FAMILLES p-ADIQUES DE FORMES AUTOMORPHES POUR GL_n

GAËTAN CHENEVIER

Abstract : In this paper, we give definitions for p-adic automorphic forms on any twisted form of $\mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}$ compact at infinity, and we construct the "eigenvariety" of finite slope eigenforms of wild level $\Gamma_0(p)$, at a split place p. Besides some generalisation of Coleman-Mazur theory, the main ingredients are the very existence of the "orthonormal" p-adic analytic family of principal series of $\Gamma_0(p)$ and its most basic properties. We give analogues of Coleman's "small slope forms are classical" and of Wan's bounds for explicit radii for the families. As an application, we can construct n-dimensional p-adic families of non ordinary, n-dimensional, refined Galois representations coming from Shimura varieties of some unitary groups.

AMS classification : 11F85 (11F55, 11F80, 14G22, 20E50)

Table des matières

1. Introduction

En 1995, suite à des travaux de Serre, Katz, Dwork, Hida et Gouvea-Mazur, R. Coleman montre que toute forme modulaire propre de niveau $\Gamma_1(p)$ en p fait partie d'une famille p-adique de formes propres. Sa stratégie, développée dans [C1] et reposant sur [C2], consiste à mettre en famille analytique les espaces de formes modulaires surconvergentes et d'appliquer à U_p (agissant analytiquement sur cette famille) la théorie spectrale des opérateurs compacts des modules de Banach orthonormalisables, théorie qu'il établit dans [C1]. Ses idées sont reprises par Coleman-Mazur dans [CM] pour aboutir à la construction d'une courbe analytique p-adique ("eigencurve") paramétrant les formes modulaires surconvergentes, propres, de pente finie et de niveau modéré fixé. Rappelons que l'existence des familles p-adiques de formes modulaires paraboliques propres ordinaires en p avait été étudiée tout d'abord par Hida, dans des travaux qu'il a par la suite généralisés à une vaste classe de groupes ([Hi2]). Hormis le cas du groupe $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$, pour lequel on dispose aussi d'une construction parallèle à celle de Coleman due à Stevens (non publié, cf. [St]), la construction des familles p-adiques non ordinaires en est à un stade peu avancé. Dans des travaux non publiés ([B1]), Buzzard a remarqué que la construction des familles dans le cas des algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$ définies était approchable directement, et ce même par des techniques relativement élémentaires. Bien que nous n'employons pas ces dernières dans ce texte, ce sont ces idées qui sont à l'origine de ce travail.

Dans cet article, nous développons une théorie des familles p-adiques de formes automorphes de pente finie quelconque pour des groupes algébriques $G/\mathbb{Q}$ formes tordues de GL_n, sous la seule hypothèse vraiment restrictive de compacité de $G(\mathbb{R})$. Par exemple, si E est un corps quadratique imaginaire, G peut être le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ dont les points à valeurs dans toute $\mathbb{Q}$-algèbre R sont

$$\{g \in \mathrm{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} R), g\bar{g}^t = 1\}$$

Nous construisons de plus, à la manière de Coleman-Mazur, la zone centrale des variétés de Hecke[1] pour ces groupes. Bien que la plupart de nos résultats se généralisent en d'autres places p, nous choisissons un p tel que $G_{\mathbb{Q}_p} \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}_p$, qui est à priori le cas le plus important. Le terme "zone centrale" employé ci-dessus signifie que nous nous restreignons à des formes de niveau $\Gamma_1(p)$ en p.

Outre l'intérêt de comprendre comment se généralise le cas elliptique, l'idée initiale était de produire des déformations p-adiques des représentations galoisiennes de dimension n obtenues dans les travaux de Clozel, Kottwitz ([Cl]) puis Harris et Taylor ([H-T]). Les formes automorphes provenant de certains groupes unitaires compacts à l'infini rentrant dans le champs d'application de leurs travaux, ceci justifiait amplement que l'on s'intéresse à ces derniers. Ce but est accompli au §7.4. Il semble que ces constructions donnent les premiers exemples de déformations p-adiques raffinées non nécessairement ordinaires de représentations galoisiennes en dimension > 2. Une seconde motivation est de donner un cadre pour une théorie des formes automorphes p-adiques en général, en particulier d'en éclaircir les liens avec la théorie des représentations p-adiques des groupes de Lie p-adiques. Bien que ceci soit loin d'être élucidé dans ce texte, nous nous sommes efforcés à montrer comment l'existence des familles dans notre contexte découle, modulo la théorie de Coleman, d'une mise en famille des séries principales p-adiques de l'Iwahori de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et des propriétés élémentaires de cette famille.

L'avantage principal à considérer des groupes G sous l'hypothèse de compacité à l'infini vient de ce que les difficultés de nature géométrique dues aux places archimédiennes sont mises de côté. En effet, les quotients $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$, K un compact maximal de $G(\mathbb{A})$, sont ici finis, et toutes les formes automorphes pour G sont donc cohomologiques en degré 0. Aussi, nous nous ramenons en général essentiellement à travailler au niveau des systèmes de coefficients. Nous espérons cependant que ce travail permettra de guider l'étude des familles de formes cohomologiques de pente finie pour des groupes G plus généraux. Enfin, nos constructions fournissent une grande quantité de variétés de Hecke, entre lesquelles il est tentant de conjecturer l'existence de morphismes rigides-analytiques prolongeant "en famille" divers transferts de la fonctorialité de Langlands, comme la correspondance de Jacquet-Langlands, le carré symétrique etc... Nous espérons revenir sur certains aspects de cette philosophie de Langlands "en familles p-adiques" dans un travail futur (cf. [CH] à ce sujet).

Plan détaillé de l'article

[1]C'est le terme que nous utiliserons pour "eigenvariety", la traduction littérale prêtant à confusion.

Soit $G/\mathbb{Q}$ comme plus haut, il est attaché à un corps quadratique imaginaire $E/\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier impair[2] décomposé dans E tel que $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, ce qui vaut pour presque tout p décomposé dans E. On fixe de plus une place complexe de E, une place finie divisant p, ainsi qu'un plongement compatible à ces choix

$$i_p : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p,$$

qui nous permettent en particulier de plonger $G(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et d'identifier $G(\mathbb{Q}_p)$ avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Soit $U_0(p) \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert dont la p-composante est le sous-groupe d'Iwahori $\Gamma_0(p)$ des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ triangulaires supérieurs modulo p. Soit

$$\mathbb{Z}^{n,+} := \{t = (t_1 \geq .... \geq t_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

On peut voir ses éléments comme des caractères du tore diagonal de GL_n par

$$\mathrm{diag}(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1^{t_1} ... x_n^{t_n},$$

ce sont les caractères algébriques dominants pour l'ordre usuel. Les représentations automorphes de G ayant toutes de la cohomologie en degré 0, les plongements fixés plus haut nous fournissent un modèle sur $\mathbb{Q}_p$ de l'espace des formes automorphes de poids $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$ et de niveau $U_0(p)$: c'est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des fonctions $U_0(p)$-équivariantes sur

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)$$

à valeurs dans la représentation algébrique irréductible de plus haut poids t de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $U_0(p)$ agissant à travers son quotient $\Gamma_0(p)$. C'est un espace de dimension finie par la finitude du nombre de classes, sur lequel opère l'anneau des correspondances de Hecke de $(G(\mathbb{A}_f), U_0(p))$.

Nous sommes intéressés par faire varier ces espaces continûment p-adiquement en fonction de $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$. La méthode employée consiste à déformer p-adiquement les restrictions à $\Gamma_0(p)$ des représentations algébriques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ en fonction de leur plus haut poids. Aussi, nous consacrons les sections 2 et 3 à l'étude de certaines représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et $\Gamma_0(p)$. En particulier, la section 2 est un rappel sur un modèle explicite agréable pour les représentations algébriques de GL_n en caractéristique nulle, en terme d'invariants unipotents.

Tout comme dans la théorie de Coleman, l'interpolation se fait en deux temps : tout d'abord on "inclut" chacune de ces représentations dans une représentation de $\Gamma_0(p)$ sur un espace de Banach p-adique de dimension infinie, puis on montre que ces derniers se mettent en une famille analytique orthonormalisable. Ceci est achevé dans la troisième section. L'idée principale est de considérer l'orbite sous $\Gamma_0(p)$ de l'origine de la variété de drapeaux $L\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, L étant le Borel triangulaire inférieur. Elle admet une structure naturelle de $\mathbb{Q}_p$-points d'un affinoide sur $\mathbb{Q}_p$, noté $\mathcal{F}$ au §3.2. Par le théorème de Borel-Weil-Bott, dont nous reprouvons simplement la partie qui nous intéresse au §3.1, chaque représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est réalisée sur les sections globales d'un fibré en droites sur $L\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Or il se trouve que chaque tel fibré se restreint sur $\mathcal{F}$ en un fibré trivial, que l'on trivialise par un vecteur de plus haut poids, et dont les sections

[2]Cette hypothèse n'est faite dans cette introduction que pour simplifier l'exposition.

rigides sur $\mathcal{F}$ fournissent la représentation de $\Gamma_0(p)$ désirée. Ces représentations ont un espace de Banach sous-jacent fixé, précisément celui $A(\mathcal{F})$ des fonctions analytiques sur $\mathcal{F}$, mais sont tordues par un produit des 1-cocycles fondamentaux de GL_n "élevés à la puissance t". Cela nous permet de réaliser l'interpolation au §3.6.1, et de définir une famille orthonormale (cf. §3.7) $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_t\}_{t\in\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)}$ de représentations de $\Gamma_0(p)$ paramétrée par l'espace rigide "des poids analytiques"[3]

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) := \mathrm{Hom}_{gr-an}((\mathbb{Z}_p^*)^n, \mathbb{C}_p^*),$$

qui est l'ensemble des caractères continus du tore diagonal $(\mathbb{Z}_p^*)^n$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ qui sont analytiques restreints à $(1+p\mathbb{Z}_p)^n$. On peut voir $\mathcal{S}$ comme une famille analytique de séries principales de $\Gamma_0(p)$. Par notre choix de considérer la "grosse orbite sous $\Gamma_0(p)$" dans la variété de drapeaux, $\mathcal{S}$ a la propriété de s'étendre en une représentation du sous-monoïde plus gros $\mathbb{M}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ engendré par $\Gamma_0(p)$ et les opérateurs diagonaux

$$u^a := \mathrm{diag}(p^{a_1}, \cdots, p^{a_n})$$

avec $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \in \mathbb{Z}^n$. Si a_i est strictement croissante, nous montrons alors que u^a agit de manière compacte sur $\mathcal{S}$.

Les constructions précédentes nous permettent alors de définir la famille analytique des espaces de Banach de *formes automorphes p-adique de type* $(G, U_0(p))$ *et de poids dans* $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, notée $\mathcal{S}(G, U_0(p)) = \{\mathcal{S}_t(G, U_0(p))\}_{t\in\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)}$, en considérant l'espace des fonctions $U_0(p)$-équivariantes de $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)$ à valeurs dans $\mathcal{S}$. Cette famille admet une action de toute l'algèbre de Hecke globale de $U_0(p)$ hors de p, et en p de la sous-algèbre commutative de l'algèbre de Hecke-Iwahori constituée des éléments à support dans $\mathbb{M}$. Si $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$, vu comme élément de $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $\mathcal{S}_t(G, U_0(p))$ contient alors comme sous-Hecke-module le $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel de dimension finie

$$\mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{cl}$$

des formes automorphes de G de poids t, de niveau $U_0(p)$ et d'un certain caractère modéré en p. On pose

$$U_p := [U_0(p)\mathrm{diag}(1, p, p^2, ..., p^{n-1})U_0(p)],$$

c'est un endomorphisme $\mathcal{W}$-linéaire compact de $\mathcal{S}(G, U_0(p))$. Un élément de $\mathcal{S}_t(G, U_0(p))$ sera dit de *pente finie* α s'il est dans le plus grand sous-espace de dimension finie

$$\mathcal{S}_t(G, U_0(p))^\alpha$$

sur lequel U_p n'a que des valeurs propres de valuation α. Un résultat important, bien qu'élémentaire dans notre cas, est la généralisation suivante du résultat principal de [C2]. Si $t = (t_1 \geq ... \geq t_n) \in \mathbb{Z}^{n,+}$, on pose $\mathrm{Min}(t) := \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(t_i - t_{i+1})$ (cf. prop. 4.7.4) :

Théorème A : *Soient* $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}^+$,

$$\textit{si} \quad \mathrm{Min}(t) > \alpha - 1, \quad \textit{alors} \quad \mathcal{S}_t(G, U_0(p))^\alpha \subset \mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{cl}$$

[3]Nous avons choisi de ne pas considérer à part l'éventuel caractère modéré en p dans cette introduction, ce qui est plus élégant et permet d'alléger les notations. On prendra garde cependant que l'espace noté $\mathcal{W}$ ici est une réunion de $(p-1)^n$ copies de celui du même nom introduit dans le corps du texte (cf. §3.7.2). De même, la famille notée $\mathcal{S}$ ici est la réunion de celles notées $\mathcal{S}_\chi$ dans le texte.

En cinquième section, on étudie en détail la série caractéristique de U_p agissant sur $\mathcal{S}(G, U_0(p))$, donnée par la section 4 et la théorie de Coleman dans [C1]. Le résultat principal de cette section est le (cf. cor. 5.3.3)

Théorème B : *Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, il existe A et B deux constantes explicites ne dépendant que de n telles que si*

$$h = |G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/U_0(p)| \textit{ et } m(\alpha) = [h\alpha(A\alpha + B)^{2^n - n - 1}]$$

alors pour tous t, $t' \in \mathbb{Z}^{n,+}$ tels que $\mathrm{Min}(t)$, $\mathrm{Min}(t')> \alpha - 1$, si $t \equiv t' \bmod p^{m(\alpha)}$, alors

$$\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{cl,\alpha}) = \dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{t'}(G, U_0(p))^{cl,\alpha})$$

Notons que cet énoncé concerne les formes automorphes "classiques" pour G, il ne fait pas intervenir dans sa formulation les constructions précédentes. Il s'agit d'une version quantitative faible de la conjecture de Gouvêa-Mazur ([GM] conjecture 1) généralisée à nos groupes G. Les bornes ci-dessus sont analogues à celles obtenues par [Wan] dans le cas des formes modulaires elliptiques, pour lequel la dépendance de $m(\alpha)$ en α est quadratique, ce que l'on retrouve quand $n = 2$ (cas qu'avait déjà retrouvé Buzzard dans [B1]). La preuve de ce théorème suit essentiellement l'approche de Wan dans [Wan].

La sixième partie consiste en la construction des familles. Soient

$$P(T) \in 1 + TA(\mathcal{W})\{\{T\}\}$$

la série de Fredholm de U_p agissant sur $\mathcal{S}(G, U_0(p))$, $Z \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$ l'hypersurface de Fredholm définie par $P(T) = 0$, et

$$pr_1 : Z \longrightarrow \mathcal{W}, \quad pr_2 : Z \longrightarrow \mathbb{A}^1_{rig},$$

les deux projections canoniques. Le résultat suivant (cf. thm. 6.3.6, prop. 6.4.2 et prop. 6.4.6) est une généralisation à nos groupes des constructions de Coleman-Mazur dans [CM]. Dans ce qui suit, l'anneau $\mathcal{H}$ est un sous-anneau commutatif de l'algèbre de Hecke globale dont la p-composante est le sous-anneau de l'algèbre de Hecke-Iwahori des éléments à support dans $\mathbb{M}$.

Théorème C : *Il existe un espace analytique rigide $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G, U_0(p), \mathcal{H})$ muni d'un morphisme d'anneaux*

$$a : \mathcal{H} \longrightarrow A(\mathcal{D})^0,$$

ainsi qu'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "\pi"] \arrow[drr, "\mathbf{U}_p^{-1}"] \arrow[dd, "\kappa"'] & & \\
& Z \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[dl, "pr_1"] & \mathbb{A}^1_{rig} \\
\mathcal{W} & &
\end{tikzcd}$$

ayant les propriétés suivantes :

i) π *est un morphisme fini,*

ii) $\mathbf{U}_p := a(U_p)$ *est inversible sur* $\mathcal{D}$*,*

iii) *Pour tout* $x \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$*, il existe un voisinage ouvert affinoide* Ω *de* x *tel que :*
 (a) $z \mapsto |a(U_p)(z)|$ *est constante sur* $\Omega(\mathbb{C}_p)$*,*
 (b) $\kappa(\Omega)$ *est un ouvert affinoide de* $\mathcal{W}$*,*
 (c) $\kappa : \Omega \to \kappa(\Omega)$ *est fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de* Ω*,*

iv) *L'application*

$$\mathcal{D}(\mathbb{C}_p) \to \mathrm{Hom}_{ann}(\mathcal{H}, \mathbb{C}_p), \;\; x \mapsto (\chi_x : h \mapsto a(h)(x)),$$

induit pour chaque $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ *une bijection entre les points* $x \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ *tels que* $\kappa(x) = t$ *et les systèmes de valeurs propres de* $\mathcal{H}$ *agissant sur l'espace des formes automorphes* p*-adiques de poids* $\kappa(x)$ *et de pente finie, ces derniers étant comptés sans multiplicité.*

v) $\mathcal{D}$ *est emboîté*[4] *et équidimensionnel de dimension* n*. Chacune de ses composantes irréductibles* T *s'envoie par* π *de manière finie et surjective sur une composante irréductible de* Z *(qui est une hypersurface de Fredholm), et* $\kappa(T)$ *est un ouvert Zariski de* $\mathcal{W}$*.*

vi) *L'anneau* $a(\mathcal{H})$ *est d'adhérence compacte dans* $A(\mathcal{D})^0$*.*

Un point $x \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ *est dit classique si* χ_x *est le système de valeurs propres d'un élément de* $\mathcal{S}_{\kappa(x)}(G, U_0(p))^{cl}$*.*

vii) *Les points classiques sont Zariski-denses dans* $\mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$*.*

Dans la dernière section, nous appliquons ces résultats à certains groupes unitaires pour lesquels on sait associer, par les travaux de Clozel, Kottwitz, Harris-Taylor, des représentations galoisiennes de dimension n compatibles à la correspondance de Langlands locale. Le groupe unitaire G doit être pour ceci celui d'une algèbre à division D/E munie d'une involution de seconde espèce, D étant à division partout où elle est ramifiée, et ceci n'arrivant qu'en des places totalement décomposées de $E/\mathbb{Q}$. On fait bien sûr toujours l'hypothèse de compacité à l'infini afin d'utiliser les constructions précédentes, et l'on fixe un tel groupe $G/\mathbb{Q}$. Soient S l'ensemble fini des places v de E au-dessous desquelles G est ramifié ou bien divisant le niveau $U_0(p)$, $G_{E,S}$ le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de E non ramifiée hors de S, et pour $v \notin S$ un représentant $F_v \in G_{E,S}$ du Frobenius géométrique en v. On choisit l'algèbre de Hecke globale $\mathcal{H}$ contenant l'algèbre de Hecke globale hors de S et toujours les doubles classes de $\mathbb{M}$ en p. À chaque forme automorphe $f \neq 0$ de G, propre, de niveau $U_0(p)$, il est connu qu'il existe une unique représentation semi-simple continue

$$\rho(f) : G_{E,S} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

telle que

$$\forall v \notin S, \;\; \mathrm{tr}(\rho(f)(F_v)).f = T_v(f), \tag{1}$$

$T_v \in \mathcal{H}$ étant un opérateur de Hecke déterminé par la correspondance de Langlands non ramifiée, indépendant de f. La trace de $\rho(f)$ fournit un pseudo-caractère continu de

[4]"nested" dans la terminologie de [CM], §1.1.

Taylor de dimension n :

$$t(f) : G_{E,S} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

Soit $\mathbf{D}$ la nilréduction de l'espace $\mathcal{D}(G, U_0(p), \mathcal{H})$, alors (cf. cor. 7.4.1) :

Théorème D : *Il existe un unique pseudo-caractère continu $t : G_{E,S} \to A(\mathbf{D})$ de dimension n, dont l'évaluation en tout $x \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_p)$ classique coïncide avec $t(f_x)$, où $f_x \neq 0$ est une forme propre classique de type $(G, U_0(p))$ associée à x par le théorème C.*

Ainsi, si $x \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_p)$ et $f_x \neq 0$ est une forme propre pour le système de valeurs propres associé à x par le théorème C, non nécessairement classique, on dispose d'un pseudo-caractère continu $t(f_x) : G_{E,S} \to \mathbb{C}_p$, tel que si $v \notin S$, $t(f_x)(F_v)f_x = T_v(f_x)$. Par un résultat de Taylor, ce pseudo-caractère est la trace d'une unique représentation semi-simple continue $\rho(x) : G_{E,S} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)$. En particulier, nous avons associé à chaque forme automorphe p-adique propre de pente finie de G une représentation galoisienne p-adique de $G_{E,S}$ continue, semi-simple, de dimension n, satisfaisant (1). On montre alors que

$$\{x \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_p),\ \rho(x) \text{ est irréductible}\}$$

est l'ensemble des $\mathbb{C}_p$-points d'un ouvert Zariski $\mathbf{D}_{irr}$ de $\mathbf{D}$, puis le (cf. cor. 7.4.3) :

Théorème E : *Il existe une unique algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{D}_{irr}$ munie d'une représentation continue $G_{E,S} \longrightarrow \mathcal{A}^*$, dont l'évaluation en tout point classique de $\mathbf{D}_{irr}$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{C}_p$ de la représentation galoisienne associée à ce point par Clozel, Kottwitz, et Harris-Taylor.*

Enfin, nous discutons en §7.5 de certaines hypothèses formulées par Mazur dans [Ma] sur la variation p-adique de représentations cristallines. Précisément, à chaque point classique x *ancien en* p de $\mathbf{D}$ (les tels points sont Zariski-denses), nous attachons un raffinement "canonique" au p-motif attaché à x, qui est un ordre sur les racines du Frobenius cristallin ainsi qu'un polynôme-U, qui varie analytiquement en x. De plus, nous comparons la notion naturelle de "non criticité" pour les p-motifs classiques apparaissant dans notre étude avec celle proposée par Mazur *loc.cit.*, la notre s'avère plus restrictive.

Généralisations

Il serait intéressant d'avoir une version du théorème C pour des groupes réductifs G/F plus généraux et leurs formes automorphes cohomologiques en degré donné, F étant un corps de nombres, et en une place p quelconque. Les constructions de ce texte permettent de définir en une place p quelconque l'espace des formes automorphes p-adiques pour nos groupes G (il suffit de plonger $G(\mathbb{Q}_p)$ dans un $\mathrm{GL}_n(k)$ avec k local assez grand). La construction des familles de pente finie dépend alors de l'existence de certains opérateurs compacts agissant sur les espaces de formes p-adiques. Les candidats naturels pour ces opérateurs peuvent ne pas exister (par exemple si $G_{\mathbb{Q}_p}$ est anisotrope), ou alors être compacts seulement dans certaines directions de $\mathcal{W}$ ce qui donnerait quelques variantes. En général nous pourrions donc construire des variétés de Hecke en de tels p, mais de dimension éventuellement inférieure.

Dans un travail futur avec Buzzard, nous étendrons les résultats de ce chapitre aux formes partout compactes à l'infini de GL_n sur un corps totalement réel, en des places quelconques, et nous construirons toute la variété de Hecke *i.e.* sur l'espace global des poids (nous nous sommes restreints au centre de l'espace des poids dans ce texte). Notons que Buzzard a déjà construit cette version forte de la variété de Hecke dans le cas des algèbres de quaternions définies, et ce sur un corps totalement réel.

Remerciements : Je tiens à exprimer ma gratitude à Michael Harris, qui m'a encouragé à travailler sur ce problème, pour les nombreuses discussions éclairantes et stimulantes qui ont accompagné ce projet. Je remercie de plus Kevin Buzzard, dont les travaux sont à l'origine de cet article, Brian Conrad, Guy Henniart, Peter Schneider, ainsi que les membres du LAGA de Paris 13, en particulier Ahmed Abbès, pour les enrichissantes conversations que j'ai pu avoir avec eux. Enfin, je remercie le référé, dont les remarques ont permis d'améliorer la qualité du texte.

Notations et conventions :

Une action d'un groupe sur en ensemble sera toujours sous-entendue "à gauche". Si V est un groupe abélien muni d'une norme ultramétrique, V^0 désigne le sous-groupe des éléments de norme ≤ 1. Si p est un nombre premier, on note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour la norme usuelle, normalisée par $|p| = 1/p$. On désigne par $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} := \mathbb{C}_p^0$. Si K est un corps local, on note $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{m}_K$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$. Si E est un corps de nombres, $\mathbb{A}_E$ (resp. $\mathbb{A}_{E,f}$, resp. $\mathbb{A}^p_{E,f}$) désignera l'anneau des adèles de E (resp. adèles finis, resp. adèles finis hors de p), et on omettra le E quand $E = \mathbb{Q}$. Enfin, si X est un schéma ou un espace rigide, on notera $A(X)$ l'anneau des fonctions globales sur X.

2. Modèles pour les représentations algébriques de GL_n

Soient k un anneau commutatif, N le sous-groupe des unipotents supérieurs de $\mathrm{GL}_n(k)$, $\overline{N}$ celui des unipotents inférieurs, et $R := k[\mathrm{GL}_n] = k[\{X_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n}, \det(X_{i,j})^{-1}]$ l'algèbre des polynômes à n^2 variables $X_{i,j}$, vue[5] comme algèbre des fonctions algébriques sur GL_n/k. La multiplication de GL_n/k induit une action de $\mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ sur GL_n/k, puis sur R par automorphismes de k-algèbres. Soit $M := (X_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(R)$, $g \in \mathrm{GL}_n(k) \subset \mathrm{M}_n(k) \subset \mathrm{M}_n(R)$, les actions de g par multiplication à gauche et à droite, que l'on note respectivement g_l et g_r, se calculent par les formules :

$$g^{-1}M = (g_l.X_{i,j})_{i,j}, \;\; Mg = (g_r.X_{i,j})_{i,j} \tag{2}$$

Il est clair que ces deux actions commutent.

[5] Si $n \in \mathrm{M}_n(k)$, $n_{i,j} := X_{i,j}(n)$ est le coefficient sur la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne. On notera $n = (n_{i,j})_{i,j}$.

2.1. **Les invariants $Y_{i,j}$ des unipotents inférieurs.** On s'intéresse à la représentation de $\mathrm{GL}_n(k)$ agissant par multiplication à droite sur la sous-k-algèbre de R fixée à gauche par $\overline{N}$, que l'on note $R^{\overline{N}}$. On commence par exhiber des éléments de $R^{\overline{N}}$, qui s'avèreront être des générateurs. Notons que les fonctions $X_{1,j}$ sont invariantes, cette simple remarque nous en fournit plein d'autres de la manière suivante.

