie des représentations galoisiennes quaternioniques*, cours au trimestre galoisien de l'institut Henri Poincaré (2010). Notes disponibles á l'adresse `http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/coursihp.html`

[G] W. Goldman, *An exposition of results of Fricke and Vogt*, `http://arxiv.org/abs/math/0402103`.

[Ma] B. Mazur, *Deforming Galois representation*, dans *Galois groups over* $\mathbb{Q}$, Proceedings M.S.R.I. (1987).