Observation : Si A est un anneau commutatif, pour tout couple d'entiers i et n avec $1 \leq i \leq n$, on dispose d'une représentation fonctorielle en A, $\mathrm{GL}(A^n) \to \mathrm{GL}(\Lambda^i(A^n))$. Si $e_1, ..., e_n$ est la base canonique de A^n, on choisit pour base de $\Lambda^i(A^n)$ les $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_i}$ avec $j_1 < j_2 < ... < j_i$, ordonnés par l'ordre lexicographique sur le i-uple $(j_1, ..., j_i)$. Cette base fournit un morphisme $\rho_i : \mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_{\binom{n}{i}}(A)$. Il est immédiat que ρ_i a la propriété d'envoyer les unipotents supérieurs (resp. inférieurs) de $\mathrm{GL}_n(A)$ dans ceux de $\mathrm{GL}_{\binom{n}{i}}(A)$. $\square$

Prenons $A := R$, et appliquons ρ_i à l'identité (2). Nous voyons que $\overline{N}$ est envoyé dans les unipotents inférieurs de $\mathrm{GL}_{d(i,n)}(R)$, et par conséquent qu'il fixe par multiplication à gauche la première ligne de $\rho_i(M)$. Notons $Y_{i,j}$ le coefficient de $\rho_i(M)$ qui se trouve à la première ligne et à la j^{ieme} colonne. Manifestement, à i fixé, les $Y_{i,j}$ sont les mineurs d'ordre i de M formés sur les i premières lignes de M. En particulier, $Y_{1,j} = X_{1,j}$ et $Y_{n,1} = \det(M)$. Par construction, pour i fixé, j est l'indice du j^{eme} i-uple $(j_1 < j_2 < ... < j_i)$ dans l'ordre total lexicographique de ces derniers. Pour chaque i, on notera $J(i) := \binom{n}{i}$, c'est le plus grand entier j indice du dernier $Y_{i,j}$.

2.2. **L'anneau des représentations algébriques de $\mathrm{GL}_n(k)$.** On suppose dorénavant que k est un corps de caractéristique 0. Soit T le tore diagonal de $\mathrm{GL}_n(k)$, T normalise $\overline{N}$ et agit par conséquent à gauche sur $R^{\overline{N}}$.

Si $t = [t_1, ..., t_n] \in \mathbb{Z}^n$, t désignera le poids (caractère) $T \to k^*$ défini par

$$t(\mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)) := \prod_{i=1}^{n} d_i^{t_i}$$

On pose $t_i := [0, .., 1, .., 0]$ où le 1 est à la ième place, notons que si $d \in T$, $d_l.X_{i,j} = t_i^{-1}(d)X_{i,j}$ et $d_r.X_{i,j} = t_j(d)X_{i,j}$. Par conséquent, si j correspond à $(j_1 < j_2 < \cdots < j_i)$:

$$d_l.Y_{i,j} = \left(\prod_{1\leq k\leq i} t_i(d)\right)^{-1} Y_{i,j} \tag{3}$$

$$d_r.Y_{i,j} = \left(\prod_{1\leq k\leq i} t_{j_k}(d)\right)Y_{i,j} \qquad \text{et} \qquad d_r.Y_{i,1} = \left(\prod_{1\leq k\leq i} t_i(d)\right)Y_{i,1} \tag{4}$$

Si t est un caractère comme plus haut, $f \in R$ sera dit de poids t à gauche (resp. à droite) si T agit à gauche (resp. à droite) sur $k.f$ par t^{-1} (resp. t). Notons que l'action de T à gauche sur R se diagonalise : $R = \bigoplus_t R_t$, R_t étant le k-vectoriel de dimension finie des éléments de poids t à gauche. De même, T normalisant $\overline{N}$,

$$R^{\overline{N}} = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}^n} R_t^{\overline{N}}$$

Cette décomposition commute à l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ par multiplication à droite, ce qui nous fournit des représentations algébriques $R_t^{\overline{N}}$ de $\mathrm{GL}_n(k)$ de dimension finie.

Un poids $t = [t_1, ..., t_n]$ sera dit positif si la suite des t_i est décroissante, on notera $t \geq 0$. L'ordre induit sur les poids est aussi celui donné par N. On a alors la

Proposition 2.2.1. *On a* $R^{\overline{N}} = \bigoplus_{t \geq 0} R_t^{\overline{N}}$. *De plus, si* $t \geq 0$, $R_t^{\overline{N}}$ *est la représentation algébrique irréductible de* $\mathrm{GL}_n(k)$ *de plus haut poids* t. *Elle est* k*-engendrée par les monômes en les* $Y_{i,j}$ *de poids (à gauche)* t, *le monôme en les* $Y_{i,1}$ *étant un vecteur de plus haut poids* t *(à droite).*

Preuve: Un théorème classique ([GW] §12.1.4) affirme que $R^{\overline{N}}$ est somme directe avec multiplicité 1 de toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(k)$, la sous-représentation de plus haut poids $t \geq 0$ étant le sous-espace de poids t à gauche. Cela implique les deux premières affirmations de l'énoncé. Soit $t \geq 0$, le k-espace vectoriel engendré par les monômes en les $Y_{i,j}$ de poids t à gauche est non vide par la formule (3). Il est stable par l'action à droite de $\mathrm{GL}_n(k)$, car pour chaque i, $\sum_j kY_{i,j}$ est stable par $\mathrm{GL}_n(k)$. C'est donc $R_t^{\overline{N}}$ tout entier par l'assertion d'irréductibilité. Notons que dans cette représentation de $\mathrm{GL}_n(k)$ (donc pour l'action à droite), $\prod_{i=1}^{n-1} Y_{i,1}^{t_i - t_{i+1}} Y_{n,1}^{t_n}$ est un vecteur de poids t, et que tous les autres monômes sont de poids inférieurs (voir les formules (4)), c'est donc un vecteur de plus haut poids.$\square$

2.3. **Reparamétrisation du poids.** Il est clair que $R_t^{\overline{N}}.R_{t'}^{\overline{N}} \subset R_{t+t'}^{\overline{N}}$, ce qui fait de $R^{\overline{N}} = \bigoplus_{t \geq 0} R_t^{\overline{N}}$ une k-algèbre graduée par les poids positifs. Pour la majeure partie de ce que nous avons en vue, le cas du déterminant $Y_{n,1}$ est un peu à part, nous l'écartons donc pour l'instant. Par la proposition 2.2.1, $R^{\overline{N}} = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} Y_{n,1}^r (\oplus_{t'} R_{t'}^{\overline{N}})$ où les $t' = [t'_1, ..., t'_n]$ sont positifs tels que $t'_n = 0$. On va donc regarder la sous-k-algèbre S de $R^{\overline{N}}$ définie par

$$S := \bigoplus_{t'} R_{t'}^{\overline{N}}, \text{ la somme étant sur les } t' = [t'_1, ..., t'_n] \text{ positifs tels que } t'_n = 0$$

S est stable par $\mathrm{GL}_n(k)$ et y apparaissent toutes les représentations algébriques de $\mathrm{GL}_n(k)$ dont le plus haut poids a sa coordonnée t_n fixée à 0. De plus, S est clairement une k-algèbre de type fini, engendrée par les $Y_{i,j}$ avec $i < n$, intègre car R l'est.

Par commodité, on change de paramétrisation pour les poids, on se place dans les coordonnées des poids fondamentaux : au n-uple $[t_1, ..., t_{n-1}, 0]$, on associe le $(n-1)-$*uple* $(m_1, ..., m_{n-1})$ défini par $m_1 := t_1 - t_2$, $m_2 := t_2 - t_3$,..., $m_{n-2} := t_{n-2} - t_{n-1}$ et $m_{n-1} := t_{n-1}$. La condition de positivité du poids dans les premières coordonnées se traduit par $m_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$. On note δ_i le poids $(0, ..., 1, ..., 0)$ où le i est sur la ième case. Dans ces coordonnées, chaque $Y_{i,j}$ est de poids (à gauche) δ_i, ce qui est pratique.

Exemples : - Pour $n = 2$, on pose $X = X_{1,1}$, $Y = X_{1,2}$, alors $S = k[X, Y] = \oplus_{m \geq 0} S_m$ où S_m est l'espace des polynômes homogènes de degré m en X, Y, vu comme représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(k)$, un vecteur de plus haut poids étant X^m.

- Pour $n = 3$, on pose $(X, Y, Z) = (X_{1,1}, X_{1,2}, X_{1,3})$ et $(U, V, W) = (Y_{2,1}, Y_{2,2}, Y_{2,3})$, alors S est la sous-k-algèbre de R engendrée par X, Y, Z, U, V et W. On pourrait montrer que c'est l'algèbre des polynômes sur ces variables avec pour unique relation $XW - YV + ZU = 0$. On a $S = \bigoplus_{m_1, m_2 \geq 0} S_{m_1,m_2}$, S_{m_1,m_2} étant la représentation irréductible de plus haut poids $(m_1, m_2, 0)$. Explicitement, elle est engendrée par les monômes du type M_1M_2 où M_1 (resp. M_2) est un monôme en X, Y, Z (resp. U, V, W) de degré m_1 (resp. m_2). Un vecteur de plus haut poids est $X^{m_1}U^{m_2}$.

À partir d'ici, on ne considérera plus que l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur S par multiplication à droite, soulignons que c'est une action à gauche de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur S. On écrira $(g, f) \mapsto g(f)$ cette action, au lieu de $g_r.f$. Un élément de S sera dit de poids t s'il est dans S_t.

2.4. **L'anneau Sym**$(\Lambda(V))$**.** On exploite dans ce paragraphe que $\mathbb{N}^{n-1}$ est engendré pour l'addition par les "poids fondamentaux" δ_i.

On pose $V := k^n$ la représentation standard de $\mathrm{GL}_n(k)$, avec sa base canonique. Soit $1 \leq i \leq n-1$ fixé, comme dans l'observation 2.1, $\Lambda^i(V)$ a une base canonique ordonnée que l'on note $(Z_{i,j})_{1 \leq j \leq J(i)}$. On rappelle que l'ordre est l'ordre total lexicographique sur les i-uples $(j_1 < j_2 < \cdots < j_i)$, renumérotés par $j \in \{1, \ldots, J(i)\}$. Par construction, $S_{\delta_i} = \sum_{j=1}^{J(i)} k.Y_{i,j}$ est isomorphe à $\Lambda^i(V)$, via $Y_{i,j} \to Z_{i,j}$, en tant que représentation de $\mathrm{GL}_n(k)$. C'est la représentation irréductible de plus haut poids δ_i. On en déduit un morphisme équivariant à l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$,

$$\varphi : B := \mathrm{Sym}(\oplus_{i=1}^{n-1}(\Lambda^i(V))) \longrightarrow S$$

L'image de φ est une sous-k-algèbre de S contenant les $Y_{i,j}$ $(i < n)$, c'est donc S tout entier par la proposition 2.2.1. Notons que $B = k[Z_{i,j}]$ a une graduation canonique par le poids $\mathbb{N}^{n-1}$ compatible via φ à celle de S, $B = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}^{n-1}} B_t$. On note J le noyau de φ, il est stable par $\mathrm{GL}_n(k)$ par ce que l'on vient de dire.

Remarques : - φ est un isomorphisme si et seulement si $n = 2$,

- J est engendré par des quadriques en les $Z_{i,j}$, les relations de Plücker (cf [Tow]),

- On ne sait pas en général donner une B-résolution de J en terme des représentations de GL_n.

2.5. **Intégralité et opérateurs** U**.** À partir de là, on fixe un nombre premier p, et $k := \mathbb{Q}_p$. On note $\Gamma_0(p)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ composé des éléments triangulaires supérieurs modulo p. Pour chaque suite croissante positive d'entiers $a = (a_1 \leq \cdots \leq a_n)$, on considère

$$u^a := \mathrm{diag}(p^{a_1}, ..., p^{a_n}), \text{ et } \mathbb{T}^a := \Gamma_0(p)u^a\Gamma_0(p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$$

On pose aussi $u := \mathrm{diag}(1, p, p^2, ..., p^{n-1}) = u^{(0,1,...,n-1)}$, $\mathbb{T} := \mathbb{T}^{(0,1,...,n-1)}$ et $\mathbb{M}$ le sous-monoïde de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ engendré par les éléments de tous les $\mathbb{T}^a$. Il est connu (cf. par exemple [SS], preuve du lemme 10 §4) que

$$\mathbb{T}^a\mathbb{T}^{a'} = \mathbb{T}^{a+a'}, \text{ et } \mathbb{T}^a \cap \mathbb{T}^{a'} = \emptyset \text{ si } a \neq a' \tag{5}$$

En particulier, $\mathbb{M}$ est la réunion disjointe des $\mathbb{T}^a$, et coïncide avec le sous-ensemble $\Gamma_0(p)U\Gamma_0(p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$, où U est l'ensemble des u^a.

Le lemme ci-dessous précise l'action de $\Gamma_0(p)$ et des u^a sur les $Z_{i,j}$ (et donc sur B). Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on pose $\beta_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$. On fixe un $\gamma \in \Gamma_0(p)$:

Lemme 2.5.1. – *Pour tout i, $\gamma(Z_{i,1}) \in \mathbb{Z}_p^* Z_{i,1} + p \sum_k \mathbb{Z}_p Z_{i,k}$, et si $1 \leq j \leq J(i)$, $\gamma(Z_{i,j}) \in (\sum_k \mathbb{Z}_p Z_{i,k})$*
– *Pour tout i et $1 \leq j \leq J(i)$, j correspondant au i-uple $(j_1 < j_2 < \cdots < j_i)$, $u^a(Z_{i,j}) = p^{\sum_k a_{j_k}} Z_{i,j}$,*
– *En particulier, $u^a(Z_{i,j}) \in p^{\beta_i}\mathbb{Z}_p Z_{i,j}$, $u(Z_{i,j}) \in p^{i(i-1)/2}\mathbb{Z}_p Z_{i,j}$.*

Preuve: Il faut comprendre l'action de $\Gamma_0(p)$ et des u^a sur $\Lambda^i(R^n)$ comme en 2.1. Les éléments de $\Gamma_0(p)$ s'envoient dans le $\Gamma_0(p)$ correspondant, par l'observation 2.1 (avec $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X_{i,j}]$), d'où les deux assertions sur γ. Il reste à voir ce que devient la diagonale u^a. Sur le vecteur $e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_i}$ $(1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_i \leq J(i))$, c'est la multiplication par $p^{a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_i}}$, qui est toujours divisible par p^{β_i}. Il y a égalité uniquement pour le premier coefficient. Notons que si $a = (0, 1, ..., n-1)$, $\beta_i = i(i-1)/2$. $\square$

3. Famille analytique des représentations de $\Gamma_0(p)$

3.1. **Variété de drapeaux.** On a défini en 2.4 l'anneau

$$B = \mathrm{Sym}(\oplus_{i=1}^{n-1}(\Lambda^i(\mathbb{Q}_p^n))) = \bigotimes_{i=1}^{n-1} \mathrm{Sym}(\Lambda^i(\mathbb{Q}_p^n)),$$

qui est l'anneau des coordonnées multihomogènes sur $X := \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}^{J(i)-1}_{/\mathbb{Q}_p}$. Pour chaque $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\mathbb{P}^{J(i)-1}_{/\mathbb{Q}_p}$ a un système de coordonnées homogènes privilégié, qui est

$$(Z_{i,1} : \cdots : Z_{i,J(i)})$$

Soit J l'idéal multihomogène noyau du morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\varphi : B \to S$ défini en 2.4 ; on note $\widetilde{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux sur X associé à J. On définit F comme étant le sous-schéma fermé de X associé à $\widetilde{J}$ et $i : F \hookrightarrow X$ l'immersion fermée sous-jacente. L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur B induit une opération de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur X par $\mathbb{Q}_p$-automorphismes, qui préserve F car φ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-équivariant.

Par la proposition 2.2.1, on sait que $S_{(m_1,...,m_{n-1})}$, la partie $(m_1, ..., m_{n-1})$-homogène de S, est la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids $(m_1, ..., m_{n-1})$. Soit le faisceau inversible sur X défini par

$$\mathcal{O}(m_1, ..., m_{n-1}) := pr_1^*(\mathcal{O}(m_1)) \otimes \cdots \otimes pr_{n-1}^*(\mathcal{O}(m_{n-1}))$$

où $pr_i : X \to \mathbb{P}(\Lambda^i(V)^*)$ est la projection canonique,

$$\mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1}) := i^*(\mathcal{O}(m_1, ..., m_{n-1}))$$

On a alors le :

Lemme 3.1.1. *L'application canonique*

$$S_{(m_1,...,m_{n-1})} \to H^0(F, \mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1}))$$

est un isomorphisme.

Preuve: Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ un $n-1$-uple d'entiers tels que $1 \leq \alpha_i \leq J(i)$, on note $Z_\alpha := \prod_{i=1}^{n-1} X_{i,\alpha_i}$, et U_α l'ouvert affine de X défini par $Z_\alpha \neq 0$: les U_α recouvrent X. L'anneau de fractions $S_{\varphi(Z_\alpha)}$ est naturellement gradué par $\mathbb{Z}^{n-1}$ et si $t = (m_1, ..., m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, l'application canonique :

$$A_{\alpha,t} := \{x \in S_{\varphi(Z_\alpha)}, \deg(x) = t\} \longrightarrow H^0(F \cap U_\alpha, \mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1}))$$

est par construction un isomorphisme k-linéaire. Comme S est intègre et $Y_{i,j} = \varphi(Z_{i,j})$ est non nul, l'anneau $S_{\varphi(Z_\alpha)}$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau gradué de l'anneau de fractions $S_{\prod_{i,j} Y_{i,j}}$. Notons que chaque $Y_{i,j}$ engendre un idéal premier de S. Cela vient de ce que le mineur $Y_{i,j}$ est un irréductible de l'anneau factoriel R, et que $(Y_{i,j}R) \cap S = Y_{i,j}S$. De plus, les $Y_{i,j}S$ sont deux à deux distincts. On en déduit immédiatement que l'intersection des $A_{\alpha,t}$ dans $S_{\prod_{i,j} Y_{i,j}}$ est exactement S_t, ce que l'on voulait. $\square$

Remarques :
- Discutons rapidement du lien avec la variété de drapeaux classique, bien qu'il ne nous sera pas utile pour la suite. Le quotient $\overline{N}\backslash \mathrm{SL_n}$ (qui n'est jamais affine) est un ouvert de $\mathrm{Spec}(S)$. Précisément, c'est l'ouvert sur lequel $T \simeq (\mathbb{G}_m^*)^{n-1}$ agit librement par translation à gauche, ce qui identifie, si $\overline{P}$ désigne le Borel inférieur standard de $\mathrm{SL_n}$, $\overline{P}\backslash \mathrm{SL_n}$ avec F. L'immersion i est alors la composée de $F \simeq \overline{P}\backslash \mathrm{SL_n}$ avec le *plongement canonique de Plücker*, et S l'anneau des coordonnées homogènes de $i(F)$ dans le produit de projectifs en question.
- Le lemme 3.1.1 est aussi une conséquence du théorème de Borel-Weil-Bott, il a pour unique avantage sur ce dernier de faire le lien avec la théorie des invariants, et en particulier de fournir un modèle explicite.

3.2. **Analytification.** Si Z est un schéma de type fini sur $\mathbb{Q}_p$, on note Z^{an} le $\mathbb{Q}_p$-espace rigide associé. On se place sur l'ouvert affine Ω de X défini par $Z_{i,1} \neq 0, \ \forall i \in \{1, ..., n-1\}$. Si $1 < j \leq J(i)$, on pose $z_{i,j} = Z_{i,j}/Z_{i,1}$, ce sont des coordonnées sur Ω identifiant ce dernier à $\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{J(i)-1}$. Soit $I := H^0(\Omega, \widetilde{J})$, c'est donc l'idéal définissant $F \cap \Omega$ dans Ω. L'image des $z_{i,j}$ dans $A(\Omega)/IA(\Omega) = A(F \cap \Omega)$ sera notée $y_{i,j}$. On regarde le sous-domaine affinoide $\mathcal{B}$ de $\Omega^{an} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{rig,\mathbb{Q}_p}^{J(i)-1}$ défini par $|z_{i,j}| \leq 1$. L'algèbre affinoide $A(\mathcal{B}) = \mathbb{Q}_p\langle z_{i,j}\rangle$ est munie de sa norme sup. $|.|$ (qui est aussi la norme de Gauss), et a une structure entière canonique qui est $A^0(\mathcal{B}) = \mathbb{Z}_p\langle z_{i,j}\rangle$. On pose $\mathcal{F} := \mathcal{B} \cap F^{an}$, $A(\mathcal{F}) = A(\mathcal{B})/IA(\mathcal{B})$, *on le munit de la norme quotient de* $A(\mathcal{B})$. Notons que le point e de coordonnées $y_{i,j} = 0$ est dans $\mathcal{F}$. L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur X^{an} préserve F^{an}, de plus :

Lemme 3.2.1. *La restriction à $\Gamma_0(p)$ de cette opération préserve $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$, et l'action induite sur $A(\mathcal{B})$ (resp. $A(\mathcal{F})$) préserve $A^0(\mathcal{B})$ (resp. $A^0(\mathcal{F})$).*

Preuve: Explicitons l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur $X(\mathbb{C}_p)$. Elle est définie par

$$\forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), x \in X(\mathbb{C}_p), f \text{ une fonction rationnelle sur } X, f(x\gamma) = \gamma(f)(x)$$

On se place sur le i-ème facteur projectif, les coordonnées homogènes sont $(Z_{i,1} : \cdots : Z_{i,J(i)})$, et $\gamma \in \Gamma_0(p)$ agit sur les $Z_{i,j}$ (lemme 2.5.1) par

$$\gamma(Z_{i,j}) = \sum_{k=1}^{J(i)} a_{i,j,k} Z_{i,k},$$

Où $a_{i,j,1}, \cdots, a_{i,j,k}, \cdots, a_{i,j,J(i)}$ sont dans $\mathbb{Z}_p$ avec $a_{i,1,k} \in p\mathbb{Z}_p$ si $1 < k \leq J(i)$ et $a_{i,1,1} \in \mathbb{Z}_p^*$.

Soit x dans $\mathcal{B}(\mathbb{C}_p)$, on a $Z_{i,1}(x) \neq 0$, on peut donc supposer $Z_{i,1}(x) = 1$ et alors par définition $|Z_{i,j}(x)| \leq 1$ pour $1 < j \leq J(i)$. Comme $\gamma(Z_{i,1}) \equiv a_{i,1,1} Z_{i,1} \bmod p\mathbb{Z}_p$, avec $a_{i,1,1} \in \mathbb{Z}_p^*$, il vient $|Z_{i,1}(x\gamma)| = 1$. En particulier, il est non nul et les coordonnées de $x\gamma$ sont

$$\left(1, \frac{\sum_{k=1}^{J(i)} a_{i,2,k} z_{i,k}(x)}{a_{i,1,1} + \sum_{k=2}^{J(i)} a_{i,1,k} z_{i,k}(x)}, \cdots, \frac{\sum_{k=1}^{J(i)} a_{i,J(i),k} z_{i,k}(x)}{a_{i,1,1} + \sum_{k=2}^{J(i)} a_{i,1,k} z_{i,k}(x)}\right)$$

Notons que les conditions $|z_{i,j}(x)| \leq 1$, $a_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_p$, et $a_{i,1,k} \in p\mathbb{Z}_p$ si $1 < k \leq J(i)$, et $a_{i,1,1} \in \mathbb{Z}_p^*$ montrent que $x\gamma$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{C}_p)$ et que pour l'action induite sur $A(\mathcal{B})$, $A^0(\mathcal{B}) = \mathbb{Z}_p{<}x_{i,j}{>} \subset A(\mathcal{B})$ est préservé.

Les assertions analogues relatives à $\mathcal{F}$ en découlent immédiatement, car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ préserve F^{an} et que l'application canonique $A^0(\mathcal{B}) \to A^0(\mathcal{F})$ est surjective. Cette dernière affirmation vient de ce que $A(\mathcal{F})$ est muni par définition la norme quotient de $A(\mathcal{B})$, dont l'ensemble des valeurs est une partie discrète de $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque : Il est en fait aisé de voir que $\mathcal{F}(\mathbb{Q}_p)$ est l'orbite de e sous $\Gamma_0(p)$. En effet, $F(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} e.w\Gamma_0(p)$, et $\mathcal{F}(\mathbb{Q}_p)$ est une réunion de telles orbites qui ne peut pas contenir $e.w$ si $w \neq 1$.

Il reste à regarder l'action des opérateurs u^a. Par le lemme 2.5.1, si j désigne le i-uple $(j_1 < j_2 < \ldots < j_i)$, alors $u(z_{i,j}) = p^{(\sum_{k=1}^{i} a_{j_k} - a_k)} z_{i,j} \in \mathbb{Z}_p z_{i,j}$. Le monoïde $\mathbb{M}$ stabilise donc $\mathcal{B}$; $A(\mathcal{B})$ et $A^0(\mathcal{B})$ sont ainsi des représentations de tout $\mathbb{M}$. Les assertions du lemme 3.2.1 sont donc encore vérifiées pour $\mathbb{M}$ à la place de $\Gamma_0(p)$.

Lemme 3.2.2. – *$A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$ sont orthonormalisables sur $\mathbb{Q}_p$,*
- *$\mathbb{M}$ opère linéairement continûment sur $A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$, par des opérateurs de norme ≤ 1.*
- *Les u^a sont complètement continus sur $A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$ si a est strictement croissante.*

Preuve: Il est clair que $A(\mathcal{B})$ est orthonormalisable sur $\mathbb{Q}_p$, une base orthonormale étant par exemple donnée par 1 et les monômes en les $z_{i,j}$. Comme $IA(\mathcal{B})$ est un idéal de l'algèbre affinoide $A(\mathcal{B})$, il est fermé. Les $\mathbb{Q}_p$-Banach $IA(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F}) = A(\mathcal{B})/IA(\mathcal{B})$, munis tous deux de la norme induite par $A(\mathcal{B})$, satisfont à l'hypothèse (N) de [Ser] (car $|A(\mathcal{B})| = |\mathbb{Q}_p|$), ils sont donc orthonormalisables d'après *loc. cit.* Il existe même une section isométrique à $A(\mathcal{B}) \to A(\mathcal{F})$, identifiant $A(\mathcal{B})$ avec $IA(\mathcal{B}) \oplus A(\mathcal{F})$.

Les éléments de $\Gamma_0(p)$ préservant $A^0(\mathcal{B})$, qui est la boule unité de $A(\mathcal{B})$, agissent donc par endomorphismes de norme ≤ 1. Par passage au quotient, ils restent de norme ≤ 1 sur $A(\mathcal{F})$ (ils sont même de norme 1). Enfin, u^a est diagonal dans la base des monômes en les $z_{i,j}$ et clairement de norme ≤ 1, complètement continu si et seulement si a est strictement croissante, comme on le voit sur la formule $u(z_{i,j}) = p^{(\sum_{k=1}^{i} a_{j_k} - a_k)} z_{i,j}$. On en déduit le lemme par passage au quotient. □

Pour terminer, nous aurons besoin d'un calcul supplémentaire :

Lemme 3.2.3. *Soit $g = \gamma_1 u^a \gamma_2 \in \mathbb{T}^a$, alors*

$$g(z_{i,j}) = \frac{a_1 + \sum_{k=2}^{J(i)} a_k z_{i,k}}{\lambda + p(\sum_{k=2}^{J(i)} b_k z_{i,k})}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{Z}_p, \ \lambda \in \mathbb{Z}_p^*$$

Tous les a_k avec $k > 1$ sont dans $p\mathbb{Z}_p$ si a est strictement croissante.

Preuve: C'est un calcul identique à celui du lemme 3.2.1. On a

$$\rho_i(g) = \rho_i(\gamma_1)\rho_i(u^a)\rho_i(\gamma_2),$$

où $\rho_i(\gamma_1)$ et $\rho_i(\gamma_2)$ sont triangulaires supérieurs modulo p, $\rho_i(u^a)$ étant de la forme $p^{\beta_i} v$, où v est diagonale à coefficients dans $p^{\mathbb{N}}$. Lorsque a est strictement croissante, v est congrue à $\mathrm{diag}(1, 0, , ..., 0)$ modulo p, par le lemme 2.5.1.

La matrice $p^{-\beta_i}\rho_i(g)$ est donc congrue modulo p à une matrice triangulaire supérieure avec un inversible en première case. Dans le cas où a est strictement croissante, $p^{-\beta_i}\rho_i(g)$ mod p est partout nulle sauf sa première ligne (dont le premier coefficient est non nul et les autres sont quelconques à priori). Le même calcul qu'au lemme 3.2.1 montre alors que $g(z_{i,j}) =$"$p^{-\beta_i}\rho_i(g)(Z_{i,j})/p^{-\beta_i}\rho_i(g)(Z_{i,1})$", ce qui est le résultat. □

3.3. Représentations analytiques de dimension infinie de $\Gamma_0(p)$.

Soit $t = (m_1, ..., m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{L}_t := \mathcal{O}(m_1, ..., m_{n-1})$ est localement libre de rang 1 engendré par ses sections globales, qui sont par construction le $\mathbb{Q}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)]$-module B_t. De plus, $\mathcal{L}_t$ est libre sur Ω de rang 1, engendré par $e_t := Z_{1,1}^{m_1} Z_{2,1}^{m_2} \cdots Z_{n-1,1}^{m_{n-1}}$. Il est donc libre sur $\mathcal{B}$ avec la même propriété, on le note $\mathcal{N}^t$. On le munit de la norme définie par $|e_t g| = |g|$. L'application $\psi_t : A(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}^t$ définie par $\psi_t(g) = e_t g$ est alors un isomorphisme isométrique.

De même, $i^*(\mathcal{L}_t) = \mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1})$ est un faisceau inversible sur F dont les sections globales sont exactement le $\mathbb{Q}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)]$-module S_t, par le lemme 3.1.1. Sa restriction à $\mathcal{F}$ est libre de rang 1 sur $A(\mathcal{F})$ avec pour base la section $f_t := Y_{1,1}^{m_1} Y_{2,1}^{m_2} \cdots Y_{n-1,1}^{m_{n-1}}$. On le note $\mathcal{S}^t$. On le munit de la norme définie par $|f_t g| = |g|$. L'application $\psi_t : A(\mathcal{F}) \to \mathcal{S}^t$ définie par $\psi_t(g) = f_t g$ est alors un isomorphisme isométrique.

On peut calculer l'action induite par $\Gamma_0(p)$ et les u^a sur $\mathcal{N}^t$ et $\mathcal{S}^t$, tout comme dans le lemme 3.2.1, on trouve, pour $\mathcal{N}^t$:

$$\gamma(e_t f) = e_t \prod_{i=1}^{n-1} j_i(\gamma)^{m_i} \gamma(f) \tag{6}$$

où les j_i sont des 1-cocycles $\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Q}_p\langle (z_{i,j})_{1<j\leq J(i)}\rangle^* \subset A(\mathcal{B})^*$, dont la restriction à $\Gamma_0(p)$ est indépendante de t et à valeurs dans $\mathbb{Z}_p\langle (z_{i,j})_{1<j\leq J(i)}\rangle^* \subset A(\mathcal{B})^{0*}$. Ils vérifient donc

$$j_i(\gamma_1\gamma_2) = j_i(\gamma_1)\gamma_1(j_i(\gamma_2))$$

Explicitement, on trouve :

$$j_i(\gamma) = a_{i,1,1}(\gamma) + \sum_{k=2}^{J(i)} a_{i,1,k}(\gamma) z_{i,k}$$

Les $a_{i,1,k}(\gamma)$ sont définis comme dans le lemme 3.2.1, notons qu'ils sont tous dans $p\mathbb{Z}_p$ sauf le premier, $a_{i,1,1}(\gamma) \in \mathbb{Z}_p^*$. Les cocycles pour $\mathcal{S}^t$ s'obtiennent par projection $A(\mathcal{B})^* \to A(\mathcal{F})^*$, en remplaçant les $z_{i,j}$ par des $y_{i,j}$, on les notera encore j_i.

Les formules pour les j_i nous montrent deux choses :

– Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathcal{S}^t$ (resp. $\mathcal{N}^t$) est isomorphe à $A(\mathcal{F})$ (resp. $A(\mathcal{B})$) comme $\mathbb{Q}_p[\Gamma_0(p)]$-module si l'on tord l'action de $\Gamma_0(p)$ sur $A(\mathcal{F})$ (resp. $A(\mathcal{B})$) par le produit de cocycles $j_1^{m_1} \cdots j_{n-1}^{m_{n-1}}$. Précisément, on considère l'action suivante (dite "t-tordue") de $\Gamma_0(p)$ sur $A(\mathcal{B})$

$$[\gamma]_t(f) := \prod_{i=1}^{n-1} j_i^{m_i}(\gamma)\gamma(f) \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) montrent que l'application $\psi_t : A(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}^t$ définie plus haut est $\Gamma_0(p)$-équivariante pour l'action t-tordue sur $A(\mathcal{B})$, et comme plus haut sur $\mathcal{N}^t$. Notons que $[\Gamma_0(p)]_t$ préservant $IA(\mathcal{B})$, l'action t-tordue passe donc au quotient $A(\mathcal{F})$, $\psi_t : A(\mathcal{F}) \to \mathcal{S}^t$ étant encore équivariant par construction.

– L'expression $j_i(\gamma)^s$ a un sens dans $A(\mathcal{B})$ pour s non nécessairement dans $\mathbb{Z}$, mais plus généralement dans un disque ouvert de $\mathbb{C}_p$. Cette observation sera exploitée plus loin.

En ce qui concerne le lien entre S_t et $\mathcal{S}^t$, on a le

Lemme 3.3.1. *Soit $t = (m_1, ..., m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, l'application canonique $S_t \to \mathcal{S}^t$ est injective.*

Preuve: S_t est une $\mathbb{Q}_p$-représentation irréductible de $gl_n(\mathbb{Q}_p)$. Cette dernière étant aussi l'algèbre de Lie du sous-groupe ouvert $\Gamma_0(p)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, S_t est une représentation irréductible de $\Gamma_0(p)$. Comme la restriction canonique $S_t \to \mathcal{S}^t$ est $\Gamma_0(p)$-équivariante, elle est soit nulle, soit injective. Elle n'est pas nulle car f_t est dans son image. □

Remarque : La même assertion vaut pour $B_t \to \mathcal{N}^t$, mais elle est triviale.

3.4. **Torsion par des caractères de $\Gamma_0(p)$.** Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on dispose d'un caractère $\det^n : \Gamma_0(p) \to \mathbb{Q}_p^*$ (même défini sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, bien sûr) par lequel il est possible de tordre toute $\mathbb{Q}_p$-représentation de $\Gamma_0(p)$. Ainsi, si $s = (t, n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, S_s (resp. $\mathcal{S}^s$, B_s ou $\mathcal{N}^s$) désignera la représentation de $\Gamma_0(p)$ sur S_t (resp. $\mathcal{S}^t$, B_t ou $\mathcal{N}^t$) tordue par $\det^n$. Notons que $\det : \Gamma_0(p) \to \mathbb{Z}_p^*$ peut encore se voir comme un 1-cocycle de $\Gamma_0(p)$ dans $\mathbb{Z}_p^*$ (avec action triviale), ce qui permet de l'étudier en même temps que les cocycles j_i, on pose d'ailleurs $j_n := \det$.

De plus, si $\Gamma_1(p)$ désigne le sous-groupe de $\Gamma_0(p)$ composé des matrices unipotentes modulo p, $\Gamma_1(p)$ est distingué de quotient $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*)^n$, ce qui nous fournit un groupe fini de caractères Δ^n, où

$$\Delta := \mathrm{Hom}_{gr}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \mathbb{Z}_p^*)$$

Nous aurons un peu plus loin à tordre certaines représentations de $\Gamma_0(p)$ par des éléments de Δ^n. Si V est une représentation de $\mathbb{Z}_p[\Gamma_0(p)]$, $\chi \in \Delta^n$, nous noterons $V_\chi := V \otimes \chi$ la représentation V tordue par χ. Nous noterons de plus par abus $S_{t,\chi}$ (resp. $B_{t,\chi}$) pour $(S_t)_\chi$ (resp. $(B_t)_\chi$).

3.5. Action et renormalisation des opérateurs U.

Soit $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, l'action des u^a sur $\mathcal{N}^t$ est donnée par le lemme 2.5.1 :

$$\text{Si } f \in A(\mathcal{B}),\ u^a(e_t f) = e_t\, \nu_t^{-1}(u^a) u^a(f),\ \ \nu_t^{-1}(u^a) := p^{\sum_{i=1}^n m_i (\sum_{k=1}^i a_k)} \in p^{\mathbb{N}}$$

Ceci définit un caractère ν_t du monoïde U. Ce caractère est encore la restriction à U de l'inverse du caractère de plus haut poids de S_t, *i.e.* l'inverse de t. En utilisant la formule (5), il est facile de vérifier que ν_t s'étend de manière unique en un caractère de $\mathbb{M}$ trivial sur $\Gamma_0(p)$. On peut donc tordre la représentation ρ_t de $\mathbb{M}$ sur $\mathcal{N}^t$ par ν_t, ce qui n'affecte pas l'action restreinte à $\Gamma_0(p)$, mais renormalise les u^a de sorte que

$$(\rho_t \otimes \nu_t)(u^a)(e_t f) = e_t u^a(f)$$

De même qu'au paragraphe précédent, cette action se transporte à $A(\mathcal{B})$ via ψ_t, on la note $[.]_t$, elle est définie par

$$e_t [g]_t(f) = (\rho_t \otimes \nu_t)(g)(e_t f)$$

On renomme alors les cocycles $j_i \otimes \nu_t$ en j_i, ceci n'affecte pas leur restriction à $\Gamma_0(p)$, ils sont indépendants de t. Soit $g \in \mathbb{M}$, on résume ceci en :

$$(8)\quad \begin{cases} [g]_t(f) = \prod_{i=1}^n j_i^{m_i}(g) g(f) \\ \text{Si } i < n,\ j_i(g) = \lambda + p(\sum_{k=2}^{J(i)} b_k z_{i,k}),\ \ b_k \in \mathbb{Z}_p,\ \lambda \in \mathbb{Z}_p^* \text{ (cf. lemme 3.2.3)} \\ j_n(g) = \det(g) \in \mathbb{Z}_p^* \\ \forall i \in \{1, ..., n\},\ \ j_i(u^a) = 1 \text{ ("renormalisation")} \end{cases}$$

Quand t est nul, $[.]_0$ coïncide avec l'action naturelle de $\mathbb{M}$ sur $A(\mathcal{B})$ (il n'y a pas de renormalisation en poids 0). En général, $[.]_t$ apparaît comme étant la représentation $[.]_0$ tordue par le 1-cocycle $\prod_{i=1}^n j_i^{m_i}$. Enfin, ces actions préservant $IA(\mathcal{B})$, elles passent au quotient $A(\mathcal{F})$, et proviennent de celles sur $\mathcal{S}^t$ via ψ_t. On les désignera de la même manière pour ne par alourdir les notations.

3.6. **Interpolation.** Soit $\omega \in \mathbb{C}_p$ tel que $\omega^{p-1} = -p$ si $p > 2$, $\omega := 2$ si $p = 2$. On pose $\mathbf{p} := 4$ si $p = 2$, $\mathbf{p} := p$ si p est impair. Nous aurons à utiliser une petite modification[6] des résultats des paragraphes précédents pour $p = 2$. Précisément, $\Gamma_0(2)$ désignera désormais les matrices triangulaires supérieures modulo 4, et les u^a désigneront les $\mathrm{diag}(2^{a_1}, ..., 2^{a_n})$. On rappelle le :

Lemme 3.6.1. *Si A est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach commutative, $f \in A$ tel que $|f| \leq |\mathbf{p}|$, $s \in A$, alors $(1+f)^s := 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} f^n$ converge dans A si $|s| < |\omega/\mathbf{p}|$. La notation $(1+f)^s$ est consistante avec la définition usuelle lorsque $s \in \mathbb{Z}$.*

On a les identités suivantes pour $f, g, s, s' \in A$, tels que $|f|, |g| \leq |\mathbf{p}|$, $|s|, |s'| < |\omega/\mathbf{p}|$:
- $(1+f)^s(1+f)^{s'} = (1+f)^{s+s'}$,
- $(1+f)^s(1+g)^s = ((1+f)(1+g))^s$,
- $(1+f)^s = \exp_p(s \log_p(1+f))$,
- $|(1+f)^s - 1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, *en particulier* $|(1+f)^s| = 1$.

Preuve: Si $|s| \leq 1$, $|\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} f^n| \leq |\mathbf{p}/\omega|^n$ et la série converge car $|\omega| > |\mathbf{p}|$. Si $|s| > 1$, $|\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} f^n| \leq |\mathbf{p}s/\omega|^n |\omega^n/n!|$ qui converge si $|\mathbf{p}s/\omega| < 1$ (séparer le cas $p = 2$), ce que l'on voulait. La vérification des trois identités est un argument classique. La dernière identité vient de ce que si $|f| \leq |\mathbf{p}|$ et $|s| < |\omega/\mathbf{p}|$, alors

$$(1+f)^s = \exp_p(s \log_p(1+f)) = \sum_{n\geq 0} \frac{s^n(\log_p(1+f))^n}{n!}$$

Le terme général de la série ci-dessus est de norme $< p^{-n(v(|f|)+v(|\omega|/\mathbf{p})-\frac{1}{p-1})+\frac{S_n}{p-1}} \leq p^{-\frac{S_n}{p-1}}$, S_n désignant la somme des chiffres de l'écriture de n en base p. $\square$

Soit $\tau : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}_p^*$ le morphisme de Teichmüller. Par les formules (8), les cocycles $j_i : \mathbb{M} \to \mathbb{Z}_p\langle z_{i,j}\rangle^*$ tombent dans $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^*$ modulo $\mathbf{p}$, on peut donc les composer par τ. On définit alors le cocycle modifié :

$$\mathbf{j}_i := \tau(j_i)^{-1} j_i : \mathbb{M} \longrightarrow 1 + \mathbf{p}A^0(\mathcal{B})$$

pour ce dernier on va voir que l'interpolation est possible.

Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $1 \leq r < |\omega/\mathbf{p}| = p^{\frac{p-2}{p-1}}$ si p est impair, 2 si $p = 2$. La boule affinoide $\mathcal{W}_r$ "des poids" est l'ouvert affinoide de $\mathbb{A}^n$ défini sur tout corps local K_r contenant un élément u_r de norme r par

$$\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p) := \{x = (s_1(x), ..., s_n(x)) \in (\mathbb{C}_p)^n, \forall k, |s_k(x)| \leq r\}$$

On définit

$$\mathcal{N}(r) := A(\mathcal{W}_r \times_{K_r} \mathcal{B}) = K_r\langle u_r^{-1}s_1, ..., u_r^{-1}s_n, (z_{i,j})_{i,j}\rangle,$$

$$\mathcal{S}(r) := \mathcal{N}(r)/I\mathcal{N}(r) = A(\mathcal{W}_r \times_{K_r} \mathcal{F}),$$

[6]Nous aurions pu aussi parsemer les paragraphes précédents de $\mathbf{p}$ et de p...

avec la norme de Gauss sur $\mathcal{N}(r)$ et la norme quotient sur $\mathcal{S}(r)$. On appellera représentation "constante" de $\mathbb{M}$ sur $\mathcal{N}(r)$, celle obtenu à partir de la représentation (non tordue) sur $A(\mathcal{B})$ et en étendant les scalaires à $A(\mathcal{W}_r)$, on la note

$$\mathbb{M} \times \mathcal{N}(r) \to \mathcal{N}(r), \ (g, v) \mapsto g(v)$$

Une deuxième représentation, plus intéressante, est la suivante. Soit $g \in \mathbb{T}^a$, par le lemme 3.6.1 et les formules (8), $\mathbf{j}_i(g)^{s_i}$ a un sens dans $A(\mathcal{W}_r) = K_r\langle u_r^{-1}s_1, \ldots, u_r^{-1}s_n\rangle$, car $|s_i| \leq r < |\omega/\mathbf{p}|$ et $|\mathbf{j}_i(g) - 1| \leq |\mathbf{p}|$. On peut donc poser

$$[g](f) := \prod_{i=1}^{n} \mathbf{j}_i(g)^{s_i} g(f) \tag{9}$$

On verra plus bas que c'est bien une représentation de $\mathbb{M}$. Remarquons que par notre choix de normalisation, $[u^a]f = u^a(f)$: les u^a sont constants. Notons que $[.]$ préserve $I\mathcal{N}(r)$ (car c'est le cas pour l'action constante) et que l'action de $\mathbb{M}$ passe donc au quotient $\mathcal{S}(r)$, on l'étudie dans la proposition suivante :

Proposition 3.6.2. – *$\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$ sont orthonormalisables sur $A(\mathcal{W}_r)$,*
- *$\mathbb{M} \times \mathcal{N}(r) \to \mathcal{N}(r)$, $(g, v) \to [g].v$ est une représentation de $\mathbb{M}$. De même, les applications $\mathbb{M} \to A(\mathcal{W}_r \times_{K_r} \mathcal{B})^*, g \to \mathbf{j}_i(g)^{s_i}$, sont des 1-cocycles.*
- *$\mathbb{M}$ opère via $[.]$ $A(\mathcal{W}_r)$-linéairement continûment sur $\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$, par des opérateurs de norme ≤ 1.*
- *Si a est strictement croissante, les combinaisons $A(\mathcal{W}_r)$-linéaires d'éléments de $\mathbb{T}^a$ sont composées d'opérateurs $A(\mathcal{W}_r)$-linéaires complètement continus.*
- *Si $t = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z} \subset \mathcal{W}_r(K_r)$, $\chi = (\tau^{m_1+\cdots+m_n}, \tau^{m_2+\cdots+m_n}, \cdots, \tau^{m_n}) \in \Delta^n$, la fibre en t de $\mathcal{N}(r)_\chi$ (resp. $\mathcal{S}(r)_\chi$) est naturellement isomorphe à $\mathcal{N}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ (resp. $\mathcal{S}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$), avec action de $\mathbb{M}$.*
- *Si $r' > r$, la restriction canonique $\mathcal{N}(r')_\chi \to \mathcal{N}(r)_\chi$ commute aux actions de $\mathbb{M}$, et induit un isomorphisme $\mathbb{M}$-équivariant $\mathcal{N}(r')_\chi \otimes A(\mathcal{W}_r) \simeq \mathcal{N}(r)_\chi$, idem avec $\mathcal{S}_\chi(-)$.*

Preuve: $\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$ sont obtenus par extension des scalaires à $A(\mathcal{W}_r)$ des $\mathbb{Q}_p$-modules de Banach orthonormalisables $A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$, ils sont donc orthonormalisables par le lemme 3.2.2. Via une section isométrique de $A(\mathcal{B}) \to A(\mathcal{F})$, et donc un isomorphisme $A(\mathcal{B}) \simeq IA(\mathcal{B}) \oplus A(\mathcal{F})$ (chacun étant orthonormalisable sur $\mathbb{Q}_p$), on a même un isomorphisme $\mathcal{N}(r) \simeq I\mathcal{N}(r) \oplus \mathcal{S}(r)$, chaque terme étant $A(\mathcal{W}_r)$-orthonormalisable.

L'action constante étant $A(\mathcal{W}_r)$-linéaire, la formule (9) montre que $\mathbb{M}$ agit $A(\mathcal{W}_r)$-linéairement sur $\mathcal{N}(r)$, et donc sur $\mathcal{S}$. Montrons qu'il préservent la boule unité de $\mathcal{N}(r)$. Soit $g \in \mathbb{T}^a$, $f \in \mathcal{N}^0(r)$, on a déjà vu que $g(f) \in \mathcal{N}^0(r)$. Il reste à vérifier que $\mathbf{j}_i(g)^{s_i} \in \mathcal{N}^0(r)$. Or $\mathbf{j}_i(g) = 1 + \mathbf{p}h$, $h \in \mathcal{N}^0(r)$, et on conclut donc par la dernière assertion du lemme 3.6.1.

Par passage au quotient, g préserve aussi $\mathcal{S}^0(r)$.

L'opérateur u^a étant constant, il est obtenu par extension des scalaires à $A(\mathcal{W}_r)$ de l'opérateur u^a sur $A(\mathcal{B})$ (resp. $A(\mathcal{F})$), il est donc complètement continu sur $\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$ quand le premier l'est, on conclut donc par le lemme 3.2.2.

L'avant dernière assertion est satisfaite par construction : la fibre en t de $\mathcal{N}(r)$ est $A(\mathcal{B}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ avec $[.]_t$ pour action de $\mathbb{M}$, ce qui est "presque" $\mathcal{N}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ à ceci près que l'on a modifié les 1-cocycles $\mathbf{j}_i$. L'application ψ_t induit par construction un isomorphisme de cette fibre en t vers $\mathcal{N}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ tordu par

$$\tau(j_1)^{-m_1}\tau(j_2)^{-m_2}\cdots\tau(j_n)^{-m_n} = \tau_1^{-m_1}(\tau_1\tau_2)^{-m_2}\cdots(\tau_1\cdots\tau_n)^{-m_n}$$

où l'on a posé $\tau_i : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}_p^*,\ (x_1,\ldots.x_n) \mapsto \tau(x_i)$, ce qui conclut (idem pour $\mathcal{S}(r)$).

Vérifions que $[.]$ est une représentation de $\mathbb{M}$. Soient $x, y \in \mathbb{M}$, $v_1 = [xy]$ et $v_2 = [x][y]$ sont deux $A(\mathcal{W}_r)$-endomorphismes de $\mathcal{N}(r)$ qui coïncident en toutes les fibres sur $\mathbb{N}^n \subset \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, car on sait que les $[.]_t$ sont des représentations des $\mathbb{M}$. $\mathcal{N}(r)$ étant orthonormalisable, il suffit de voir que les coefficients matriciels de v_1, v_2 dans une base orthonormale fixée sont tous égaux. Mais ce sont des éléments de $A(\mathcal{W}_r)$ qui prennent la même valeur sur $\mathbb{N}^n$, et donc sur l'ouvert (Zariski dense) $\mathbb{Z}_p^n$. Ils sont donc égaux. Un argument similaire donne l'assertion sur les 1-cocycles de l'énoncé.

La dernière assertion est évidente. $\square$

3.7. **Modules de Banach et série principale analytique de $\Gamma_0(p)$ sur $\mathcal{W}$.** Nous aurons besoin de quelques définitions concernant certains faisceaux de modules topologiques sur un espace rigide et leurs sections globales. Faute de références adéquates, nous les incluons ci-dessous.

3.7.1. *Généralités.* Soit $X/\mathbb{C}_p$ un espace rigide réduit, on va considérer des faisceaux de modules topologiques sur X du type suivant : soit V un espace de Banach sur $\mathbb{C}_p$ orthonormalisable, on appellera module de Banach (sous-entendu "orthonormalisable") sur X associé à V, le faisceau de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules noté $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}$, défini sur tout ouvert affinoide $\Omega \subset X$ par

$$(V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig})(\Omega) := V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega))$$

Si Ω est ouvert affinoide, $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}_p$-algèbre de Banach muni de la norme sup., ce qui permet de voir $(V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig})(\Omega)$ comme un $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$-module de Banach. Si $(e_i)_{i\geq 1}$ est une base orthonormale de V, $(e_i\hat{\otimes}1)_{i\geq 1}$ est une base orthonormale du $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$-module de Banach $(V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig})(\Omega)$. Il est clair que $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}$ est bien un préfaisceau pour la G-topologie faible sur X. Une conséquence du théorème d'acyclicité de Tate et de la donnée de la base orthonormale globale est que c'est bien un faisceau pour la G-topologie faible. Il s'étend donc canoniquement en un faisceau pour la G-topologie forte de X, que l'on note encore $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}$. Si Ω est un ouvert admissible quelconque de X, on munit $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ de la topologie la plus faible rendant toutes les applications $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega) \to V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega')$ continues, où $\Omega' \subset \Omega$ est un ouvert affinoide de Ω. Il est immédiat que cette topologie coïncide avec celle du Banach sous-jacent lorsque Ω est affinoide. Cela s'applique en particulier à $\mathbb{C}_p\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig} = \mathcal{O}_X^{rig}$, et en fait un faisceau en $\mathbb{C}_p$-algèbres topologiques sur X.

Soit $\mathcal{M}$ le module de Banach orthonormalisable sur X associé à V. L'espace topologique $\mathcal{M}(X)$ contient V comme sous-espace de manière naturelle. Le sous-$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-module de $\mathcal{M}(X)$ composé des sections dont la restriction à tout ouvert affinoide est de norme ≤ 1 est un fermé que l'on notera $\mathcal{M}(X)^0$; on parlera de *sections entières* de $\mathcal{M}$. Ceci s'applique en particulier aux cas de $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$ et $\mathcal{O}_X^{rig}(X)^0$. Enfin, à chaque $t \in X(\mathbb{C}_p)$, on peut considérer le $\mathbb{C}_p$-espace de Banach $\mathcal{M}_t$, la fibre de $\mathcal{M}$ en t, défini par $\mathcal{M}(\Omega)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)}\mathbb{C}_p$, avec pour $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega) \to \mathbb{C}_p$ l'évaluation en t et Ω étant un ouvert affinoide de X contenant t. Le $\mathbb{C}_p$-Banach $\mathcal{M}_t$ est isomorphe à V.

Un morphisme $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ de modules de Banach sur X est un morphisme de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules dont la restriction à chaque ouvert affinoide $\Omega \subset X$ induit une application continue $\varphi(\Omega) : \mathcal{M}_1(\Omega) \to \mathcal{M}_2(\Omega)$ (il suffit que ceci soit vérifié sur un recouvrement admissible de X). Il est dit *entier* si les $\varphi(\Omega)$ sont de norme ≤ 1. Le morphisme φ induit une application $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$-linéaire continue $\mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_2(X)$ préservant les sections entières si φ est entier.

Soient K un corps local, V' un K-espace de Banach orthonormalisable, on suppose qu'il existe un isomorphisme $V'\widehat{\otimes}_K\mathbb{C}_p \simeq V$, ce qui fait de V' une K-structure pour V. Sur chaque ouvert affinoide Ω de X défini sur K, $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ a une structure sur K donnée par $V'\widehat{\otimes}_K\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega/K)$. Si V et une famille $\mathcal{F}$ d'ouverts affinoides $\Omega \subset X$ ont une structure sur K, on notera $\mathcal{M}(X,K)$ le sous-K-espace vectoriel fermé de $\mathcal{M}(X)$ composé des sections qui se restreignent en des *sections K-rationnelles* sur les $\Omega \in \mathcal{F}$.

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ des modules de Banach orthonormalisables sur X, avec des structures rationnelles sur K respectives V_1 et V_2, ainsi qu'une donnée $\mathcal{F}$ comme ci-dessus. On dira qu'un $\mathcal{W}$-morphisme $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ est *rationnel* si pour tout ouvert affinoide $\Omega \in \mathcal{F}$ de X, φ envoie $V_1\widehat{\otimes}_K A(\Omega/K) \subset \mathcal{M}_1(\Omega)$ dans $V_2\widehat{\otimes}_K A(\Omega/K) \subset \mathcal{M}_2(\Omega)$.

3.7.2. *Modules de Banach sur $\mathcal{W}$.* Soit $\mathcal{W}$ l'espace rigide sur $\mathbb{C}_p$ réunion croissante des $\mathcal{W}_r$, $1 \leq r < |\omega/\mathbf{p}|$. On l'appellera *l'espace des poids*. Des exemples de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ sont donnés par les modules $\mathcal{S}_\chi$ et $\mathcal{N}_\chi$, que l'on définit comme étant associés respectivement à $A(\mathcal{F})_\chi$ et à $A(\mathcal{B})_\chi$. Par la proposition 3.6.2, $\mathbb{M}$ agit par endomorphismes de Banach entiers sur ces espaces, on a la

Définition : Si $\chi \in \Delta^n$, le module de Banach $\mathcal{S}_\chi := \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}A(\mathcal{F})_\chi$, vu comme représentation de $\mathbb{M}$, sera appelé la famille analytique des séries principales de $\Gamma_0(p)$ de caractère χ.

Remarque : Notons que par 3.6.2, si $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_{\chi,t}$ (resp. $\mathcal{N}_{\chi,t}$), est isomorphe comme $\mathbb{Q}_p[\mathbb{M}]$-module à $\mathcal{S}^t_{\chi\tau_t}$ (resp. $\mathcal{N}^t_{\chi\tau_t}$), où $\tau_t : \Gamma_0(p) \to (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}_p^*$ vaut

$$(\tau^{-m_1-m_2-..-m_n}, \tau^{-m_2-...-m_n}, ..., \tau^{-m_n})$$

τ étant le caractère de Teichmüller. Ceci explique la notation supérieure provisoire choisie pour les $\mathcal{S}^t$, car ce sont plutôt les $\mathcal{S}_t$ qui varient analytiquement en t.

Nous aurons besoin encore de quelques définitions concernant les modules de Banach sur $\mathcal{W}$. Le lemme suivant, bien qu'important, est immédiat :

Lemme 3.7.3. – *$\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})$ s'identifie canoniquement à l'anneau des séries convergentes sur tout $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, avec la topologie faible donnée par la famille des normes*

$$|f|_r = \sup_{x \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)} |f(x)|$$

– $\mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^0$ *s'identifie alors aux séries convergentes bornées par* 1 *sur* $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$. *C'est un anneau local complet pour la topologie adique donnée par tout idéal* I_r, *où* I_r *est la boule fermée de centre* 0 *de rayon* 1/2 *pour* $|.|_r$. *Si* $t_1 := (\mathbf{p}/\omega)s_1, \cdots, t_n := (\mathbf{p}/\omega)s_n$, *alors*
$$\mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[t_1, ..., t_n]]$$
L'idéal $(p, t_1, ..., t_n)$ *est un idéal de définition de la topologie de* $\mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^0$.
– *La donnée d'une base orthonormale* $(e_n)_{n\geq 1}$ *de* V *induit un isomorphisme topologique de* $\mathcal{M}(\mathcal{W})^0$ *avec* $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^0)$.

Si A est un anneau topologique, on désigne par $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A)$ l'anneau des fonctions de $\mathbb{N}$ dans A tendant vers 0 à l'infini. Si A est un anneau linéairement topologisé par une famille d'idéaux I_λ, la famille de sous-A-modules $I'_\lambda := \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A), f(\mathbb{N}) \subset I_\lambda\}$ fait de $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A)$ un A-module topologique. Il est complet et séparé si A l'est, I-adique si A l'est et I est de type fini.

Soit $L := \mathbb{Q}_p(\omega) = \mathbb{Q}_p(\mu_p)$, la boule fermée de rayon $|\omega/\mathbf{p}|$ est définie sur L. Les coordonnées $t_i = (\mathbf{p}/\omega)s_i$ ($\mathbf{p}/\omega \in \mathcal{O}_L$) sont définies sur L et identifient $\mathcal{W} \subset \mathbb{A}^n$ à la boule ouverte de centre 0 de rayon 1 sur L. Soit $\mathcal{M} := \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} V$ un module de Banach sur $\mathcal{W}$, V' une structure sur L de V, on définit comme structure sur L de $\mathcal{W}$ l'unique ouvert affinoide $\mathcal{W}_1$ (il est même défini sur $\mathbb{Q}_p$). On pose
$$\Lambda := \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}, L) \cap \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^0$$
et plus généralement
$$\mathcal{M}_\Lambda := \mathcal{M}(\mathcal{W}, L) \cap \mathcal{M}(\mathcal{W})^0$$
$\mathcal{M}_\Lambda$ sera appelé *le module des sections* Λ*-adiques de* $\mathcal{M}$.

Lemme 3.7.4. – *L'isomorphisme* $\mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[t_1, ..., t_n]]$ *induit un isomorphisme topologique*
$$\Lambda \simeq \mathcal{O}_L[[t_1, ..., t_n]],$$
ce dernier étant muni de sa topologie canonique d'anneau local complet,
– *L'isomorphisme* $\mathcal{M}(\mathcal{W})^0 \simeq \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^0)$ *induit un isomorphisme de* Λ*-modules topologiques*
$$\mathcal{M}_\Lambda \simeq \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda)$$

En particulier, notant $\mathfrak{m} := (\omega, t_1, ..., t_n)$ l'idéal maximal de Λ, $\mathcal{M}_\Lambda$ est complet et séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

4. Les formes automorphes pour G

4.1. **Le groupe algébrique** G**.** Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ forme tordue de GL_n, *i.e.* tel que $G_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{C}$. Tous ces groupes sont obtenus en considérant une $\mathbb{Q}$-algèbre E étale sur $\mathbb{Q}$ de degré 2, ainsi qu'une E-algèbre D centrale simple de rang n^2, munie d'une $\mathbb{Q}$-involution $*$ induisant sur E le $\mathbb{Q}$-automorphisme non trivial. Le groupe G sur $\mathbb{Q}$ associé à cette donnée est tel que pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R :
$$G(R) := \{x \in D \otimes_{\mathbb{Q}} R, xx^* = 1\}$$

En particulier, si D et E sont non ramifiés au dessus de p, $G(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ou au groupe unitaire non ramifié $U_n(\mathbb{Q}_p)$ selon que p est totalement décomposé ou inerte dans E. Enfin, $G(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si $E = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ou un corps quadratique réel, et à $U_{p,q}(\mathbb{C})$ (le groupe unitaire réel de signature (p,q)) si E est un corps quadratique imaginaire. On fera l'hypothèse suivante :

$G(\mathbb{R})$ est compact, autrement dit E est imaginaire et $*$ de signature $(n,0)$ ou $(0,n)$

Le centre de G est le tore des éléments de norme 1 de $E/\mathbb{Q}$. On aurait aussi pu considérer le cas où $G(\mathbb{R})$ est non compact mais compact modulo son centre, ce qui n'arrive que quand $n=2$ et G est le groupe des inversibles d'une $\mathbb{Q}$-algèbre de quaternions définie, pour lequel toutes les techniques de ce texte s'appliqueraient avec peu de modifications.

Exemples : Les obstructions globales liées à l'existence de formes tordues de GL_n d'un type fixé à toutes les places sont discutées dans [Cl] chapitre 2. Par exemple, si n est impair ou multiple de 4 (resp. pair non multiple de 4), il existe un groupe G satisfaisant l'hypothèse ci-dessus qui est quasi-déployé à toutes les places finies (resp. toutes sauf éventuellement une que l'on peut choisir).

Soient p un nombre premier décomposé dans E, w une place de E divisant p fixée dans tout le texte. La donnée de w définit un isomorphisme $\eta_p : G/\mathbb{Q}_p \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}_p$. On fixe de plus un isomorphisme de corps

$$i_p : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

Les données de w et i_p fournissent un plongement distingué $E \hookrightarrow \mathbb{C}$, et permettent de fixer un isomorphisme $\eta_\infty : G/\mathbb{C} \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{C}$, par $\eta_\infty := i_p^{-1}\eta i_p$. On a alors les diagrammes commutatifs suivants, que l'on considérera par la suite comme des inclusions :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{Q}_p \arrow[d, hook, "i_p^{-1}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, hook] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(\mathbb{Q}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & G(\mathbb{Q}_p) \arrow[d, hook, "i_p^{-1}\eta_p"] \\ G(\mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\eta_\infty"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

On se fixe de plus un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{U}$ de $G(\mathbb{A}_f)$, le "niveau", que l'on supposera pour simplifier de la forme $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{(p)} \times \mathcal{U}^p$, où $\mathcal{U}_{(p)}$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathcal{U}^p$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f^p)$.

Par la finitude du nombre de classes généralisée (cf. [Bo] thm. 5.1), l'ensemble quotient $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{U}$ est fini. On pose

$$X(\mathcal{U}) := G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{U} = \{x_1, ..., x_h\},\ h = |X(\mathcal{U})|,\ G(\mathbb{A}_f) = \coprod_{i=1}^{h} G(\mathbb{Q})x_i\mathcal{U}$$

les x_i étant fixés une fois pour toutes. On supposera de plus que $\mathcal{U}$ est net, c'est à dire que $G(\mathbb{Q}) \times \mathcal{U}$ agit librement sur $G(\mathbb{A}_f)$. Il est équivalent de demander la trivialité des groupes $\Gamma_i := x_i^{-1}G(\mathbb{Q})x_i \cap \mathcal{U}$. Il faut noter que l'hypothèse de compacité à l'infini sur G entraînant que $G(\mathbb{Q})$ est discret dans $G(\mathbb{A}_f)$, Γ_i est toujours fini. Les Γ_i sont triviaux pour tout $\mathcal{U}$ assez petit, d'un point de vue pratique il est intéressant d'avoir des conditions explicites, une assez grossière est la suivante, sa preuve indiquant bien ses raffinements possibles :

Proposition 4.1.1. *Il existe un entier e, explicite ne dépendant que de n, tel que $\mathcal{U}$ est net dès qu'il existe un l premier, $(l, e) = 1$, tel que l'image de $\mathcal{U}$ dans $G(\mathbb{Q}_l)$ soit pro-l. Ceci vaut en particulier si $(p, e) = 1$.*

Preuve: $G(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{GL}_n(E)$, tout élément de N-torsion de ce dernier a pour polynôme minimal sur E un diviseur de $X^N - 1$, et il est de plus divisible par le polynôme minimal de $\omega_N = e^{2i\pi/N}$ sur E, qui est de degré $\varphi(N)$ ou $\varphi(N)/2$. Dans tous les cas, ceci implique que $\varphi(N) \leq 2n$, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de N possibles explicitement calculables pour $\mathrm{GL}_n(E)$, et en particulier la torsion de $G(\mathbb{Q})$ a un exposant. Soit e cet exposant, si l est un nombre premier, premier à e, soit $\mathcal{U}_{(l)}$ l'image de $\mathcal{U}$ dans $G(\mathbb{Q}_l)$, alors $\mathcal{U} \cap xG(\mathbb{Q})x^{-1} \subset \mathcal{U}_{(l)} \cap xG(\mathbb{Q})x^{-1}$ est toujours trivial, car pro-l et de e-torsion avec $(e, l) = 1$. $\square$

Remarque : L'hypothèse de netteté sur $\mathcal{U}$ n'intervient dans ce qui suit que pour assurer que certains modules de Banach sont orthonormalisables, plutôt que "points fixes d'un module de Banach sous l'action d'un groupe fini", et ce pour pouvoir leur appliquer la théorie de Coleman [C1].A. Dans un travail en cours ([B2]), Buzzard a repris dans un cadre plus général les travaux de Coleman, ses résultats nous permettraient de nous passer de l'hypothèse "net".

4.2. **Les formes automorphes pour G.** Soit $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, pour tout corps k de caractéristique 0, on note $S_t(k)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n(k)$ de plus haut poids t telle qu'on l'a définie en section 2.3, sa formation est compatible à l'extension du corps k. Via i_p, $S_t(\mathbb{Q}_p) \subset S_t(\mathbb{C})$, de même $S_t(\mathbb{R}) \subset S_t(\mathbb{C})$. Par le diagramme plus haut, les "inclusions" $G(\mathbb{R})$, $G(\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ réalisent $S_t(\mathbb{C})$ comme représentation de $G(\mathbb{R})$ et de $G(\mathbb{Q}_p)$ prenant même valeur sur $G(\mathbb{Q})$ et dont la restriction à $G(\mathbb{Q}_p) =_w \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est la représentation $S_t(\mathbb{Q}_p)$.

Notons que $G(\mathbb{Q}) \times G(\mathbb{R}) \times \mathcal{U}$ agit linéairement sur le $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ des fonctions $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, par $((\lambda, g, u).f)(x) = f(\lambda^{-1}xgu)$.

Définition : *Soit $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, l'espace des formes automorphes de poids t et de niveau $\mathcal{U}$ est le $\mathbb{C}$-vectoriel des fonctions à valeurs complexe sur $X_{\mathcal{U}} = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\mathcal{U}$, engendrant sous $G(\mathbb{R})$ le dual de la représentation $S_t(\mathbb{C})$[7]. On le note $S_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$.*

Ainsi, l'espace des formes automorphes de poids t et de niveau $\mathcal{U}$ pourra être vu comme le $\mathbb{C}$-vectoriel des applications $S_t^*(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\mathcal{U} \to \mathbb{C}$, telles que

$$\forall x \in X_{\mathcal{U}}, \varphi \mapsto f(\varphi, x) \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire},$$

$$\forall g \in G(\mathbb{R}), \varphi \in S_t^*(\mathbb{C}), x \in X_{\mathcal{U}}, f(g.\varphi, x) = f(\varphi, xg)$$

Nous allons donner un modèle de ces espaces sur $\mathbb{Q}_p$. On considère pour cela l'espace $S'_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$ des fonctions $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f) \to S_t(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall u \in \mathcal{U}, x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), f(xu) = (u_p)^{-1} f(x)$$

[7]Plus exactement, "engendrant une somme de copies du dual de $S_t(\mathbb{C})$".

Si $f \in S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$, on définit $\psi(f)$ par

$$\psi(f)(\varphi,x) = \varphi(x_\infty^{-1}x_p f(x_f)), \;\; x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \varphi \in S_t(\mathbb{C})^*$$

Lemme 4.2.1. *ψ définit un $\mathbb{C}$-isomorphisme $S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C}) \to S_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$*

Preuve: On vérifie immédiatement que si $f \in S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$, $\psi(f) \in S_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$. Soit $g \in S_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$, on va définir $\lambda(g) \in S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$. Soit $x \in G(\mathbb{A}_f)$, la forme linéaire sur $S_t^*(\mathbb{C})$ $\phi \to g(\phi, 1 \times x)$ est représentée par un unique vecteur de $S_t(\mathbb{C})$ que l'on note $x_p(\lambda(g)(x))$, il vérifie $\forall \phi \in S_t^*(\mathbb{C})$, $\phi(x_p\lambda(g)(x)) = g(\phi, 1 \times x)$. On vérifie facilement que $\lambda(g) \in S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$, et que ϕ et ψ sont réciproques. $\square$

En particulier, $S_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, l'injection

$$\iota : S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C}) \hookrightarrow S_t(\mathbb{C})^h, \;\; f \to (f(x_1),...,f(x_h))$$

étant même un isomorphisme car $\mathcal{U}$ est net. Notons maintenant que la définition de $S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{Q}_p)$ a un sens : c'est le $\mathbb{Q}_p$-vectoriel des fonctions

$$f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f) \to S_t(\mathbb{Q}_p), \;\; \forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), u \in \mathcal{U}, \;\; f(xu) = (u_p)^{-1}f(x)$$

Enfin, $S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{Q}_p) \subset S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$ est une structure sur $\mathbb{Q}_p$ de ce dernier, elle correspond via i_p à $S_t(\mathbb{Q}_p)^h \subset S_t(\mathbb{C})^h$. On pose donc $S_t(G,\mathcal{U}) := S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{Q}_p)$.

La construction ci-dessus se généralise : pour tout anneau A et tout $A[\mathcal{U}_{(p)}]$-module V, on peut considérer, à la manière du paragraphe précédent, le A-module $V(G,\mathcal{U})$

$$V(G,\mathcal{U}) := \{f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f) \to V, \;\forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), u \in \mathcal{U}, \;\; f(xu) = (u_p)^{-1}f(x)\}$$

Pour chaque tel $V(G,\mathcal{U})$, on dispose d'un A-isomorphisme

$$\iota : V(G,\mathcal{U}) \to V^h, \;\; \iota(f) = (f(x_1),...,f(x_h)) \tag{10}$$

$V \to V(G,\mathcal{U})$ est un foncteur exact des $A[\mathcal{U}_{(p)}]$-modules dans les A-modules, qui commute à l'extension des scalaires en A. Notons que via ι, si V est un A-module normé, $V(G,\mathcal{U})$ hérite de la norme de V par $|f| = \sup_{i=1}^h |f(x_i)|$, et il est isomorphe à V^h comme A-module normé. Enfin, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X^{rig}[\mathcal{U}_{(p)}]$-module (resp. de Banach) sur un espace rigide X,

$$\mathcal{M}(G,\mathcal{U}) := \{W \to \mathcal{M}(W)(G,\mathcal{U}) = \mathcal{M}(G,\mathcal{U})(W)\}$$

est aussi un $\mathcal{O}_X^{rig}$-module (resp. de Banach).

4.3. **Opérateurs diamants en** p. À partir de là, on choisit un $\mathcal{U}$ tel que, via η_p, $\mathcal{U}_{(p)}$ soit le sous-groupe $\Gamma_1(p)$ de GL_n composé des unipotents supérieurs modulo $\mathbf{p}$, on le note $U_1(p)$. On pose $U_0(p) = U_1(p)\Gamma_0(p)$, $\Gamma_0(p)$ étant vu comme sous-groupe de $G(\mathbb{A}_f)$ trivial hors de p et via η_p en p.

Pour tout $A[\Gamma_0(p)]$-module V, $\Gamma_0(p)$ opère sur $V(G,U_1(p))$ par $(\gamma,f)(x) = \gamma f(x\gamma)$, sa restriction à $\Gamma_1(p)$ étant triviale. On a donc une action de $((\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^*)^n$ sur $V(G,U_1(p))$. Si A est une $\mathbb{Z}[1/(p-1)](e^{2i\pi/(p-1)})$-algèbre ($\mathbb{Z}[1/2]$-algèbre pour $p=2$), cette action se diagonalise selon les caractères de $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z}^*)^n$, dont le groupe est Δ^n :

$$V(G,U_1(p)) = \oplus_{\chi\in\Delta^n} V(G,U_0(p))(\chi)$$

$V(G,U_0(p))(\chi) := \{f \in V(G,U_1(p)),\ \forall\gamma \in \Gamma_0(p),\ f(x\gamma) = \chi(\gamma)\gamma^{-1}f(x)\} = V_\chi(G,U_0(p))$
Avec ces définitions, pour tout poids entier t,

$$S_t(G,U_1(p)) = \oplus_{\chi\in\Delta^n} S_{t,\chi}(G,U_0(p))$$

$S_{t,\chi}(G,U_0(p))$ est l'espace des formes automorphes sur $\mathbb{Q}_p$ de poids t, niveau $U_0(p)$, et de caractère χ en p.

4.4. Les formes automorphes p-adiques.

On renvoie au §3.7.2 pour les définitions de $\mathcal{S}_\chi$ et $\mathcal{N}_\chi$.

Définitions : Le *module de Banach sur $\mathcal{W}$ des formes automorphes p-adiques pour G de niveau $U_0(p)$, de type $\chi \in \Delta^n$ en p* est le module de Banach sur $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{S}_\chi(G,U_0(p))$$

On parlera aussi de formes automorphes p-adiques de *type* $(G,U_0(p),\chi)$. Si $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, la fibre en t de $\mathcal{S}_\chi(G,U_0(p))$ est $\mathcal{S}_\chi(G,U_0(p))_t = (\mathcal{S}_\chi)_t(G,U_0(p))$[8], que l'on notera aussi $\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))$. Le $\mathbb{C}_p$-espace de Banach $\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))$ sera appelé *l'espace des formes automorphes p-adiques de type $(G,U_0(p),\chi)$ et de poids t.*

Si $t = (m_1,...,m_n) \in \mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))$ contient (par 3.3.1 et 3.6.2) le $\mathbb{C}_p$-espace $S_{t,\tau_t\chi}(G,U_0(p))$, où τ_t désigne le caractère

$$(\tau^{-m_1-\cdots-m_n},\tau^{-m_2-\cdots-m_n},\cdots,\tau^{-m_n}) \in \Delta^n$$

On pose donc

$$\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))^{cl} := S_{t,\tau_t\chi}(G,U_0(p)),$$

Ses éléments seront appelés les *formes automorphes p-adiques classiques de poids t et de type $(G,U_0(p),\chi)$.*

Remarque : Avec ces définitions, il faut noter qu'une forme automorphe p-adique classique de poids t et de type χ en p est une forme automorphe de poids t mais de caractère $\tau_t\chi$.

Définition : $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p)) = \mathcal{S}_\chi(G,U_0(p))_\Lambda$ est le Λ-module des formes automorphes Λ-adiques de type $(G,U_0(p),\chi)$.

Proposition 4.4.1. *$\mathcal{S}_\chi(G,U_0(p))$ et $\mathcal{N}_\chi(G,U_0(p))$ sont des modules de Banach orthonormalisables sur $\mathcal{W}$. Les Λ-modules $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))$ et $\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))$ sont plats, complets et séparés, isomorphes non canoniquement à $\mathcal{C}^0(\mathbb{N},\Lambda)$.*

Preuve: $\mathcal{S}_\chi(G,U_0(p))$ (resp. $\mathcal{N}_\chi(G,U_0(p))$) est le module de Banach orthonormalisable sur $\mathcal{W}$ associé à $A(\mathcal{F})(G,U_0(p))$ (resp. $A(\mathcal{B})(G,U_0(p))$). Les Λ-modules topologiques de l'énoncé sont isomorphes à $\mathcal{C}^0(\mathbb{N},\Lambda)$ par le deuxième point du lemme 3.7.4. L'assertion de platitude est équivalente à celle sur Λ de $\mathcal{C}^0(\mathbb{N},\Lambda)$. Or

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{N},\Lambda) \simeq \Lambda\langle T\rangle$$

[8] Ceci vient de ce que ι identifie $V(G,\mathcal{U})$ à V^h fonctoriellement en V, en tant que A-module (avec les notations du §4.2).

comme Λ-module topologique et il est bien connu que ce dernier est plat sur Λ quand Λ est un anneau local noethérien complet. $\square$

4.5. **L'algèbre de Hecke.**

4.5.1. *Les opérateurs de Hecke.* Soit ζ un élément de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que $\zeta_p \in \mathbb{M}$,

$$U_0(p)\zeta U_0(p) = \coprod_{i=1}^{r(\zeta)} \zeta_i U_0(p) \tag{11}$$

pour certains $\zeta_i \in U_0(p)\zeta U_0(p)$. L'action par translation à droite sur de $\Gamma_0(p)$ sur $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ préserve les $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$ et se factorise par Δ^n, ce qui décompose $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C}) = \oplus_{\chi \in \Delta^n} S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$[9], $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$ étant l'espace propre de caractère χ. Fixons un $\chi : \Gamma_0(p) \to (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z}^*)^n \to \mathbb{C}^*$. On définit un $\mathbb{C}$-endomorphisme de $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$, l'opérateur de Hecke $T(\zeta)$ associé à ζ, par la formule suivante :

$$\forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \;\; T(\zeta)(f)(x) := \sum_{i=1}^{r(\zeta)} \chi^{-1}((\zeta_i)_p) f(x\zeta_i) \tag{12}$$

Dans cette formule, χ désigne l'unique caractère du monoïde $\mathbb{M}$ coïncidant avec le χ fixé sur $\Gamma_0(p)$, trivial sur U (cf. 2.5). Cet opérateur est indépendant du choix des ζ_i. L'action déduite sur $S'_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$ (défini de manière évidente) descend à $S_{\chi,t}(G, U_0(p))$ (qui en est une $\mathbb{Q}_p$-structure), par la formule :

$$\forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), \;\; T(\zeta)(f)(x) = \sum_{i=1}^{r(\zeta)} (\zeta_i)_p . f(x\zeta_i) \tag{13}$$

Noter que les "$\chi(\zeta_i)$" sont compris dans l'action "." de $\Gamma_0(p)$ sur $S_{\chi,t}(\mathbb{Q}_p) = S_t(\mathbb{Q}_p) \otimes \chi$. Soient maintenant ζ tel que $\zeta_p \in \mathbb{M}$, V un A-module venant avec une action A-linéaire de $\mathbb{M}$, alors la formule 13 définit un opérateur A-linéaire $T(\zeta)$ sur les $V(G, U_0(p))$. Ceci nous définit en particulier les opérateurs de Hecke $T(\zeta)$, $\zeta_p \in \mathbb{M}$, agissant sur les $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$ et $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$.

On aura besoin d'une factorisation des opérateurs de Hecke agissant sur les espaces de type $V(G, U_0(p))$. On pose $h := |X(U_0(p))|$, on rappelle que ι est défini par la formule (10).

Lemme 4.5.2. *Soient $\zeta \in G(\mathbb{A}_f)$ tel que $\zeta \in \mathbb{T}^a$, alors $T(\zeta)$ s'écrit sous la forme $\sum_{j=1}^{h.r(\zeta)} T_j \cdot \sigma_j$, où via ι, les σ_j sont des opérateurs de permutation des h-coordonnées, composés par la projection sur l'une des coordonnées, et les T_j sont des opérateurs diagonaux dans $\mathbb{T}^a$.*

Preuve: Soient ζ comme dans l'énoncé, ainsi qu'une décomposition $U_0(p)\zeta U_0(p) = \coprod_{i=1}^{r(\zeta)} \zeta_i U_0(p)$. Si i est fixé, alors pour tout $1 \leq s \leq h$, on peut écrire $x_s\zeta_i = d_i(s) x_{\delta_i(s)} u_i(s)$,

[9] On rappelle que l'on identifie $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via i_p

où δ_i est une application de $\{1,...,h\}$ dans lui-même, avec $d_i(s) \in G(\mathbb{Q})$ et $u_i(s) \in U_0(p)$. Considérons d'une part l'endomorphisme $\sigma_{i,s}$ de $V(G, U_0(p))$ défini par :

$$\iota.\sigma_{i,s}.\iota^{-1}(v_1, \cdots, v_h) := (0, ..., 0, v_{\delta_i(s)}, 0, ..., 0)$$

le $v_{\delta_i(s)}$ étant à la s^{ieme} position, et d'autre part l'endomorphisme $T_{i,s}$ de $V(G, U_0(p))$ défini via ι comme agissant diagonalement par $(\zeta_i u_s^{-1})_p$. Alors

$$T(\zeta) = \sum_{i,s} T_{i,s}\sigma_{i,s}$$

En effet, si $f \in V(G, U_0(p))$, $v = (f(x_1), \cdots, f(x_h))$,

$$\iota.T(\zeta).\iota^{-1}(v) = (T(\zeta)(f)(x_1), \cdots, T(\zeta)(f)(x_h))$$

$T(\zeta)(f)(x_s) = \sum_{i=1}^{r(\zeta)} (\zeta_i)_p.f(x_s\zeta_i)$ et $f(x_s\zeta_i) = (u_i(s)^{-1})_p.f(x_{\delta_i(s)})$ concluent. $\square$

4.5.3. *L'algèbre de Hecke globale.* Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Hecke globale de $(G(\mathbb{A}_f)), U_0(p))$ que l'on choisit :
- à coefficients dans Λ,
- engendrée par la sous-algèbre de l'algèbre de Hecke-Iwahori en p constituée des doubles classes $[\Gamma_0(p)m\Gamma_0(p)]$, avec $m \in \mathbb{M}$,
- et par une sous-algèbre commutative de l'algèbre de Hecke de $(G(\mathbb{A}_f^p), U_0(p)^p)$.

Alors $\mathcal{H}$ est commutative (cf. [SS] Lemme 10 §4).

Proposition 4.5.4. *$\mathcal{H}$ opère par endomorphismes rationnels entiers sur $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ (resp. $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$), par conséquent elle préserve $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ (resp. $\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$).*

Preuve: Par la proposition 3.6.2, $\mathbb{M}$ agit par endomorphismes entiers de module de Banach sur $\mathcal{S}_\chi$ et $\mathcal{N}_\chi$, rationnels car ils préservent $A(\mathcal{W}_1/\mathbb{Q}_p \times \mathcal{F})$ et $A(\mathcal{W}_1/\mathbb{Q}_p \times \mathcal{B})$. On en déduit le résultat par la formule (10) et le lemme 4.5.2. $\square$

On s'intéresse à l'adhérence $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, de l'image de $\mathcal{H}$ dans

$$\mathcal{E}_\chi := \{u \in \mathrm{End}(\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))), \text{ entiers, rationnels}\}$$

La topologie considérée sur $\mathcal{E}_\chi$ est la moins fine pour laquelle les restrictions

$$\mathcal{E}_\chi \to \mathrm{End}_{A(\Omega)}^{cont}(\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))(\Omega)), \ \Omega \subset \mathcal{W} \text{ ouvert affinoide},$$

soient continues, ces derniers étant munis de la norme sup. Via un isomorphisme de Λ-modules topologiques : $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) \simeq \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda)$, on vérifie facilement que $\mathcal{E}_\chi$ est topologiquement isomorphe au Λ-module $(\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda))^{\mathbb{N}}$ muni de sa topologique $\mathfrak{m}$-adique, pour laquelle il est complet séparé.

Proposition 4.5.5. *$\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est une Λ-algèbre commutative topologique profinie, semi-locale, telle que $\Lambda \hookrightarrow \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est continue. En particulier, $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est compacte.*

Preuve: $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est l'adhérence de l'image de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}_\chi$. Sa topologie est la topologie donnée par la filtration des $(\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi)\cap\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, elle est donc complète et séparée pour cette dernière. Sa restriction à Λ est la topologie $\mathfrak{m}$-adique naturelle de ce dernier, car $(\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi)\cap\Lambda=\mathfrak{m}^r\Lambda$. Prouvons que $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est profinie. Il suffit de voir que les quotients $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}/(\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi\cap\mathcal{H}_{\chi,\Lambda})$ sont finis. Notons que par le lemme 4.5.2, $\Lambda/\mathfrak{m}^r\Lambda$ étant fini, il suffit de voir que $\mathbb{M}$ n'agit sur $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}^r\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}$ que par un nombre fini d'endomorphismes, ou encore de voir la même chose sur $\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}^r\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}$. Mais il est clair (§2.1, lemme 2.5.1) que le sous-groupe distingué de $\Gamma_0(p)$ d'indice fini $1+p^r\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ y agit trivialement, et que U n'agit que par un nombre fini d'endomorphismes. On conclut par l'égalité $\mathbb{M}=\Gamma_0(p)U\Gamma_0(p)$.

Dans un anneau commutatif A complet séparé pour un topologie donnée par une famille décroissante d'idéaux $\{I_r, r\in\mathbb{N}\}$ telle que $I_rI_s\subset I_{r+s}$, on a $I_1\subset\mathrm{Rad}(A)$. En particulier A est semi-local si et seulement si A/I_1 l'est. Dans notre cas $A=\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, $I_r=(\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi)\cap\mathcal{H}_{\chi,\lambda}$ et A/I_1 est fini. $\square$

En particulier, $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est un produit fini d'algèbres locales pro-artiniennes à corps résiduels finis de caractéristique p. Soient $e_{\chi,1},...,e_{\chi,r}$ les idempotents minimaux de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$,

$$\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}\simeq\prod_{i=1}^r e_{\chi,i}\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$$

On note $\Psi_{\chi,i}:\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}\to\overline{\mathbb{F}}_p$, $i\in\{1,...,r\}$, les r caractères résiduels.

Proposition 4.5.6. *L'ensemble des $\Psi_{\chi,i}$ coïncide avec celui des réductions modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ des caractères $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-valués de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ dans la réunion des $\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))^{cl}$, $t\in\mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{Z}$.*

Preuve: Les $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{M}]$-modules $\mathcal{S}^0_{\chi,t}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\overline{\mathbb{F}}_p$ (resp. $\mathcal{N}^0_{\chi,t}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\overline{\mathbb{F}}_p$), $t\in\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ variant, sont (canoniquement) isomorphes entre eux, car d'une part les $\mathbf{j_i}^{s_i}$ sont triviaux modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ par le dernier point du lemme 3.6.1, et d'autre part les u^a sont constants. Soit $\overline{\mathcal{S}}_\chi$ (resp. $\overline{\mathcal{N}}_\chi$) ce $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{M}]$-module commun. Si $t\in\mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{Z}$, on peut considérer la composition des applications naturelles $\mathbb{Z}_p[\mathbb{M}]$-équivariantes

$$B^0_{t,\chi\tau_t}\hookrightarrow\mathcal{N}^0_{\chi,t}\twoheadrightarrow\overline{\mathcal{S}}_\chi$$

Elle se factorise par $S^0_{t,\chi\tau_t}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\overline{\mathbb{F}}_p$. Montrons que la réunion des images de ces dernières applications, $t\in\mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{Z}$ variant, recouvre $\overline{\mathcal{S}}_\chi$. Cela vient de ce que $\overline{\mathcal{N}}_\chi\to\underline{\overline{\mathcal{S}}_\chi}$ est surjective, et de ce que la réunion des images des applications naturelles $B^0_{t,\chi\tau_t}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\overline{\mathbb{F}}_p\to\overline{\mathcal{N}}_\chi$ est tout $\overline{\mathcal{N}}_\chi$. Notons enfin que le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}$ est une $\mathbb{F}_p$-structure de $\mathcal{S}^0_{\chi,0}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\overline{\mathbb{F}}_p=\overline{\mathcal{S}}_\chi$ stable par $\mathbb{M}$.

Le foncteur $V\to V(G,U_0(p))$ étant exact et commutant à l'extension des scalaires, on en déduit que $\overline{\mathcal{S}}_\chi(G,U_0(p))$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{M}]$ module isomorphe à $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))\otimes_\Lambda\overline{\mathbb{F}}_p$, et qu'il est réunion des images des applications $\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))^{cl,0}$. On conclut par le lemme de Deligne-Serre (cf. [DS] Lemme 6.11), en notant que ces derniers espaces sont obtenus par extension des scalaires à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ du $\mathcal{O}_L$-module libre de type fini $S_{t,\chi\tau_t}(G,U_0(p))^0\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_L$, qui est stable par $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$. $\square$

4.6. **Opérateurs U_p^a.**

Proposition 4.6.1. *Les $T(\zeta)$ ($\zeta_p \in \mathbb{T}^a$) sont des endomorphismes rationnels et entiers de $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ et $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$. Si a est strictement croissante, $T(\zeta)$ est complètement continu au dessus de chaque ouvert affinoide de $\mathcal{W}$.*

Preuve: La première assertion a déjà été vue. Si a est strictement croissante et $\zeta_p \in \mathbb{T}^a$, 4.5.2 montre que $T(\zeta)$ est une somme d'opérateurs composés d'un opérateur diagonal (via ι) complètement continu (lemme 3.6.2) et d'opérateurs de norme ≤ 1. $\square$

Définition : Soit $a = (a_1 \leq \cdots \leq a_n)$ croissante positive, on notera $U_p^a \in \mathcal{H}$ l'opérateur de Hecke $T(\zeta)$ sur les $V(G, U_0(p))$, où $\zeta \in G(\mathbb{A}_f)$ est partout trivial sauf en p où il vaut u^a. On pose $U_p := U_p^{(0,1,\ldots,n-1)}$. Les U_p^a commutent entre eux 2 à 2 (cf. §4.5.3).

On déduit alors de [C1] §A.2 (cf. 4.6.3),

Théorème 4.6.2. *Il existe des uniques séries entières $P_\chi^a(s,T), Q_\chi^a(s,T) \in A(\mathcal{W})\{\{T\}\}$ telles que pour tout $s \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$,*

$$P_\chi^a(s,T) = \det(1 - TU^a_{p\,|\mathcal{S}_{\chi,s}(G,U_0(p))}),\ Q_\chi^a(s,T) = \det(1 - TU^a_{p\,|\mathcal{N}_{\chi,s}(G,U_0(p))})$$

Suivant [CM] §1.3, on rappelle que si X est un espace rigide, $A(X)$ l'anneau des fonctions rigides analytiques globales sur X, $P \in A(X)[[T]]$ est appelée série entière sur X si c'est la série associée à une fonction rigide-analytique sur $X \times \mathbb{A}^1_{rig}$. Si X est un affinoide réduit, et si $P(x,T) = \sum_{i \geq 0} a_i(x) T^n$, il est équivalent de demander que $|a_i| r^i \underset{i \to \infty}{\to} 0, \forall r > 0 \in \mathbb{R}$, $|.|$ étant la norme sup sur X. On note $A(X)\{\{T\}\}$ l'anneau des séries entières sur X, *une série de Fredholm sur X est une série entière F sur X telle que* $F(0) = 1$, soit $F \in 1 + TA(X)\{\{T\}\}$. Par le théorème ci-dessus, $P_\chi^a(T)$ et $Q_\chi^a(T)$ sont des séries de Fredholm sur $\mathcal{W}$.

Si A est un anneau local complet d'idéal maximal m_A, une série entière sur A est un élément

$$F(T) = \sum_{i \geq 1} a_i T^i \in A[[T]],\ \text{tel que si } c_i = \sup\{n \in \mathbb{N}, a_i \in m_A^n\},\ \text{alors } c_i/i \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

On note $A\{\{T\}\}$ l'anneau des séries entières sur A. $F \in A\{\{T\}\}$ est appelé série de Fredholm sur A si $F(0) = 1$. Dans notre cas, $A = \mathcal{O}_L[[t_1, ..., t_n]] = \Lambda$ et si $X = \mathcal{W}$, et de toute série de Fredholm sur A on déduit par restriction une série de Fredholm sur $\mathcal{W}$ au sens de 4.6. Des séries de Fredholm sur Λ sont fournies par le lemme suivant, généralisant quelque peu le théorème 4.6.2 :

Lemme 4.6.3. *Soient a strictement croissante, $v \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} U_p^a \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, alors il existe une unique série de Fredholm sur Λ dont l'évaluation en $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ coïncide avec* $\det(1 - Tv_{|\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))})$. *En particulier, les P_χ^a sont dans $1 + T\Lambda\{\{T\}\}$.*

Preuve: L'hypothèse sur v implique que sa restriction au $A(\mathcal{W}_r)$-module de Banach orthonormalisable $\mathcal{S}_\chi(r)(G, U_0(p)))$ est complètement continue, la théorie de Coleman nous fournit une série entière sur $\mathcal{W}_r$: $P_{\chi,v,r} = \det(1 - Tv_{|\mathcal{S}_\chi(r)(G,U_0(p))})$. La compatibilité à l'extension des scalaires contractante du déterminant de Fredholm (cf. [C1] A.2.5) nous donne, faisant grandir r dans $[1, |\omega/\mathbf{p}|[\cap p^{\mathbb{Q}}$ et notant que $\bigcup_r(\mathcal{W}_r \times \mathbb{A}^1_{rig})$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$, un élément $P_{\chi,v}(T) \in 1 + T\mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})\{\{T\}\}$. Ses coefficients sont dans Λ d'après 4.4.1, car ce sont des fonctions sur $\mathcal{W}$ bornées par 1 et rationnelles (4.5.4). Cela implique alors $P_{\chi,v}(T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$.

On sait, par [C1] A.2.5, que la formation du déterminant de Fredholm est compatible à l'évaluation en $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, l'unicité de la proposition est un argument direct de Zariski-densité de ces points dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$. □

Définition : On pose $P_\chi := P_\chi^{(0,1,\ldots,n-1)}$ et $Q_\chi := Q_\chi^{(0,1,\ldots,n-1)}$.

4.7. **Classicité des formes de petite pente.**

4.7.1. *Formes de pente finie.* Si V est un $\mathbb{C}_p$-vectoriel de Banach orthonormalisable, $L \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(V)$ complètement continu, $\alpha \in \mathbb{Q}$, on note V^α le plus grand sous-$\mathbb{C}_p$-vectoriel de dimension finie stable par L sur lequel L a toutes ses valeurs propres de valuation α. Un élément de V sera dit de pente finie pour L s'il est dans $\oplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} V^\alpha$.

Si une forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ est de pente finie pour un U_p^a avec a strictement croissante, alors elle est de pente finie pour tous les $U_p^{a'}$ avec a' strictement croissante. En effet, U_p^a est un monôme en les $n+1$ opérateurs $U_p^{(0,\ldots,0,1,\ldots,1)}$, chacun intervenant. Le sous-espace de dimension finie de $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ sur lequel U_p^a est de pente α donnée est stable par tous les $U_p^{a'}$, car ces derniers commutent à U_p^a. Comme U_p^a y est inversible, les $U_p^{(0,\ldots,0,1,\ldots,1)}$ le sont donc aussi, ainsi donc que tout $U_p^{a'}$ avec a' strictement croissante. La notion d'être "de pente finie" pour une forme automorphe p-adique est donc indépendante de l'opérateur U_p^a choisi.

Proposition 4.7.2. *Si $p > 2$, une forme automorphe classique de type $(G, U_0(p), \chi)$ est de pente finie.*

Preuve: Dans la traduction exposée au §4.2, il suffit de montrer que si V est une représentation complexe admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ayant un sous-espace non nul sur lequel l'Iwahori $\Gamma_0(p)$ (car $p > 2$) agit par un caractère ψ, alors les $[IuI]$ y sont inversibles. Mais ces endomorphismes sont inversibles dans l'algèbre de Hecke complexe de $\Gamma_0(p)$ pour ce caractère par [Ro] lemme 7.6 (dans les notations de son §3, ψ est de niveau 1 et on a donc $(J, \rho) = (\Gamma_0(p), \psi)$). □

Cette proposition est fausse en général si $p = 2$, et ce même pour $n = 2$.

4.7.3. *Classicité en petite pente.* La notation $V(G, U_0(p))^\alpha$ sous-entendra "pour l'action de l'opérateur U_p" défini plus haut. Si $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, on pose $\mathrm{Min}(t) := \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i)$ (noter que m_n n'intervient pas).

Proposition 4.7.4. *Soient $\alpha \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ tel que $\alpha < \mathrm{Min}(t) + 1$, alors*

$$\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl,\alpha} = \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^\alpha$$

Plus généralement, soient $a = (a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$ strictement croissante positive, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, tel que $\alpha < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)(m_i + 1)$, alors le sous-espace de $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ sur lequel $u^{(a_1,\dots,a_n)}$ est de pente α est inclus dans $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$.

Preuve: Soit $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl} := B_{t,\tau_t\chi}(G, U_0(p))$, on pose

$$\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl} := \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))/\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl},$$

$$\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl} := \mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))/\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$$

On a alors une surjection canonique Hecke équivariante :

$$\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl} \to \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$$

On fixe $(a_1, ..., a_n)$ comme dans l'énoncé, on regarde tout d'abord l'action de $[u^a]_t$ sur $\mathcal{N}_{\chi,t}$. Pour tout monôme M en les $z_{i,j}$ de poids $t' = (m'_1, ..., m'_{n-1})$, on a $[u^a]_t(M) = p^{n(M)}M$ où $n(M)$ est un entier (lemme 2.5.1). Le monôme de poids t' pour lequel $n(M)$ est minimal est $M' = \prod_{i=1}^{n-1} z_{i,2}^{m'_i}$, pour lequel $n(M')$ vaut $m'_1(a_2 - a_1) + \cdots + m'_{n-1}(a_n - a_{n-1})$.

L'action de U_p^a sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ se décompose sous la forme $U_p^a = \sum_{i=1}^{r} [T_i]_t \cdot \sigma_i$ où les σ_i sont des opérateurs de norme 1, et les T_i sont dans $\mathbb{T}^a$ agissant diagonalement via ι, par l'action $[.]_t$, sur $\mathcal{N}_{\chi,t}^h$. Nous allons voir que $U_p^a/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}$ est entier sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$. Il suffit de le voir pour chacun des T_i, et $\Gamma_0(p)$ agissant par des automorphismes de norme ≤ 1, il suffit de le voir pour $[u]_t/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i)+1}$. Or $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$ est isométriquement isomorphe (avec action de $[u]_t$) au sous-espace de $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p)) \simeq \mathcal{N}_{\chi,t}^h$ engendré par les vecteurs dont les coordonnées sont des monômes de poids $t' = (m'_1, ..., m'_{n-1})$ tels qu'il existe $i < n$ vérifiant $m'_i > m_i$. Ainsi, $[u]_t/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}$ est entier sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$. Autrement dit, $|[u]_t/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}| \leq 1$, puis

$$|U_p^a/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}| \leq 1$$

Par passage au quotient, on en déduit la même chose pour U_p^a sur $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$. En particulier, les valeurs propres de U_p^a y sont de pente $\geq \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i + 1)(a_{i+1} - a_i)$. Ainsi, si U_p^a a une valeur propre de pente $\alpha < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i) + 1$, son image dans $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$ est nulle, ce que l'on voulait. □

Remarques :

– Les calculs ci-dessus "pour $h = 1$" montrent qu'une section du fibré en droites de poids t sur la variété de drapeaux F qui converge sur l'ouvert affinoide $\mathcal{F}$ et qui est propre pour $\mathrm{diag}(1, p, ..., p^{n-1})$ de pente α est une section globale dès que $\alpha < \mathrm{Min}(t) + 1$.

– Il faut noter que le sous-monoïde de U engendré par les u^a avec $a = (0 = a_1 < a_2 < ... < a_n)$ n'est pas de type fini si $n > 2$. Nous disposons donc, pour $n > 2$, d'une infinité de critères distincts de "classicité en petite pente".

Définitions : Soit $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, une forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$, de pente $0 \leq \alpha < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i + 1)(a_{i+1} - a_i)$ pour U_p^a (resp. pour U_p) sera dite *très classique pour* U_p^a (resp. *très classique*). Une forme automorphe p-adique très classique pour un U_p^a est classique.

4.8. **Opérateurs U et algèbre de Hecke-Iwahori.**

4.8.1. *Notations.* Soient P le Borel supérieur de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, D le sous-groupe du tore diagonal composé des éléments à coefficients dans $p^{\mathbb{Z}}$, $U \subset D$ comme en 2.5.1, et l'Iwahori I, *i.e.* le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ des éléments triangulaires supérieurs modulo p, $I = \Gamma_0(p)$ si $p > 2$. Si M est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\overline{M}$ désignera sa projection dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Si $0 \leq i \leq n$, on notera

$$u_i := \mathrm{diag}(1, ..., 1, p, ..., p), \quad \text{avec } i \text{ fois le terme } 1,$$

et si de plus $i > 0$,

$$x_i := u_{i-1}/u_i$$

Si M est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $[MgM]$ désignera toujours la double classe associée à g dans l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ relativement à M, notée $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), M)$.

4.8.2. *Rappels.* Soit $\chi := (\chi_1, ..., \chi_n) : (\mathbb{Q}_p^*)^n \to \mathbb{C}^*$ un caractère continu non ramifié, on le verra aussi par restriction comme un caractère de D, et par extension comme un caractère de P. On note $\mathrm{Ind}(\chi)$ l'induite parabolique lisse normalisée de χ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Explicitement, soit

$$\delta^{1/2} := (|.|^{(n-1)/2}, |.|^{(n-3)/2}, \cdots, |.|^{(1-n)/2})$$

le caractère (non ramifié) "module" de P, $\delta^{1/2}(x_i) = p^{(2i-n-1)/2}$,

$$\mathrm{Ind}(\chi) := \{f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C}, \text{ lisses}, f(bg) = \delta^{\frac{1}{2}}(b)\chi(b)f(g), \ \forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), \ b \in P\}$$

Le caractère χ étant non ramifié, $\mathrm{Ind}(\chi)^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ et la représentation de l'algèbre de Hecke non ramifiée $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p))$ sur ce dernier est un caractère $\psi = \psi(\chi)$ vérifiant

$$\forall i = 1, ..., n, \quad \psi([\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)u_{n-i}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)]) = p^{\frac{i(n-i)}{2}} \sum_{I \subset \{1,...,n\}, |I| = i} \prod_{j \in I} \chi_j(p)$$

4.8.3. *Action des opérateurs U sur les I-invariants de* $\mathrm{Ind}(\chi)$. Nous examinons dans ce paragraphe l'action de l'algèbre de Hecke-Iwahori complexe $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ sur $\mathrm{Ind}(\chi)^I$, et plus précisément celle des opérateurs de la forme $[IuI]$, $u \in U$. La décomposition de Bruhat s'écrit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} PwI$, et χ étant non ramifié, il vient que $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ est de dimension $n!$ sur $\mathbb{C}$.

Lemme 4.8.4. *La semi-simplification de la représentation sur* $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ *de la famille commutative des $[IuI]$, $u \in U$, est somme directe des $n!$ caractères χ_w, $w \in \mathfrak{S}_n$, définis par $\chi_w([IuI]) := \delta^{1/2}(u)\chi(w^{-1}uw)$.*

Ce résultat est une conséquence d'une description de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ due à Bernstein, dont nous allons brièvement en rappeler certains aspects, en suivant [Rog] §1 et §5.

Soit $w \in D.\mathfrak{S}_n$, $[IwI]$ est un élément inversible de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ (car on est en caractéristique première à p), et l'application $u \in U \mapsto [IuI] \in H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)^*$ est un morphisme injectif de monoïdes $U \longrightarrow H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)^*$. On normalise ce morphisme en le multipliant par $z\delta^{-1/2}$, ou z est le caractère de D défini par $z(x_i) = p^{-1}$ pour tout i, il s'étend donc en un unique morphisme de groupes

$$D \longrightarrow H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)^*$$

On désignera encore par $d \in H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$, l'image de $d \in D$ par ce morphisme. En particulier, $x_i = p^{\frac{n-1}{2}-i}[Iu_{i-1}I][Iu_iI]^{-1}$.

La décomposition de Bruhat-Iwahori $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w \in D\mathfrak{S}_n} IwI$ montre que la sous-algèbre

$$\mathcal{A} := \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$$

de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ est l'algèbre des polynômes formels de Laurent en les x_i. Soit $H_{\mathfrak{S}_n}$ le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ ayant pour base les $[IwI]$ avec $w \in \mathfrak{S}_n$. C'est une sous-algèbre de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$, isomorphe à $H(\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}, \overline{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)})$, via $[IwI] \mapsto [\overline{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} w \overline{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}]$. Le résultat de Bernstein est que $\mathcal{A}$ et $H_{\mathfrak{S}_n}$ engendrent $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$, avec les relations de commutation suivantes ($s_j = (j, j+1) \in \mathfrak{S}_n$) :

$$x_i[Is_jI] = [Is_jI]x_i, \text{ si i} \neq \text{ j, j+1}$$
$$x_i[Is_iI] = [Is_iI]x_{i+1} - (p-1)x_{i+1}, \ \ i = 1, ..., n-1$$
$$x_{i+1}[Is_iI] = [Is_iI]x_i + (p-1)x_{i+1}, \ \ i = 1, ..., n+1$$

Par conséquent, faisant agir $\mathfrak{S}_\mathbf{n}$ sur $\mathcal{A}$ par automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbre et en permutant les coordonnées sur D, on a la formule suivante. Soient $x \in \mathcal{A}$ et $w \in \mathfrak{S}_n$,

$$x[IwI] = [IwI]w^{-1}(x) + \sum_{w' < w} [Iw'I]a_{w',w,x}, \quad \text{avec } a_{w',w,z} \in \mathcal{A}, \tag{14}$$

et $<$ désigne l'ordre de Bruhat associé aux s_j dans la formule ci-dessus.

Prouvons le lemme maintenant. Si $w \in \mathfrak{S}_n$, soit e_w l'unique élément de $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ tel que si $w' \in \mathfrak{S}_n$, $e_w(w') = 0$ ou 1 selon que $w \neq w'$ ou $w = w'$. Si on ordonne la base des e_w de manière croissante avec la longueur de w (par rapport à la famille des s_j), nous allons voir que les $[IuI]$, $u \in U$, sont triangulaires supérieurs.

- Par la décomposition de Bruhat-Iwahori, si $u \in U$ et $w' \in \mathfrak{S}_n$, $(IuI) \cap w'^{-1}(PI) = (IuI) \cap w'^{-1}D.I$ est vide sauf si $w' = 1$, auquel cas il vaut uI. Ainsi $([IuI].e_1)(w') = 0$ si $w' \neq 1$, $e_1(u) = (\delta^{1/2}\chi)(u)$ sinon, soit $[IuI].e_1 = (\delta^{1/2}\chi)(u)e_1$. $\mathcal{A}$ agit donc sur e_1 par un caractère envoyant x_i sur $(z\chi)(x_i) = \chi_i(p)/p$.
- Si $w, w' \in \mathfrak{S}_n$, $(IwI) \cap w'^{-1}PI = (IwI) \cap w'^{-1}I$, qui est vide sauf si $w = w'^{-1}$, auquel cas c'est wI. Ainsi, $[IwI].e_1 = e_{w^{-1}}$.

Par la formule (14), si $x \in \mathcal{A}$ et $w \in \mathfrak{S}_n$,

$$x.e_w = (x.[Iw^{-1}I]).e_1 = (z\chi)(w(x))e_w + \sum_{w' < w^{-1}} (z\chi)(a_{w',w,x})e_{w'^{-1}}$$

On conclut en définissant χ_w comme le caractère de $\mathcal{A}$ sur e_w (modulo les $e_\tau, \tau < w$) ramené aux $[IuI]$ par la relation $[IuI] = \delta^{1/2}(u)z^{-1}(u)u$. $\square$

Définition : Pour $i = 1, ..., n$, on pose

$$F_i := [Iu_{n-i}I][Iu_{n-i+1}I]^{-1}$$

Par le lemme 4.8.4, $\chi_w(F_i) = p^{\frac{n-1}{2}}\chi_{\omega(n+1-i)}(p)/p^{i-1}$. Soit $P_\chi(T) \in \mathbb{C}[T]$ le polynôme de Hecke de l'unique constituant non ramifié de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ apparaissant dans $\mathrm{Ind}(\chi)$, on a

$$P_\chi(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - p^{\frac{n-1}{2}}\chi_i(p)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i p^{\frac{i(i-1)}{2}}\psi([\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)u_{n-i}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)])T^{n-i}$$

On en déduit que "F_1 choisit une racine du polynôme de Hecke". Plus généralement, $\chi_w(F_i)$ est de la forme λ/p^{i-1} où λ est une racine du polynôme de Hecke, et à w fixé on a :

$$P_\chi(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - p^{i-1}\chi_w(F_i))$$

Remarque : Soient $t \in \mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{Z}$, $\nu_t : D \to \mathbb{C}^*$ l'inverse du caractère de plus haut poids t (que l'on a introduit au §3.5), si on considère l'action des $[IuI]$ sur $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ tordue par ν_t, ce qui sera le cas dans les applications du §7.5, les caractères apparaissant sont les $(\nu_t\chi_w)$ et vérifient, pour une certaine racine λ du polynôme de Hecke :

$$(\nu_t\chi_w)(F_i) = \lambda/p^{i-1+m_n+m_{n-1}+m_{n-2}+\cdots+m_{n-i+1}}$$

5. La série caractéristique de U_p

5.1. Borne inférieure uniforme pour le polygone de Newton.

Lemme 5.1.1. *Soient $v \in \mathbb{Q}$, $r = p^v$, $1 \leq r < |\omega/\mathbf{p}|$, $t \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, si $Q_\chi(t,T) = 1+\sum_{i\geq 1} a_i T^i$, alors $|a_i| \leq 1$, et son polygone de Newton est minoré indépendamment de t dans $\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$ par le graphe de la fonction*

$$x \mapsto C_r(h,N)x(x^{1/N} - (h(N+1))^{1/N})$$

avec $C_r(h,N) = \varepsilon_r(N!/h)^{1/N}\frac{2N}{(N+1)(N+2)^2}$, $N = 2^n - n - 1$, $\varepsilon_r = v(\mathbf{p}/\omega) - v$.

Preuve: $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p)) \simeq \mathcal{N}_{\chi,t}^h$, on suppose ici les scalaires étendus à $\mathbb{C}_p$ et on fixe comme base orthonormale sur $\mathbb{C}_p$ celle des $e_{M,a}$, M parcourant l'ensemble des monômes en les $z_{i,j}$, $1 \leq a \leq h$, définie par

$$e_{M,a} := (0,\cdots,0,M,0,\cdots,0)$$

M étant à la a^{ieme} case. $U_p = \sum_{i=1}^{r}[T_i]_t\cdot\sigma_i$, où T_i agit diagonalement sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p))^h$ par un élément de $\mathbb{T}$ sur chaque coordonnée, par l'action $[.]_t$. Soit g un tel élément, on montre ci-dessous que $g(e_{M,a})$ a son coefficient en $e_{M',a'}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ de valuation $\geq \varepsilon_r|M'|$ où $|M'| = m'_1+\cdots+m'_{n-1}$ si M' est de poids $(m'_1,...,m'_{n-1})$, ε_r comme dans l'énoncé. Notons que cette minoration est indépendante du couple (M,a), de t, et de g, elle vaut donc aussi par sommation pour U_p, les σ_i étant de simples permutations.

Fixons donc $g \in \mathbb{T}^a$, $M \in \mathcal{N}_{\chi,t}$ un monôme en les $z_{i,j}$. Si $t = (t_1,...,t_n)$, on a $[g]_t(M) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{j}_i(g)^{t_i}g(M)$. Notons que $g(M)$ est un produit de $g(z_{i,j})$ pour chaque $z_{i,j}$ intervenant dans M (avec multiplicité bien sûr). On fixe i,j, on sait la forme de $g(z_{i,j})$ par les équations (8) :

$$\frac{a_1+p(\sum_{k=2}^{J(i)} a_k z_{i,k})}{\lambda+p(\sum_{k=2}^{J(i)} b_k z_{i,k})},\ \ a_k,b_k\in\mathbb{Z}_p,\ \ \lambda\in\mathbb{Z}_p^*$$

En particulier, chaque $z_{i,k}$ apparaît avec un multiple de p comme coefficient, et après développement du dénominateur, c'est donc une série de puissances des $z_{i,k}$ ($1<k\leq J(i)$) telle que chaque monôme en les $z_{i,k}$ de degré total d a son coefficient dans $\mathbb{Z}_p$ divisible par p^d. On en déduit le même résultat pour $g(M)$, qui est un produit de $g(z_{i,j})$. Il reste à examiner les cocycle $\mathbf{j}_i(g)^{t_i}$:

$$\mathbf{j}_i(g)=1+\mathbf{p}f_i,\ \ f_i\in\mathbb{Z}_p+\sum_{i=2}^{J(i)}\mathbb{Z}_p z_{i,j} \text{ si } i<n,\ \ f_n\in\mathbb{Z}_p$$

$$(1+\mathbf{p}f_i)^{t_i}=1+\sum_{n\geq 1}\frac{t_i(t_i-1)...(t_i-n+1)}{n!}\mathbf{p}^n f_i^n$$

Notons que $|t_i|\leq r$ et donc que la valuation du coefficient de f_i^n est supérieure à $n(v(\mathbf{p}/\omega)-v)=n\varepsilon_r$. Chaque monôme de degré total d en les $z_{i,j}$ apparaît dans $\mathbf{j}_i(g)^{t_i}$ avec un coefficient dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ de valuation $\geq d\varepsilon_r$. Puisque $\varepsilon_r\leq 1$, le développement de $[g]_t(M)$ sur la base des monômes en les $z_{i,j}$ est donc tel que chaque monôme de degré total d a un coefficient dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ de valuation $\geq d\varepsilon_r$, ce qui était annoncé.

Ceci nous conduit à ordonner la base $e_{M,a}$ de la manière suivante. Soient $s\geq 0$ et $\mathcal{A}_s$ le sous-$\mathbb{C}_p$-vectoriel de dimension finie engendré par les $e_{M,a}$ tels que $|M|=n$. Alors $\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p))$ est somme directe topologique "orthogonale" des $\mathcal{A}_s$. On pose $r=2^n-n-1$ (qui est la dimension de $\mathcal{B}$, ou encore le nombre des paramètres $z_{i,j}$), on aura besoin des formules suivantes :

$$\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{A}_s)=h\#\{(a_1,...,a_N)\in\mathbb{N}^N,\sum_{i=1}^N a_i=s\}=h\binom{s+N-1}{N-1}$$

$$\sum_{s=0}^{s'}\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{A}_s)=h\binom{N+s'}{N}$$

$$s'\geq 1,\ \sum_{s=0}^{s'} s\cdot\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{A}_s)=hN\binom{N+s'}{N+1}$$

On ordonne totalement la base des $e_{M,a}$ en $(e_i)_{i\geq 1}$ de façon à ce que $e_1,...,e_h$ engendrent $\mathcal{A}_0$, $e_{h+1},...,e_{h(N+1)}$ engendrent $\mathcal{A}_1$, et généralement que les e_i avec $h\binom{N+s-1}{N}<i\leq h\binom{N+s}{N}$ engendrent $\mathcal{A}_s$.

Soit donc $1+\sum_{i\geq 1}a_iT^i=\det(1-TU_{p|\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p))})$. Par la majoration des coefficients de la colonne $U_p(e_{M,a})$ donnée plus haut, et l'expression des a_i en fonction des mineurs de la matrice de U_p, on en déduit que

$$\begin{cases} \text{si } s \geq 2, \text{ et si } h\binom{N+s-1}{N} < i \leq h\binom{N+s}{N} \\ v(a_i) \geq \varepsilon_r \sum_{q=0}^{s-1} q \cdot \dim(\mathcal{A}_q) + (i - h\binom{N+s-1}{N})s \geq \varepsilon_r hN\binom{N+s-1}{N+1} \end{cases}$$

On a $hN\binom{N+s-1}{N+1} = N\frac{s(s-1)}{(N+1)(N+s)}h\binom{N+s}{N} \geq N\frac{s(s-1)}{(N+1)(N+s)}i$, de plus de $i \leq h\binom{N+s}{N}$, on tire $N+s \geq (N!i/h)^{1/N}$, d'où

$$v(a_i) \geq \varepsilon_r i(N!i/h)^{1/N}\frac{Ns(s-1)}{(N+1)(N+s)^2}$$

Il est facile de voir que $\frac{s(s-1)}{(N+s)^2} \geq 2/(2+N)^2$ si $s \geq 2$, d'où

$$v(a_i) \geq i^{1+1/N}C_r(h,N), \ \ C_r(h,N) := \varepsilon_r(N!/h)^{1/N}\frac{2N}{(N+1)(N+2)^2}$$

On a écarté le cas où $i \leq h(N+1)$, il est clair qu'alors $v(a_i) \geq 0$. On en déduit que le polygone de Newton de $1 + \sum_{n\geq 1} a_n T^n$ est en dessus du graphe de la fonction

$$f_r(x) = C_r(h,N)x(x^{1/N} - (h(N+1))^{1/N})$$

C'est ce que l'on voulait. □

Corollaire 5.1.2. *Soit $P_\chi(s,T) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n(s)T^n$, alors $a_n(s) = \sum_{m\geq 0} a_{n,m}s^m$ avec $a_{n,m} \in \mathbb{Z}_p$ et $|a_{n,m}| \leq |\mathbf{p}/\omega|^m$. De plus le polygone de Newton de $P_\chi(s,T)$ est uniformément minoré sur $s \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$ par le graphe de la fonction f_r.*

Preuve: Soit $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, la suite exacte de $\mathbb{C}_p$-Banach

$$0 \longrightarrow I\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p)) \longrightarrow \mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p)) \longrightarrow \mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p)) \longrightarrow 0$$

est l'extension des scalaires à $\mathbb{C}_p$ d'une suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-Banach orthonormalisables, donc scinde topologiquement par [Ser] §1 prop. 2. L'opérateur compact U_p étant un endomorphisme de cette suite, [Ser] §2 lemme 2 assure que :

$$P_\chi(t,T)\det(1 - TU_{p|I\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p))}) = Q_\chi(t,T)$$

En particulier, le polygone de Newton de $P_\chi(t,T)$ est extrait de celui de $Q_\chi(t,T)$, il est donc minoré par celui de ce dernier. On conclut par le lemme 5.1.1. L'assertion d'intégralité et croissance provient de ce que l'on sait que $\det(1 - TU_{|\mathcal{S}_\chi(1)(G,U_0(p))})$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}_p\langle(s_k)\rangle$, que ses évaluations sur les $\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$ sont à coefficients entiers (par la proposition 3.6.2), et du principe du maximum sur $\mathcal{W}_r$. □

5.2. Une congruence.

Proposition 5.2.1. *$P_\chi(s,T) = 1+\sum_{n\geq 1} a_n(s)T^n \in A^0(\mathcal{W})\{\{T\}\}$, soient $s, s' \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $m \in \mathbb{N}$, si $|s-s'| \leq |p^m|$, alors $|a_n(s)-a_n(s')| \leq |\mathbf{p}p^m|$.*

Preuve: Soient $s, s' \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$. On identifie $\mathcal{S}_{\chi,s}(G, U_0(p))$ et $\mathcal{S}_{\chi,s'}(G, U_0(p))$ au $\mathbb{C}_p$-espace de Banach $\mathcal{S}_{\chi,0}(G, U_0(p)) = A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)_\chi(G, U_0(p)) \simeq A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)^h_\chi$. On s'intéresse aux deux actions de U_p sur cet espace : $[.]_s$ et $[.]_{s'}$. Comme $[u]_s = [u]_{s'}$, il suffit de comparer les actions diagonales de $\Gamma_0(p)$. La boule unité $A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)^0_\chi$ est préservée par les opérations $[.]_*$ de $\Gamma_0(p)$, par la proposition 3.6.2. On fixe un entier $m \geq 0$, $\gamma \in \Gamma_0(p)$, on va montrer que les $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-endomorphismes $[\gamma]_s$ et $[\gamma]_{s'}$ de $A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)^0_\chi/\mathbf{p}p^m A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)_\chi$ sont égaux.

Par hypothèse, $s = s' + p^m u$, $|u| \leq 1$; si $s = (s_1, ..., s_n)$ et $s' = (s'_1, ..., s'_n)$, alors $s_i = s'_i + p^m u_i$, $u_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. De plus, si $1 \leq i \leq n$, $\gamma \in \Gamma_0(p)$,

$$\mathbf{j}_i(\gamma)^{s_i} = \mathbf{j}_i(\gamma)^{s'_i}(\mathbf{j}_i(\gamma)^{p^m})^{u_i}$$

Notons que $\mathbf{j}_i(\gamma)$ est de la forme $1+\mathbf{p}f$, $f \in A(\mathcal{F})^0$. On en déduit que, $(1+\mathbf{p}f)^{p^m} = 1 + \mathbf{p}p^m g$, $g \in A(\mathcal{F})^0$, puis que

$$(1+\mathbf{p}f)^{u_i p^m} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{u_i(u_i-1)\cdots(u_i-n+1)}{n!}\mathbf{p}^n p^{nm} g^n$$

$$v(\mathbf{p}^n p^{nm}/n!) = n(v(\mathbf{p})+m) - \frac{(n-S_n)}{p-1} \geq v(\mathbf{p}) + m,\ \forall n \geq 1,\ m \geq 0$$

On conclut $\mathbf{j}_i(\gamma)^{p^m u_i} \equiv 1 \in A(\mathcal{F})^0/\mathbf{p}p^m A(\mathcal{F})^0$, ce que l'on voulait. On en déduit que les deux opérateurs U_p coïncident sur ce même espace, que leurs séries caractéristiques, qui sont dans $1 + T\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\{\{T\}\}$, sont égales modulo $\mathbf{p}p^m$. □

Remarque : La même preuve vaut pour $Q_\chi(s,T)$.

5.3. Application d'un résultat de Wan.

Théorème 5.3.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{Q}$, t et $t' \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, si $|t-t'| \leq |p^{m_r(\alpha)}|$, avec*

$$m_r(\alpha) = [h\alpha(A_r\alpha + B)^N],\ \ A_r = \frac{(N+1)(N+2)^2}{2v(\mathbf{p}/r\omega)N(N!)^{1/N}},\ \ B = (N+1)^{1/N}$$

alors les parties de pente $\leq \alpha$ des polygones de Newton de $P_\chi(t,T)$ et $P_\chi(t',T)$ coïncident.

Preuve: On applique le lemme 4.1 de [Wan], on le rappelle :

Lemme 5.3.2. *(Wan) Soient $Q_1(T)$ et $Q_2(T)$ deux éléments de $1 + T\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\{\{T\}\}$, N_i $(i = 1, 2)$ la fonction sur $\mathbb{R}^+$ dont le graphe est le polygone de Newton de Q_i. On suppose que $\mu(x)$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que*

$$\mu(0) \leq 0,\ N_i(x) \geq x\mu(x)\ (1 \leq i \leq 2, x \geq 1),\ \underset{x\to+\infty}{\mu(x)} = \infty$$

On suppose de plus que $x\mu^{-1}(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et on pose $m(x) := [x\mu^{-1}(x)]$. Si $Q_1(T) \equiv Q_2(T) \bmod p^{m(\alpha)+1}$ pour un $\alpha \geq 0$, alors N_1 et N_2 coïncident en pente $\leq \alpha$.

Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, on regarde $Q_i(T) = P_\chi(t_i, T)$. Alors s'il on considère $\mu(x) = C_r(h,N)(x^{1/N} - (h(N+1))^{1/N})$ comme dans le corollaire 5.1.2, $\mu^{-1}(x) = (x/C_r(h,N) + (h(N+1))^{1/N})^N$ et donc $x\mu^{-1}(x)$ est croissante et μ satisfait les hypothèses du lemme de Wan. On en déduit le théorème. Notons que Wan énonce son résultat dans $\mathbb{Z}_p$ mais sa preuve est tout aussi valable dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. □

Exemples : Dans $\mathcal{W}_1$, si $n = 2$, 3 ou 4, on a respectivement $m_1(\alpha) \leq [h\alpha(18\alpha+2)]$, $[h\alpha(21\alpha+2)^4]$, ou $[h\alpha(38\alpha+2)^{11}]$. Si $n > 4$, $m_1(\alpha) \leq [h\alpha(3N\alpha+2)^N]$.

De l'assertion de classicité (proposition 4.7.4), on déduit :

Corollaire 5.3.3. *Soient $\alpha \geq 0$, $t, t' \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, si $\mathrm{Min}(t), \mathrm{Min}(t') > \alpha - 1$, et si $|t - t'| \leq |p^{m(\alpha)}|$, avec*

$$m(\alpha) = [h\alpha(A_1\alpha + B)^N]$$

alors

$$\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl,\alpha}) = \dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{\chi,t'}(G, U_0(p))^{cl,\alpha})$$

Corollaire 5.3.4. *Les pentes de U_p agissant sur les formes classiques forment une partie discrète de $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^+$.*

Preuve: Soient $\alpha \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathcal{W}_1(\mathbb{Q}_p)$, par le théorème précédent, il existe un voisinage $\mathcal{U}_t$ de t dans $\mathcal{W}_1(\mathbb{Q}_p)$ tel que si $s \in \mathcal{U}_t$, la partie de pente $\leq \alpha$ du polygone de Newton des $P_\chi(s,T)$ est indépendante de s, en particulier il n'y a qu'un nombre fini de pentes $\leq \alpha$ possibles sur $\mathcal{U}_t$. Par compacité de $\mathcal{W}_1(\mathbb{Q}_p)$, on conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de pentes $\leq \alpha$ de U_p sur les $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ ($t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$), et donc à fortiori sur les $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$. □

5.4. **Polygone de Newton sur un affinoide.** Soient K un corps local, π une uniformisante de K, A une K-algèbre affinoide réduite, $X := \mathrm{Specmax}(A)$, et $|.|$ la norme sup sur A. On fixe $f = \sum_{i\geq 0} a_i T^i$ dans $1 + TA\{\{T\}\}$. Pour tout $x \in X$, on note f_x l'évaluation en x de f, $f_x \in (A/x)\{\{T\}\}$. On supposera de plus que $A^{00} = \pi A^0$ et que $|.|$ est multiplicative sur A, on note v la valuation associée.

Proposition 5.4.1. *Soit $s \in \mathbb{Q}$, on suppose que la partie $\mathcal{P}$ de pente $\leq s$ du polygone de Newton de f_x ne dépend pas de $x \in X$, et que $v(K)$ contient les pentes de $\mathcal{P}$. Alors il existe un unique polynôme P dans $1 + TA[T]$ de coefficient dominant inversible et une unique série entière $S \in 1 + TA\{\{T\}\}$ telle que $f = PS$, que le polygone de Newton de P_x soit exactement $\mathcal{P}$, et que $(P,S) = 1$ dans $A\{\{T\}\}$.*

De plus, si $\mathcal{P}$ a r pentes distinctes $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, de longueur respective $N_1,\ldots,N_r$, il existe des uniques polynômes $P_i(T) \in 1 + TA[T]$ de degré N_i, tels que pour tout $x \in X$, le polygone de Newton de $(P_i)_x$ n'a qu'une pente, de longueur N_i, égale à α_i, $P = \prod_{i=1}^r P_i$. Enfin, $(P_i, S) = 1$ et $(P_i, P_j) = 1$ si $i \neq j$.

Preuve: i) Cas où $\mathcal{P}$ n'a qu'une pente, nulle, de longueur N. Par l'hypothèse sur les f_x, $\forall x \in X$,

$$|a_i(x)| \leq 1, \ \ \forall i \geq 1$$

$$|a_N(x)| = 1$$
$$|a_i(x)| < 1, \quad \forall i > N$$

On en déduit par le principe du maximum que $|a_i| \leq 1\ \forall i$, que $|a_N| = 1$ et que $|a_i| < 1$ si $i > N$. En particulier, f est dans $A^0{<}T{>}$. De plus, a_N ne s'annulant pas, il est inversible dans A, son inverse est de norme 1 par l'hypothèse "$|.|$ est multiplicative", a_N est donc un inversible de A^0. Enfin, par l'hypothèse $A^{00} = \pi A^0$, on a que $a_i \in \pi A^0$ si $i > N$.

On regarde alors $M = A^0\langle T\rangle/(f(T))$, $M/\pi M = (A^0/\pi A^0)[T]/(\bar{f})$ où $\bar{f}$ est de degré N, de coefficient dominant inversible (par ce qu'on vient de dire).

Ainsi, $M/\pi M$ est fini, ce qui est donc le cas aussi de M (qui est π-complet séparé). On en déduit que $A\langle T\rangle/(f(T))$ est fini sur A. Comme il est plat (lemme 5.4.3), il est localement libre de rang fini sur A. Son rang se calcule en un point $x \in X$ quelconque, c'est donc $N = \dim_{A/x}((A/x)\langle T\rangle/(f_x))$. La multiplication par T a un polynôme caractéristique Q unitaire de degré N. La surjection canonique

$$A\langle T\rangle/(Q(T)) \to A\langle T\rangle/(f(T))$$

est donc un isomorphisme (les deux modules sont projectifs de même rang N). On conclut que $(f) = (Q)$ dans $A\langle T\rangle$, et il existe $S \in A\langle T\rangle$ inversible tel que $f = QS$. En regardant en $x \in X$, on a $f_x = Q_x S_x$ et S_x inversible dans $(A/x)\langle T\rangle$. Par conséquent les N racines (avec multiplicité) de pente 0 de f_x sont des racines de Q_x, qui est de degré N, et Q_x est donc proportionnel (par un facteur non nul dans A/x) à la partie de pente 0 de f_x, qui est un polynôme unitaire de degré N, dont le polygone de Newton est $\mathcal{P}$. Le coefficient constant b de Q ne s'annule donc jamais, il est inversible dans A. On renormalise ainsi Q en $P = Q/b$, $P \in 1 + TA[T]$, et pour tout x, P_x n'a qu'une pente, nulle, de longueur N (cela implique comme plus haut que $P \in A^0[T]$). On pose $S' = bS$, $S' \in 1 + TA\langle T\rangle$.

Ainsi, $f = PS'$, et S' est inversible dans $A[T]/(P) = A\langle T\rangle/(P)$. Par le lemme 5.4.2, on conclut $S' \in 1 + TA\{\{T\}\}$ puis $(P, S') = 1$ (sous-entendu dans $A\{\{T\}\}$), ce que l'on voulait.

ii) Cas où $\mathcal{P}$, n'a qu'une pente, quelconque disons α, de longueur N. Soit u un élément de K tel que $v(u) = \alpha$, on regarde $g(T) = f(T/u)$. C'est encore une série entière dont les évaluations g_x ont pour polygone de Newton celui de f_x moins la droite passant par 0 de pente α. La première pente commune est donc 0 de longueur N. Le i) s'applique et $f(T) = P'(Tu)S'(Tu) = P(T)S(T)$ ou S est entière et premier à Q, et on obtient ce que l'on voulait.

iii) Cas général : par récurrence sur le nombre de pente de $\mathcal{P}$. Par hypothèse, $f(T) = P_1(T)S_1(T)$ ou S_1 est entière, P_1 a pour polygone de Newton uniforme $\mathcal{P}$ privé de sa dernière pente, et $(S_1, P_1) = 1$. Il est clair que S_x a pour première pente la dernière pente de $\mathcal{P}$, pour tout x, par la théorie du polygone de Newton sur un corps (voir [Kob]), et donc qu'on peut appliquer ii) a S_1. Par conséquent, $S_1(T) = P_2(T)S_2(T)$ et $f(T) = P_1(T)P_2(T)S_2(T)$ avec $(P_2, S_2) = 1$ (et $(P_1, P_2S_2) = 1$). S_2 est donc premier à P_1, P_2, et P_1P_2, et P_1 est premier à P_2. □

Lemme 5.4.2. *Soient $f \in 1 + TA\{\{T\}\}$, $P \in 1 + TA\{\{T\}\}$ et $S \in 1 + TA\langle T\rangle$ tels que $f = PS$, alors $S \in A\{\{T\}\}$.*

Preuve: Soit $f = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n T^n$, par le principe du maximum on choisit $x_n \in X$ tel que $|a_n(x_n)| = \sup_{x\in X} |a_n(x)|$. La série $\sum_{n\geq 0} a_n(x_n)T^n$ est entière sur $\mathbb{C}_p$, car $F \in A\{\{T\}\}$, on note Z son polygone de Newton. Par définition, Z borne inférieurement et uniformément les polygones de Newton de tous les f_x. La formule $f = SP$ et la théorie du polygone de Newton sur un corps (ici A/x) montre que le polygone de Newton de S_x pour tout x est celui de f_x auquel on a "soustrait" celui de P_x. Il est donc à plus forte raison minoré par Z et ceci par conséquent uniformément en x. Ainsi, si $S(T) = 1+\sum_{n\geq 1} b_n T^n$, on a $|b_n| = |b_n(z_n)|$ pour un certain $z_n \in X$ (principe du maximum). Le polygone de Newton de $1 + \sum_{n\geq 1} b_n(z_n)T^n$ est minoré par Z, et donc S est entière. $\square$

Lemme 5.4.3. *Soient A une algèbre affinoide et $f \in 1+TA\langle T\rangle$, alors $A\langle T\rangle/(f(T))$ est plat sur A.*

Preuve: On utilise le critère : soient $A \to B$ un morphisme plat entre anneaux noethériens, et f dans B, supposons que pour tout maximal m de A, f est non diviseur de 0 dans B/mB, alors B/fB est plat sur A. Ici $B := A\langle T\rangle$ est plat sur A. Soit $x \in X$, $B/xB = (A/x)\langle T\rangle$ est intègre et f est non diviseur de 0 car il y est non nul (son coefficient constant est 1). $\square$

Remarques : Par la même méthode, on peut montrer que si $f \in 1 + TA\{\{T\}\}$ et que tous les f_x ont même polygone de Newton, alors f se factorise complètement selon les pentes communes. Une petite partie de la démonstration pourrait être remplacée par une préparation de Weierstrass dans le cas (qui nous intéresse) où A est l'anneau des fonctions sur une boule affinoide. Les hypothèses $A^{00} = \pi A^0$ et $|.|$ multiplicatives sont vérifiées dans nos applications mais sont en fait superflues :

Proposition 5.4.4. *La proposition 5.4.1 reste vraie sans supposer ni $A^{00} = \pi A^0$, ni $|.|$ multiplicative, et aussi quand $K = \mathbb{C}_p$.*

Preuve: Le point essentiel est de prouver sous ces hypothèses le cas $i)$ de la preuve de 5.4.1. Pour cela, le modèle de $A\langle T\rangle/(f(T))$ que nous avons choisi ne suffit pas, il faut utiliser la théorie des modèles formels de Raynaud. On conclut par le résultat plus général suivant :

Lemme 5.4.5. *(*[Con2] *théorème 3.6.9) Soit $f : X \to Y$ plat, quasi-compact, séparé, entre deux espaces rigides X et Y, si f a ses fibres géométriques de degré constant d, alors f est fini de rang d.*

L'argument, dû à B.Conrad, consiste en la généralisation d'un théorème analogue en géométrie algébrique dû à Deligne et Rapoport.

6. Familles de formes automorphes

6.1. **Familles ordinaires de Hida.** Une forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ est dite ordinaire si c'est un vecteur propre de U_p de valeur propre une unité p-adique. Ces formes ont été largement étudiées par Hida (cf. [Hi1], [Hi2]), on retrouve certains aspects de sa théorie dans ce paragraphe. Par exemple, notons que si $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, toute forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ ordinaire est très classique par 4.7.4, de plus par 5.3.1 (avec $\alpha = 0$)

la dimension du sous-espace de dimension finie des formes ordinaires classiques de poids $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ est indépendante de t.

Lemme 6.1.1. *La suite $\{U_p^{r!}\}_{r\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ vers un idempotent noté e_χ^{ord}.*

Preuve: D'après la proposition 4.5.5, $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est un anneau topologique profini. Il suffit donc de prouver que dans un tel anneau, une suite de la forme $\{x^{r!}\}_{r\in\mathbb{N}}$ stationne en un idempotent dans chacun de ses quotients finis. On conclut en notant que tout élément d'un monoïde fini admet une puissance qui est un idempotent. □

On a donc un idempotent e_χ^{ord} dans $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, puis une décomposition

$$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) = e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) \oplus (1 - e_\chi^{\mathrm{ord}})\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$$

Proposition 6.1.2. *Le Λ-module $e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ est libre de type fini.*

Preuve: On pose $M := \mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$. Comme $e_\chi^{\mathrm{ord}} \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, il agit continûment sur M, ainsi que $1 - e_\chi^{\mathrm{ord}}$. On en déduit que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M = \ker(1 - e_\chi^{\mathrm{ord}})$ est un sous-Λ-module complet séparé de M. Comme c'est un facteur direct de M qui est plat sur Λ, il est aussi plat sur Λ. La proposition suivra donc après avoir prouvé que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M$ est de type fini. Ayant vu que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M$ est complet séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, il suffit de voir que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M/\mathfrak{m}e_\chi^{\mathrm{ord}}M$ est de type fini. On se ramène de suite à montrer que u agit par un opérateur de rang fini sur $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}$, ce qui est immédiat : il est même de rang 1. □

On définit $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))^{\mathrm{ord}} := e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ comme étant *le Λ-module des formes Λ-adiques ordinaires de type* $(G, U_0(p), \chi)$, on a vu qu'il est libre de rang fini sur Λ et facteur direct topologique de $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$. L'image de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agissant sur $e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ est une Λ-algèbre de rang fini, sans torsion, équidimensionnelle de dimension n, dont chaque composante irréductible s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ (cf. lemme 6.2.10), c'est *l'algèbre de Hecke Λ-adique ordinaire*, on la note $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}^{\mathrm{ord}}$.

6.2. **Construction locale des familles de pentes quelconques.**

6.2.1. *Décomposition de Coleman du module de Banach des formes automorphes.* On rappelle le théorème suivant de Coleman (voir aussi [B2] théorème 3.3) :

Proposition 6.2.2. *([C1] théorèmes A4.3, A4.5) Soient A une algèbre affinoide réduite, U un endomorphisme complètement continu d'un A-module de Banach orthonormalisable M, de série caractéristique* $\det(1-TU) = Q(T)S(T)$*, $S \in 1+TA\{\{T\}\}$, $Q \in 1+TA[T]$ de coefficient dominant inversible, Q et S étant premiers entre eux dans $A\{\{T\}\}$, alors M est somme directe de deux sous-A-modules fermés $M = M_1 \oplus M_2$ stables par U tels que :*
- *Si $d := \deg(Q)$, M_1 est localement libre de rang d et* $\det(1 - TU_{|M_1}) = Q(T)$*,*
- *Si $Q^*(T) := T^dQ(1/T)$, $Q^*(U)_{|M_2}$ est inversible.*

Soit V un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$, le $A(V)$-module de Banach $\mathcal{S}_\chi(V)(G, U_0(p))$ est orthonormalisable sur $A(V)$ et U_p y a pour série caractéristique $P_\chi(s, T)$ restreinte à $A(V)\{\{T\}\}$, que l'on note $P_\chi(V)(s, T)$. Supposons que $P_\chi(V)(T) = Q(T)S(T)$ dans $A(V)\{\{T\}\}$, $Q(T) \in 1 + TA(V)[T]$ de coefficient dominant inversible, $(Q, S) = 1$. La proposition 6.2.2 s'applique car $A(V)$ est une algèbre affinoide réduite donc semi-simple, et nous fournit une décomposition

$$\mathcal{S}_\chi(V)(G, U_0(p)) = \mathcal{S}_\chi(V,1)(G, U_0(p)) \oplus \mathcal{S}_\chi(V,2)(G, U_0(p))$$

en sous-modules stables par U_p avec les qualités suivantes :

- i) $\mathcal{S}_\chi(V,1)(G, U_0(p))$ est un $A(V)$-module localement libre de rang $\deg(Q)$, et U_p y a $Q^*(T)$ pour polynôme caractéristique,
- ii) $\mathcal{S}_\chi(V,1)(G, U_0(p)) = \ker(Q^*(U_p))$, ce qui le détermine uniquement, et $Q^*(U_p)$ est inversible sur $\mathcal{S}_\chi(V,2)(G, U_0(p))$
- iii) Le commutant de U_p dans $\mathrm{End}_{A(V)}(\mathcal{S}_\chi(V)(G, U_0(p)))$ stabilise $\mathcal{S}_\chi(V,1)(G, U_0(p))$.

6.2.3. *Variétés de Hecke locales.* Nous allons voir dans les paragraphes qui suivent comment la décomposition ci-dessus nous permet de construire des familles de formes automorphes p-adiques. On rappelle que l'on a défini l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ en 4.5.3. Tous les espaces que nous étudierons sont des modules sur cette algèbre. Le qualificatif "propre" pour un élément d'un tel module désignera par défaut "non nul, et vecteur propre pour l'action de tous les éléments de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$". L'anneau $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agit sur un tel vecteur propre par multiplication par un caractère, qu'il est coutume d'appeler *système de valeurs propres de* $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$.

On reprend $V \subset \mathcal{W}$ et $P_\chi = QS$ comme dans §6.2.1, la construction qui suit ne va dépendre que du couple (V, Q). Soient $M := \mathcal{S}_\chi(V,1)(G, U_0(p))$ défini *loc.cit.*, $A := A(V)$ et $\mathfrak{h}$ l'image de l'algèbre $\mathcal{H} \otimes_\Lambda A$ dans $\mathrm{End}_A(M)$. Le A-module $\mathrm{End}_A(M)$, normé par la norme sup, est complet et de type fini sur l'algèbre de Banach noethérienne A. Il a donc tous ses sous-A-modules fermés et de type fini sur A (cf. [BGR] 3.7.3). Ainsi, $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_A(M)$ est une sous-A-algèbre de Banach commutative et finie sur A, c'est donc une algèbre affinoide par [BGR] 6.1.1. En particulier, $\mathfrak{h}$ est fermée et l'application continue $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathrm{End}_A(M)$ a son image dans $\mathfrak{h} \cap \mathrm{End}_A(M)^0 = \mathfrak{h}^0$.

Soit $X := \mathrm{Specmax}(\mathfrak{h})$ l'affinoide sous-jacent à $\mathfrak{h}$, on l'appellera la *variété de Hecke locale*, elle ne dépend que de la situation (V, Q) choisie initialement. L'affinoide X est muni d'un morphisme fini κ vers $V \subset \mathcal{W}$. Soient Z, l'hypersurface de rigide de $V \times \mathbb{A}^1$ définie par $Q = 0$, pr_1 et pr_2 les projections respectives de Z sur V et $\mathbb{A}^1$, on a alors la description suivante des points fermés de X :

Proposition 6.2.4. *Pour tout $t \in V(\mathbb{C}_p)$, l'application*

$$x \in X(\mathbb{C}_p) \mapsto (h \in \mathfrak{h} \to h(x) \in \mathbb{C}_p)$$

induit une bijection entre l'ensemble des points $x = (t, \lambda^{-1}) \in Z(\mathbb{C}_p)$ et l'ensemble des systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agissant sur l'espace des formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$ de valeur propre λ pour U_p et de poids t.

Lemme 6.2.5. *Soient A un anneau commutatif, M un module projectif de type fini sur A, $\mathfrak{h}$ une sous-A-algèbre commutative de $\mathrm{End}_A(M)$. Si I est un idéal de A, le noyau du morphisme canonique $\mathfrak{h}/I\mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{A/I}(M/IM)$ est nilpotent.*

Preuve: M étant projectif de type fini sur A, l'application canonique

$$\mathrm{End}_A(M) \otimes_A A/I \longrightarrow \mathrm{End}_{A/I}(M \otimes_A A/I)$$

est un isomorphisme. En effet, M étant de présentation finie sur A, il suffit de le vérifier si A est local et M est libre de type fini, auquel cas c'est évident. Soit $g \in \mathfrak{h}$ tel que son image dans $\mathrm{End}_{A/I}(M \otimes_A A/I)$ est nulle. Comme g est un élément de $\mathrm{End}_A(M)$, avec M projectif de type fini sur A, il admet un polynôme caractéristique, disons de degré r. La formation de ce polynôme commutant à la réduction modulo I, comme le montre l'isomorphisme plus haut, ses coefficients sont dans I. Ainsi, le théorème de Cayley-Hamilton assure que $g^r \in I\mathfrak{h}$, ce que l'on voulait. □

Preuve de la proposition 6.2.4 : Soit $t \in V(\mathbb{C}_p)$ correspondant à un idéal maximal m de $A(V)$, on applique le lemme 6.2.5 à $(A, m, M, \mathfrak{h}) := (A(V), m, \mathcal{S}_\chi(V,1)(G, U_0(p)), \mathfrak{h})$. On en déduit que le morphisme de $\mathbb{C}_p$-algèbres

$$\mathfrak{h}/m\mathfrak{h} \to \mathrm{Im}(\mathcal{H} \otimes_\Lambda \mathbb{C}_p \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_\chi(V,1)(G, U_0(p))_t)$$

induit un isomorphisme sur les $\mathbb{C}_p$-points, ce que l'on voulait. □

6.2.6. *Construction et définition des familles.* On prouve dans ce qui suit l'existence d'une famille passant par toute forme propre de pente finie.

Définition : Soient $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ une forme propre, on appelle *famille de formes automorphes p-adiques de type* $(G, U_0(p), \chi)$ *passant par* f, la donnée :

(a) d'un ouvert affinoide $V \subset \mathcal{W}$,

(b) d'un affinoide X muni d'un morphisme fini $\kappa : X \to V$, surjectif restreint à chacune des composantes irréductibles de X,

(c) d'un point $x_0 \in X(\mathbb{C}_p)$ tel que $\kappa(x_0) = t$,

(d) et d'un morphisme continu d'anneaux $a : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to A(X)^0$,

ayant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, il existe une forme propre $f_x \in \mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))$ telle que pour tout $T \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, $T(f_x) = a(T)(x)f_x$,

(ii) La forme f convient pour f_{x_0},

On dira alors que la famille est paramétrée par X, et qu'elle est de *pente* α *(resp. pente finie)* si toutes les formes de la famille ont même pente α (resp. sont de pente finie). Une famille est de pente finie si, et seulement si, $a(U_p)$ est inversible dans $A(X)$. Dans ce cas, le principe du maximum assure que $x \mapsto |a(U_p)(x)|$ est minoré sur X, disons par $p^{-\alpha}$. La proposition 4.7.4 assure alors que les f_x avec $\kappa(x) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{Min}(\kappa(x)) > \alpha - 1$ sont des formes automorphes classiques. Ceci est en particulier valable quand la famille est de pente α.

Un poids $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ sera dit *classique* si $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$. Un point $x \in X(\mathbb{C}_p)$ sera dit *classique* si $\kappa(x)$ est classique, et si l'on peut choisir f_x satisfaisant (i) dans $\mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))^{cl}$. Un sous-ensemble des $\mathbb{C}_p$-points d'un affinoide Y est dit Zariski-dense s'il rencontre les $\mathbb{C}_p$-points de tout ouvert Zariski de Y.

Proposition 6.2.7. *Si une famille de formes automorphes p-adiques de pente finie contient un point classique, les points classiques y sont Zariski-denses.*

Preuve: Soit une famille comme dans l'énoncé, on adopte les notations de la définition ci-dessus. Par hypothèse, $V(\mathbb{C}_p)$ contient un poids classique. Comme $V \subset \mathcal{W}$ est ouvert affinoide, il contient (cf. [BGR] 7.2.5) une boule de centre t de rayon suffisamment petit, ainsi donc que $t + p^N(\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z})$ pour N assez grand. Les poids classiques t de ce type qui satisfont la condition $\mathrm{Min}(t) > \alpha - 1$ sont Zariski-denses dans $V(\mathbb{C}_p)$. Les affinoides étant des anneaux de Jacobson, on conclut par le :

Lemme 6.2.8. *Soit $X \to Y$ un morphisme fini entre schémas noethériens tel que chaque composante irréductible de X s'envoie surjectivement sur une composante irréductible de Y, alors toute partie dense de Y a pour image inverse une partie dense de X.*

Preuve: On pose $g : X \to Y$. Soient D' une partie dense de Y, $D := g^{-1}(D')$, il suffit de montrer que l'intersection de D avec chacune des composantes irréductibles de X est dense dans cette dernière. Soit T une composante irréductible (réduite) de X, l'inclusion de T dans X induit un morphisme fini g_T de T vers Y, il est surjectif sur une composante irréductible T' de Y par hypothèse. Comme D' est dense dans Y, et que ce dernier n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, $D' \cap T'$ est dense dans T'. On regarde alors l'adhérence Z dans T de $D \cap T = g_T^{-1}(D')$. Comme g_T est fini, $g_T(Z)$ est fermé, mais il contient $D \cap T'$, d'où $g_T(Z) = T'$. En particulier, le point générique η de T' a un antécédent dans Z. Or il est clair qu'il n'a qu'un antécédent par g_T (qui est fini entre schémas intègres), qui est le point générique de T, d'où $Z = T$. $\square$

Théorème 6.2.9. *Soient $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $t \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, et $B \subset \mathcal{W}$ la boule fermée de centre t de rayon $m_{|t|}(\alpha)$ (notations du théorème 5.3.1). Il existe une famille de formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$, de pente α, passant par toutes les formes automorphes p-adiques de ce type, de cette pente, et de poids dans $B(\mathbb{C}_p)$.*

Preuve: Soient $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $t \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, et $r \in [1, |\omega/\mathbf{p}|[\cap p^{\mathbb{Q}}$. On définit $B \subset \mathcal{W}$ comme étant la boule fermée de centre t de rayon $p^{-m_r(\alpha)}$ (cf 5.3.1), et on fixe une forme propre $f \in \mathcal{S}_{\chi,t'}(G, U_0(p))^\alpha$ quelconque avec $t' \in B(\mathbb{C}_p)$.

Le théorème 5.3.1 assure que pour tout x, y dans $B(\mathbb{C}_p)$, $P_\chi(x, T)$ et $P_\chi(y, T)$ ont même partie de pente $\leq \alpha$ dans leur polygone de Newton. La proposition 5.4.1, plus précisément son raffinement 5.4.4 si t n'est pas dans $\mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, fournit alors une décomposition

$$P_\chi(B)(T) = Q(T)S(T) \in A(B)\{\{T\}\},$$

et $Q(T) \in 1 + TA(B)T$ de partie de pente $\leq \alpha$ constante égale à α sur $B(\mathbb{C}_p)$, tels que $(S, Q) = 1$. Cette donnée de B et Q nous permet de construire comme plus haut une variété de Hecke locale, que l'on note X, qui est par construction munie d'un morphisme fini $\kappa : X \to B$.

L'interprétation de $X(\mathbb{C}_p)$ est donnée par la proposition 6.2.4 ; dans notre cas il est en bijection avec l'ensemble des systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ sur les formes automorphes p-adiques de pente α et de poids $t \in B(\mathbb{C}_p)$. En particulier, il existe un point $x_0 \in X(\mathbb{C}_p)$ correspondant à f, tel que $\kappa(x_0) = t'$.

Enfin, on prend pour a le morphisme continu $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathfrak{h}^0 = A(X)^0$ défini en §6.2.3. Nous avons ainsi prouvé que (B, X, a, x_0) satisfait toutes les conditions requises pour être une famille de formes automorphes p-adiques au sens plus haut, passant par f, à l'assertion de surjectivité du (b) près, qui découle du lemme 6.2.10. □

Remarques :
– Les familles construites dans le théorème 6.2.9 ont un "rayon" explicite dans la direction d'un analogue pour le groupe G de la conjecture de Gouvêa-Mazur (cf. [GM] conjecture 1). Il serait intéressant de formuler une conjecture précise dans notre cas. Cela semble accessible, étant donné la nature combinatoire des espaces de formes mis en jeu.
– Dans le cas particulier où $\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{\alpha}) = 1$, la démonstration qui précède montre que $X = B$. Ainsi, les $a(T)$ étant bornés par 1, on en déduit des "vraies" congruences : si $k, k' \in B(\mathbb{C}_p)$ et $k \equiv k' \bmod p^N$ alors $a(T)(k) \equiv a(T)(k') \bmod p^N$.

Il ne nous reste qu'à prouver le

Lemme 6.2.10. *Soit A un anneau commutatif noethérien,*
– *Soient N un module projectif de type fini sur A, B une sous-A algèbre commutative de $End_A(N)$, alors B est sans torsion sur A et ce après tout changement de base plat sur A,*
– *Soit B une A-algèbre finie, sans torsion après tout changement de base plat sur A, alors chaque composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(B)$ *s'envoie surjectivement sur une composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(A)$. *En particulier, B est équidimensionnel de dimension d si A l'est.*
– *De plus, si C est une sous-A-algèbre de B, alors chaque composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(B)$ *s'envoie surjectivement sur une composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(C)$.

Preuve: N étant projectif de type fini sur A, $\mathrm{End}_A(N)$ l'est aussi. B est donc un sous-A-module d'un module libre sur A, ce qui prouve la première assertion.

Prouvons la seconde. Soient $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $f : X \longrightarrow Y$, le morphisme déduit de l'inclusion de A dans B, c'est un morphisme fini. Soit x le point générique d'une composante irréductible de X, il s'envoie sur le point générique y d'un fermé irréductible de Y. Soit $\mathrm{Spec}(B_y) \to \mathrm{Spec}(A_y)$ le changement de base de $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ à $\mathrm{Spec}(A_y)$, c'est un morphisme fini. Le point x est dans la fibre au dessus de y, et cette dernière étant discrète et fermée dans $\mathrm{Spec}(B_y)$, x est un point fermé de ce dernier. Mais comme x est premier minimal, c'est une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(B_y)$. Une composante irréductible réduite à un point ne peut pas intersecter les autres composantes irréductibles, qui sont en nombre fini par hypothèse de noethérianité. Le point x est donc ouvert dans $\mathrm{Spec}(B_y)$, et B_y est produit direct de deux anneaux dont l'un est celui de la composante irréductible $\{x\}$, donc d'anneau B_y/x^N pour un certain entier N. Comme B_y, ainsi que son sous-anneau B_y/x^N est sans A_y-torsion par hypothèse, et que $yB_y \subset x$, on a $y^N = 0$ dans A_y. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A_y)$ est irréductible de point générique y, y est donc le point générique d'une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$. Ceci montre la seconde assertion.

Pour la dernière, on considère le morphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(B) \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}(C) \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}(A)$$

Soit Z une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(B)$, son image dans $\mathrm{Spec}(C)$ est un fermé irréductible Z'. Soit $Z'' \supset Z'$ une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(C)$, on sait par la seconde assertion que $g(Z'')$ est une composante irréductible Z''' de $\mathrm{Spec}(A)$. De même, $g(Z') = (gf)(Z)$ est aussi une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$ incluse dans Z''', donc $g(Z') = Z'''$. Comme g est un morphisme fini, sa fibre au dessus du point générique de Z''' est discrète, ce qui montre $Z'' = Z'$. □

6.3. **Construction globale de la variété de Hecke $\mathcal{D}_\chi$.** Ce que nous avons appelé variétés de Hecke locales dans le paragraphe précédent est une collection d'affinoides attachés à la donnée $(G, U_0(p), \chi)$. Il se trouve que ces affinoides recouvrent de manière admissible un espace rigide sur $\mathcal{W}$, non quasi-compact, construit par recollement à partir de ces derniers. Cet espace généralise *"the eigencurve"* dans la théorie de Coleman-Mazur (cf. [CM], précisément celle qu'ils notent D). Nous l'appelons ici *"la variété de Hecke"* (de type $(G, U_0(p), \chi)$), la traduction française directe du terme "eigenvariety" prêtant a confusion. Cette section est dédiée à sa construction.

La géométrie de ces espaces analytiques est encore largement incomprise, autant localement que globalement, et ce même pour GL_2. Elle est liée, par le pseudo-caractère galoisien qu'elle porte (au moins conjecturalement, voir aussi le §7), à des propriétés arithmétiques subtiles des corps de nombres. Nous renvoyons à l'introduction de [CM] pour une discussion de certains problèmes ouverts, ainsi qu'à [Ki] §11.

Nous nous sommes astreints dans ce texte à ne considérer que des formes automorphes de niveau sauvage $\Gamma_1(p)$ au pire, ce qui est le cas essentiel. Ceci fait que notre espace de paramètre n'est pas $\mathrm{Hom}_{gr-cont}((\mathbb{Z}_p^*)^n, \mathbb{C}_p^*)$ tout entier, mais son ouvert "central" $\mathcal{W}$, formé des caractères de restrictions analytiques à $(1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p)^n$, et ce paramétré logarithmiquement. Dans un travail en préparation avec Buzzard, nous expliquerons comment construire la variété de Hecke dans notre contexte sur tout l'espace des poids.

6.3.1. *Un recouvrement admissible des hypersurfaces de Fredholm.* Soit $F(T) \in 1 + TA(\mathcal{W})\{\{T\}\}$ une série de Fredholm sur un espace rigide réduit $\mathcal{W}$ (quelconque dans ce paragraphe). On lui associe une *hypersurface de Fredholm*, qui est le sous-espace analytique rigide fermé Z_F de $\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$ défini par $F(s,t) = 0$. On dira que F, ou Z_F, est Λ-adique si $F \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$. On a

$$\begin{tikzcd} Z_F \arrow[r, hook] & \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathbb{A}^1_{rig} \\ & \mathcal{W} & \end{tikzcd}$$

Par le lemme 5.4.3, $pr_1 : Z_F \to \mathcal{W}$ est plat. Considérons, à la suite de [C1], l'ensemble $\mathcal{C}$ des ouverts affinoides Y de Z_F tels que :

– i) $pr_1(Y)$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$,

– ii) Y est une composante connexe rigide de $pr_1^{-1}(pr_1(Y))$,
– iii) $pr_{1|Y} : Y \to pr_1(Y)$ est fini.

Comme le montre la proposition suivante, dont le sens se précisera dans sa preuve, étudier ces ouverts revient à étudier la factorisation de F :

Proposition 6.3.2. *La donnée d'un élément de $\mathcal{C}$ est équivalente à celle d'un ouvert affinoide V de $\mathcal{W}$ et d'une factorisation $F(T) = Q(T)S(T) \in 1 + TA(V)\{\{T\}\}$, avec $Q(T) \in 1 + TA(V)[T]$ de coefficient dominant inversible, tel que $(Q, S) = 1$ dans $A(V)\{\{T\}\}$.*

Preuve: Soient $Y \in \mathcal{C}$, $V := pr_1(Y)$, et $Z_V := Z_F \cap (V \times \mathbb{A}_1^{rig})$. L'affinoide Y est un ouvert de Z_V par le ii), il est donc plat sur V. Par ii) et iii), c'est donc un fermé de Z_V qui est fini et plat sur V. Autrement dit, $A(Y)$ est localement libre sur $A(V)$ engendré par $A(V)$ et l'image de T. La multiplication par T admet un polynôme caractéristique, que l'on note $Q \in A(V)[T]$, évidemment de coefficient constant égal à 1. La surjection canonique $A(V)[T]/(Q) \to A(Y)$ est alors un isomorphisme, car les deux $A(V)$-modules en jeu sont projectifs de même rang sur $A(V)$. On en déduit que Q divise $F(T)$, puis que son coefficient constant est inversible, et que $(F, F/Q) = 1$ dans $A(V)\{\{T\}\}$. De $F(0) = 1$ il vient que l'on peut supposer $Q(0) = 1$, et Q est unique sous cette condition.

Réciproquement, à une donnée comme dans l'énoncé, on définit Y comme le fermé affinoide de Z_V découpé par $Q = 0$. Une relation de Bezout entre S et Q fournit des idempotents montrant que Y est un ouvert fermé de Z_V, il est en particulier ouvert affinoide. Il est donc plat sur V, fini car $Q(T) = 0$ dans $A(Y)$ par hypothèse. □

Il reste essentiellement à comprendre pourquoi F se factorise sur de "gros" ouverts affinoides. Par exemple, ceux que l'on obtiendrait seulement en appliquant la proposition 5.4.1 ne recouvrent pas en général Z_F de manière admissible. Le résultat essentiel est alors la

Proposition 6.3.3. *(Coleman, Buzzard) $\mathcal{C}$ est un recouvrement admissible de Z_F.*

Preuve: Voir [B2]. Le cadre est celui d'une série de Fredholm $F(T) \in A(\mathcal{W})\{\{T\}\}$ où $\mathcal{W}$ est un espace rigide réduit. La preuve suit les lignes de celle de [C1], en surmontant les difficultés techniques provenant de ce que la base n'est plus de dimension 1. En particulier, un point technique crucial repose sur le résultat de Conrad énoncé dans le lemme 5.4.5. □

6.3.4. *Application à la construction de la variété de Hecke.* Soit $\chi \in \Delta^n$ fixé, $P_\chi(s, T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$ la série de Fredholm attachée à U_p agissant sur $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ (cf. 4.6), et

$$Z_\chi := Z_{P_\chi} \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig},$$

l'hypersurface de Fredholm qui lui est associée. On considère le recouvrement admissible $\mathcal{C}$ associé à P_χ comme dans le paragraphe 6.3.1.

Soit $Y \in \mathcal{C}$, la proposition 6.3.2 nous donne une factorisation $P_\chi(T) = Q(T)S(T)$ sur $V =: pr_1(Y)$, on note $\mathcal{D}_\chi(Y)$ la variété de Hecke locale (sur $\mathbb{C}_p$) construite dans 6.2.3 à l'aide de cette donnée. On note de plus $\mathcal{H}(Y)$ l'algèbre affinoide de $\mathcal{D}_\chi(Y)$. Il faut recoller les $\mathcal{D}_\chi(Y)$ entre eux. Pour cela on a le lemme suivant, tiré de [CM] (7.2) :

Lemme 6.3.5. *Soient $Y \in \mathcal{C}$, $V \subset pr_1(Y)$ un ouvert affinoide, alors $pr_1^{-1}(V) \cap Y \in \mathcal{C}$ et le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(pr_1^{-1}(V) \cap Y) \to \mathcal{D}_\chi(Y)$ est une immersion ouverte. Si Y_1 et Y_2 sont dans $\mathcal{C}$, $Y_1 \cap Y_2$ l'est aussi, et le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(Y_1 \cap Y_2) \to \mathcal{D}_\chi(Y_1)$ est une immersion ouverte.*

Preuve: Si $Y \in \mathcal{C}$ est associé à $P_\chi = QS$ comme ci-dessus, on désignera par $M(Y)$ le $A(pr_1(Y))$-module

$$\mathcal{S}_\chi(pr_1(Y), 1)(G, U_0(p)),$$

avec les notations du §6.2.1.

Il est clair que $pr_1^{-1}(V) \cap Y$ est dans $\mathcal{C}$. De plus, $\mathcal{H}(pr_1^{-1}(V) \cap Y)$ est par définition l'image de $A(V) \otimes_\Lambda \mathcal{H}$ dans $M(pr_1^{-1}(V) \cap Y)$. Par l'unicité de la décomposition de Coleman, ce dernier s'identifie canoniquement à $M(Y) \otimes_{A(pr_1(Y))} A(V)$. On en déduit un morphisme canonique $\mathcal{H}(Y) \otimes A(V) \to \mathcal{H}(pr_1^{-1}(V) \cap Y)$: c'est un isomorphisme (ce qui conclut la première partie du lemme). En effet, $A(pr_1(Y)) \to A(V)$ est plat, $\mathcal{H}(Y) \hookrightarrow \mathrm{End}_{A(pr_1(Y))}(M(Y))$ est injectif et le morphisme canonique

$$A(V) \otimes_{A(pr_1(Y))} \mathrm{End}_{A(pr_1(Y))}(M(Y)) \to \mathrm{End}_{A(V)}(M(Y) \otimes A(V))$$

est un isomorphisme. Si Y_1 et Y_2 sont comme dans l'énoncé, $Y_1 \cap pr_1^{-1}(pr_1(Y_2)) \in \mathcal{C}$ et le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(pr_1^{-1}(pr_1(Y_2)) \cap Y_1) \to \mathcal{D}_\chi(Y_1)$ est une immersion ouverte, par l'étude précédente. On peut donc supposer $pr_1(Y_1) = pr_1(Y_2)$. Il est alors clair que $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{C}$, et que l'on peut supposer $Y_2 \subset Y_1$, qui est alors une immersion ouverte dans une composante connexe. La décomposition de Coleman montre que $M(Y_1)$ est facteur direct de $M(Y_2)$, puis que le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(Y_2) \to \mathcal{D}_\chi(Y_1)$ est un isomorphisme sur une composante connexe de ce dernier, en particulier une immersion ouverte. □

On montre maintenant que les $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$ se recollent en un espace rigide $\mathcal{D}_\chi$ (on suit [CM] 7.2). Soient $V, V' \in \mathcal{C}$, on définit $\mathcal{D}_\chi(V, V')$ comme étant l'image de $\mathcal{D}_\chi(V \cap V')$ dans $\mathcal{D}_\chi(V)$ via l'immersion ouverte canonique, notée $i_{V,V'}$. Si $\varphi_{V,V'} := i_{V',V}.i_{V,V'}^{-1}$, on a :

$$\varphi_{V',V}\varphi_{V,V'} = id_{\mathcal{D}_\chi(V,V')}, \ \ \mathcal{D}_\chi(V, V) = \mathcal{D}_\chi(V) \ \text{ et } \ \varphi_{V,V} = id_{\mathcal{D}_\chi(V)}$$

De plus, $\varphi_{V,V'}$ induit un isomorphisme

$$\varphi_{V,V',V''} : \mathcal{D}_\chi(V, V') \cap \mathcal{D}_\chi(V, V'') \to \mathcal{D}_\chi(V', V) \cap \mathcal{D}_\chi(V', V''),$$

tel que

$$\varphi_{V,V',V''} = \varphi_{V'',V',V}\varphi_{V,V'',V'}$$

Cette dernière égalité provenant de ce que $\mathcal{D}_\chi(V, V') \cap \mathcal{D}_\chi(V, V'')$ est l'image de $\mathcal{D}_\chi(V \cap V' \cap V'')$ dans $\mathcal{D}_\chi(V)$ par l'immersion ouverte canonique. Par [BGR] (9.3.2),

$$(\{\mathcal{D}_\chi(V)\}, \{\mathcal{D}_\chi(V, V')\}, \{\varphi_{V,V'}\})_{V,V' \in \mathcal{C}}$$

est une donnée de recollement des $\mathcal{D}_\chi(V)$.

Théorème 6.3.6. *Il existe un espace analytique rigide $\mathcal{D}_\chi = \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))$ muni d'un morphisme continu de Λ-algèbres topologiques*

$$a : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \longrightarrow \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{D}_\chi}(\mathcal{D}_\chi)^0,$$

ainsi qu'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_\chi \arrow[dr, "\pi"] \arrow[drr, "\mathbf{U}_p^{-1}"] \arrow[dd, "\kappa"'] & & \\
& Z_\chi \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[dl, "pr_1"] & \mathbb{A}^1_{rig} \\
\mathcal{W} & &
\end{tikzcd}$$

tels que :

i) *π est un morphisme fini,*

ii) *$\mathbf{U}_p := a(U_p)$ est inversible sur $\mathcal{D}_\chi$,*

iii) *Pour tout $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$, il existe un voisinage ouvert affinoide Ω de x tel que :*
 (a) $z \mapsto |\mathbf{U}_p(z)|$ est constante sur $\Omega(\mathbb{C}_p)$,
 (b) $\kappa(\Omega)$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$,
 (c) $\kappa : \Omega \to \kappa(\Omega)$ est fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de Ω,

iv) *L'application*

$$x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p) \mapsto (h \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \mapsto a(h)(x)),$$

induit pour chaque $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ une bijection entre les points $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ tels que $\kappa(x) = t$, et les systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agissant sur l'espace des formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$, de pente finie et de poids t, ces derniers étant comptés sans multiplicité.

Preuve: On définit l'espace rigide $\mathcal{D}_\chi$ comme étant l'espace rigide obtenu par recollement à partir de la donnée décrite plus haut. Par définition, il est admissiblement recouvert par les $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$. Commençons par définir π. Soient $Y \in \mathcal{C}$, $V := pr_1(Y)$, et $Q(T) \in 1 + TA(V)[T]$ définissant Y (cf. 6.3.2). Le théorème de *Cayley-Hamilton* et la proposition 6.2.2 assurent que $Q^*(U_p) = 0$ dans $\mathcal{H}(Y)$, $T \mapsto U_p^{-1}$ induit donc un morphisme fini $\pi_Y : \mathcal{D}_\chi(Y) \to Y$. Si $Y' \in \mathcal{C}$, il est immédiat de voir que le changement de base à $Y' \cap Y \hookrightarrow Y$ de π_Y est canoniquement isomorphe à $\pi_{Y \cap Y'}$. Comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_\chi(\mathcal{C})$ recouvrent respectivement Y et $\mathcal{D}_\chi(Y)$ de manière admissible, ceci définit par recollement un unique morphisme $\pi : \mathcal{D}_\chi \to Z_\chi$ ([BGR] 9.3.3. proposition 1). Par construction, il est fini ([BGR] 9.4.4), ce qui prouve i), et $\kappa := pr_1.\pi$ envoie $\mathcal{D}_\chi(Y)$ sur $pr_1(Y)$, de manière correspondante à l'inclusion $A(pr_1(Y)) \hookrightarrow \mathcal{H}(Y)$.

Soit $T \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, on définit $a(T)_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}$ pour tout Y dans $\mathcal{C}$ comme étant l'image de T dans $\mathcal{H}(Y)^0$ par l'application continue $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathcal{H}(Y)$ définie en 6.2.3. On vérifie immédiatement que si $Y' \in \mathcal{C}$, la restriction de $a(T)_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}$ à $\mathcal{D}_\chi(Y \cap Y')$ est exactement

$a(T)_{|\mathcal{D}_\chi(Y\cap Y')}$, ce qui définit une unique fonction analytique globale notée $a(T)$. On obtient ainsi une application $a : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{D}_\chi}(\mathcal{D}_\chi)^0$, envoyant T sur $a(T)$. C'est un morphisme continu de Λ-algèbres topologiques, car c'est le cas après restriction sur chaque $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$. Il suffit de vérifier l'assertion ii) sur les $\mathcal{D}_\chi(Y)$, sur lesquels elle découle de ce que $Y \subset \mathcal{W} \times (\mathbb{A}^1_{rig}\backslash\{0\})$. La propriété iv) est une conséquence de la proposition 6.2.4.

Soit $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$, par l'assertion iv) on peut trouver une forme propre $f_x \neq 0 \in \mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))$ ayant même système de valeurs propres que l'évaluation en x. Le théorème 6.2.9 nous fournit alors une famille de formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$, de pente $\alpha := v(\mathbf{U}_p(x))$, passant par f_x, qui est par construction (voir le dernier paragraphe de la preuve *loc.cit.*) de la forme $(pr_1(Y), \mathcal{D}_\chi(Y), a_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}, x)$ pour un $Y \in \mathcal{C}$ bien choisi. Ainsi, $\Omega := \mathcal{D}_\chi(Y)$ convient. □

Remarques :

- Soit Λ un anneau local noethérien complet sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ d'un corps local L, de corps résiduel celui de $\mathcal{O}_L$. Soient $\mathcal{W}$ l'espace rigide sur L qui lui est attaché comme dans [CM](1.1), M un module de Banach orthonormalisable sur $\mathcal{W}$, $\mathcal{H}$ une sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}^{cont}_\Lambda(M_\Lambda)$ contenant un endomorphisme compact. Alors si $\mathcal{W}$ est réduit, la construction de ce paragraphe se généralise entièrement et sans aucune modification à cette situation.
- La propriété iv) montre que toutes les variétés de Hecke locales, et en particulier celles du théorème 6.2.9, sont des ouverts admissibles de $\mathcal{D}_\chi$. Les propriétés i) à v) réalisent $\mathcal{D}_\chi$ comme "une famille p-adique passant par toutes les formes automorphes p-adiques de pente finie, et de type $(G, U_0(p), \chi)$", dans un sens légèrement étendu de la définition du §6.2.6. Cependant, nous ne savons pas si $\mathcal{D}_\chi$ a un nombre fini ou non de composantes connexes.
- L'espace rigide $\mathcal{D}_\chi$ est séparé, emboîté ("nested" dans la terminologie de [CM], §1.1), car Z_χ l'est et que π est fini.

Nous avons vu que $\mathbf{U}_p$ est une fonctions analytique inversible sur $\mathcal{D}_\chi$. On pose plus généralement pour $u^a \in U$,

$$\mathbf{U}_p^a := a(T(u^a))$$

Soient $i \in \{1, ..., n\}$, $u_i \in U$ comme en 4.8.1, alors $v_i := u^{(0,1,\dots,n-1)}/u_i \in U$. Si $i > 0$, la relation $T(u_i)T(v_i) = U_p$ implique que $a(T(u_i))$ est inversible sur $\mathcal{D}_\chi$. Il est de plus aisé de voir que $T(u_0)$ est inversible. Ceci nous permet de définir les fonctions :

$$\mathbf{F}_i := a(T(u_{n-i}))/a(T(u_{n-i+1})),\ \ i \in \{1, ..., n\}$$

Corollaire 6.3.7. *Soit $a = (a_1 \leq \cdots \leq a_n) \in \mathbb{Z}^n$, alors $\mathbf{U}_p^a = \prod_{i=1}^n \mathbf{F}_{n-i+1}^{a_i}$, c'est une fonction analytique inversible sur $\mathcal{D}_\chi$.*

6.4. **Quelques propriétés de $\mathcal{D}_\chi$.**

6.4.1. *Composantes irréductibles de $\mathcal{D}_\chi$.* L'étude des composantes irréductibles des espaces rigides a été amorcée dans [CM] (chapitre 1), et reprise en détail dans [Con2], auquel nous nous référerons. On rappelle qu'une composante irréductible d'un espace rigide X est par définition un fermé analytique réduit de X, image d'une composante connexe de la normalisation de X ([Con2] §2). Si X est un affinoide, ses composantes irréductibles sont les composantes irréductibles au sens usuel du terme, elles sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux de $A(X)$. L'espace X est dit irréductible s'il n'a qu'une composante irréductible. C'est un fait que X est recouvert sur les $\mathbb{C}_p$-points par ses composantes irréductibles (qui ne dépendent que de X^{red}) et qu'une composante irréductible est irréductible. Nous renvoyons à [CM] 1.3 et [Con2] 4 pour la description des composantes irréductible des hypersurfaces de Fredholm.

Proposition 6.4.2. *$\mathcal{D}_\chi$ est équidimensionnel de dimension n. Chacune de ses composantes irréductibles s'envoie par le morphisme fini π surjectivement sur une composante irréductible de Z_χ. Ces dernières sont toutes des hypersurfaces de Fredholm Λ-adiques.*

Preuve: Soient $Y \in \mathcal{C}$ et $V := pr_1(Y)$. L'algèbre affinoide $\mathcal{H}(Y)$ de $\mathcal{D}_\chi(Y) \subset \mathcal{D}_\chi$ est une sous-$A(V)$-algèbre commutative de $\mathrm{End}_{A(V)}(\mathcal{S}_\chi(V,1))$, avec les notations du paragraphe 6.2. Il est bien connu que $\mathcal{W}$, et donc V, est équidimensionnel de dimension n (par exemple, [Con2] 2.1.5. Voir aussi [BGR] 7.3.2-8 pour la comparaison "dimension rigide-dimension algébrique"). Le lemme 6.2.10 s'applique à $A(V) \subset A(V)[a(U_p)^{-1})] \subset \mathcal{H}(Y)$, et montre que V, $\mathrm{Specmax}(A(V)[a(U_p)^{-1}])$ et $\mathcal{D}_\chi(Y)$ ont même équidimension n. En particulier, 6.3.6 iv) assure que $\mathcal{D}_\chi$ et Z_χ sont équidimensionnels de dimension n.

Le lemme 6.4.3 montre que l'application canonique $A(Y) \to A(V)[a(U_p)^{-1}]$ induit un isomorphisme sur les nilréductions. Le lemme 6.2.10 entraîne donc que les morphismes π et pr_1 de la suite

$$\mathcal{D}_\chi(Y) \overset{\pi_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}}{\longrightarrow} Y \overset{pr_1}{\longrightarrow} V$$

envoient composantes irréductibles *sur* composantes irréductibles.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme fini entre espaces rigides, tout fermé analytique irréductible de X est envoyé sur un fermé analytique irréductible de Y (pour l'irréductibilité de ce dernier, utiliser [Con2] 2.2.3). Soit Σ une composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$, son image $\pi(\Sigma)$ dans Z_χ est donc un fermé analytique irréductible de Z_χ. Par [Con2] 2.2.9, pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $\Sigma \cap \mathcal{D}_\chi(Y)$ est soit vide, soit une réunion de composantes irréductibles de $\mathcal{D}_\chi(Y)$. Ceci et ce que l'on a vu dans le paragraphe précédent assure que Z_χ et $\pi(\Sigma)$ sont équidimensionnels de dimension n. Cela entraîne que $\pi(\Sigma)$ est une composante irréductible par [Con2] 2.2.7.

Par [CM] 1.3.11, ou [CM] 1.3.10 et [Con2] 4.3.2, $P_\chi(T)$ a une unique écriture

$$P_\chi(T) = \prod_i P_i(T)^{n_i}$$

où les $P_i(T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$ sont des séries de Fredholm premières, *i.e.* engendrant un idéal premier dans $\Lambda\{\{T\}\}$. Les composantes irréductibles de Z_χ sont alors les hypersurfaces de Fredholm découpées par les $P_i(T)$ (cf. *loc.cit.*), ce qui conclut. $\square$

Lemme 6.4.3. *Soient A un anneau commutatif, N un module projectif de type fini de rang r sur A, $u \in \mathrm{End}_A(N)$, P le polynôme caractéristique de u sur N, I l'idéal des $Q \in A[T]$ tels que $Q(u) = 0$, alors $I^r \subset (P) \subset I$.*

En particulier, si B désigne la sous-A-algèbre $A[u] \subset \mathrm{End}_A(N)$, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A[T]/(P))$ *est une nilimmersion.*

Preuve: La formation de P, $\mathrm{End}_A(N)$, B et de I commute à tout changement de base plat sur A, il suffit de prouver la première assertion après changement de base fidèlement plat. On peut donc supposer N libre de rang r sur A et identifier $\mathrm{End}_A(N)$ avec $\mathrm{M}_r(A)$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $(P) \subset I$. Soit $Q \in I$, considérons la factorisation $Q(X) - Q(Y) = (X - Y)f(X,Y) \in A[X,Y]$, pour un certain $f \in A[X,Y]$. Substituant u dans X, il vient $-Q(Y) = (u - Y)f(u,Y) \in \mathrm{M}_r(A[Y])$. En multipliant par la transposée de la comatrice de $u - Y$, notée $(m_{i,j}(Y))$, on a

$$-(m_{i,j}(Y))Q(Y) = P(Y)f(u,Y)$$

De là, on tire que $\forall i,j,\ P(Y) \mid m_{i,j}(Y)Q(Y)$. Soient $Q_1, ..., Q_r \in I$, il vient

$$P(Y)^r \mid \det(m_{i,j}(Y))Q_1(Y)\cdots Q_r(Y)$$

Mais $\det(m_{i,j}(Y)) = P(Y)^{r-1}$, et donc $P(Y) \mid Q_1(Y)\cdots Q_r(Y)$. □

Corollaire 6.4.4. *L'image par κ de chaque composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$ est un ouvert Zariski de $\mathcal{W}$.*

Preuve: Soit Σ une composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$. Le morphisme κ se factorise par π et π envoie Σ surjectivement sur une hypersurface de Fredholm Λ-adique par 6.4.2. Ainsi, $\kappa(\Sigma)$ est l'image par la projection pr_1 d'une hypersurface de Fredholm Z_P découpée par $P(T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$, $Z_P \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$. Si $P(T) = 1 + a_1T + a_2T^2 + \cdots \in \Lambda\{\{T\}\}$, les points $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ qui ne sont pas dans $pr_1(Z_P)$ sont exactement ceux tels que $\forall i \geq 1,\ a_i(x) = 0$. On en déduit que $pr_1(Z_P)$ est l'ouvert Zariski complémentaire du fermé défini par l'annulation des a_i. □

6.4.5. *Zariski-densité des points classiques.*

Définitions : Un point $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ sera dit *classique*, si $\kappa(x) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ et si le système de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ associé à x par le théorème 6.3.6 v) est celui d'une forme propre classique $f_x \in \mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))^{cl}$.

Un point classique $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ sera dit *ancien en p* s'il on peut de plus choisir la forme f_x de façon à ce que la forme automorphe complexe associée en §4.2 engendre sous $G(\mathbb{Q}_p)$ une représentation ayant un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-invariant non nul.

On a vu que si $\kappa(x) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Min}(\kappa(x)) > v(\mathbf{U}_p(x)) - 1$, alors x est automatiquement classique, un tel point sera dit *très classique*. De manière générale, un point sera dit *très classique pour $\mathbf{U}_p^a$* si il est associée à une forme très classique pour U_p^a (cf. §4.7.3).

Un sous-ensemble Z des $\mathbb{C}_p$-points d'un espace rigide X sera dit rigide-Zariski-dense, ou plus simplement *Zariski-dense*, si tout fermé analytique F de X tel que $Z \subset F(\mathbb{C}_p)$ est tel que $F(\mathbb{C}_p) = X(\mathbb{C}_p)$. En particulier, Z est Zariski-dense dans X si et seulement si il l'est dans X^{red}, ou encore si et seulement si son intersection avec chaque composante irréductible est Zariski-dense dans cette dernière (un sens est trivial sachant que X est recouvert par ses composantes irréductibles, pour l'autre utiliser [Con2] 2.2.8). Si X est réduit et si Z est Zariski-dense dans X, toute fonction $f \in \mathcal{O}_X^{rig}(X)$ s'annulant en tout $z \in Z$ est nulle. Si X est irréductible, par [Con2] 2.2.3, les $\mathbb{C}_p$-points de tout ouvert affinoide de X sont Zariski-denses. Enfin, un exemple trivial mais important est que $\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z} \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}$.

Proposition 6.4.6. *Les points très classiques de chaque composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$ y sont Zariski-dense. En particulier, toute composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$ contient une infinité de points très classiques.*

Preuve: Soit Σ une composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$. Par le corollaire 6.4.4, $\kappa(\Sigma)$ est le complémentaire d'un fermé strict de $\mathcal{W}$. Comme $\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}$, $\kappa(\Sigma)$ contient au moins un $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$. Soit $x \in \Sigma(\mathbb{C}_p)$ tel que $\kappa(x) = t$, $\alpha := v(\mathbf{U}_p(x))$. On peut par exemple considérer la famille de formes automorphes p-adiques de pente α passant par x du théorème 6.2.9, qui est par construction paramétrée par un affinoide de la forme $\mathcal{D}_\chi(Y) \subset \mathcal{D}_\chi$, $Y \in \mathcal{C}$. Par [Con2] 2.2.9, $\Sigma \cap \mathcal{D}_\chi(Y)$ est une réunion non vide (car $x \in \Sigma(\mathbb{C}_p)$) de composantes irréductibles de $\mathcal{D}_\chi(Y)$. La proposition 6.2.7 conclut, en rappelant que les $\mathbb{C}_p$-points de tout ouvert affinoide d'un espace rigide irréductible sont Zariski-denses. $\square$

Proposition 6.4.7. *Soit $p > 2$, l'ensemble des points très classiques de $\mathcal{D}_\chi$ qui sont anciens en p est Zariski-dense.*

Preuve: Remarquons tout d'abord que pour tout p, $\{t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z},\ \chi\tau_t = 1\}$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}$. On fixe un tel t, ainsi que $C \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}$. L'ensemble

$$\mathcal{X}_{t,C,N} = \{t' = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z},\ \forall i,\ m_i > C,\ \chi\tau_{t'} = 1 \text{ et } t' \equiv t \bmod p^N\mathbb{Z}^n\}$$

est Zariski-dense dans le polydisque fermé de centre t et de rayon p^{-N} dans $\mathcal{W}$. Comme le montre la preuve des propositions 6.4.6 et 6.2.7, il suffit, pour prouver la proposition 6.4.7, de montrer que si $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$, paramètre une famille de pente finie contenant un point classique de poids t tel que $\chi\tau_t = 1$, alors tous ses points de poids dans $\mathcal{X}_{t,C,N}$ sont anciens en p si $C > 0$ et N sont assez grands. On fixe donc un tel $Y \in \mathcal{C}$.

On fixe un entier N assez grand de façon à ce que $\kappa(Y)$ contienne une boule de centre dans $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, de rayon p^{-N}. Soient $C > 0$ et $x \in \mathcal{D}_\chi(Y)(\mathbb{C}_p)$ tel que $\kappa(x) \in \mathcal{X}_{t,C,N}$. Le système de valeurs propres de $\mathcal{H}$ associé à x par 6.3.6 est alors celui d'une forme propre $f_x \in S_{t,1}(G, U_0(p))$, par l'hypothèse $\chi\tau_{\kappa(x)} = 1$ (cf. §4.4). Soit π_p un constituent irréductible de la représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ engendrée par la forme automorphe complexe associée à f_x comme en 4.2. La représentation π_p admet des invariants sous l'Iwahori I (cf. 4.8), car $I = \Gamma_0(p)$ si $p > 2$. Par un théorème de Casselman (cf. [Cas] prop. 2.6), π_p est un sous-quotient d'un $\mathrm{Ind}(\chi)$ (cf. 4.8.3) pour certains caractères complexes, lisses, non ramifiés, χ_1,...,χ_n de $\mathbb{Q}_p^*$. Par construction, π_p a de plus un I-invariant sur lequel la sous-algèbre de $H(G, I)$ formée des opérateurs $[IuI]$, $u \in U$, agit par un caractère qui est le même que celui déterminant l'action de cette dernière sur f_x. Par le lemme 4.8.4 et la remarque qui le suit, ce caractère est de la forme χ_w, et s'il on pose $\kappa(x) = (m_1, ..., m_n)$,

$$\mathbf{F}_i(x) = \iota_p(\nu_{\kappa(x)}\chi_w(F_i)) = \iota_p(p^{(n-1)/2}\chi_{w(i)}(p))/p^{i-1+m_n+m_{n-1}+....+m_{n-i+1}}$$

D'après [BZ] théorème 4.2, la représentation $\mathrm{Ind}(\chi)$ est irréductible si

$$\forall i \neq j,\ \chi_i(p) \neq \chi_j(p)p$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\forall i < j,\ p^{j-i+m_{n-j+1}+...+m_{n-i+1}\pm 1} \neq \mathbf{F}_i(x)/\mathbf{F}_j(x) \tag{15}$$

Si $\mathrm{Ind}(\chi)$ est irréductible, elle est égale à π_p. En particulier, ce dernier a un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-invariant et x est ancien en p. Il n'y a donc qu'à s'assurer que l'on peut trouver $C > 0$ tel que pour tous les points de $\mathcal{D}_\chi(Y)$ de poids dans $\mathcal{X}_{t,C,N}$, la condition ci-dessus est vérifiée.

Par le principe du maximum, les fonctions $\mathbf{F}_i$ sont bornées et atteignent leurs bornes sur $\mathcal{D}_\chi(Y)$, on peut donc trouver $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathcal{D}_\chi(Y)(\mathbb{C}_p)$ et $\forall i \in \{1, ..., n\}$,

$$0 < u < |\mathbf{F}_i(x)| < v$$

Alors, $\forall x \in \mathcal{D}_\chi(Y)(\mathbb{C}_p)$, $\forall i, j$:

$$uv^{-1} < |\mathbf{F}_i(x)/\mathbf{F}_j(x)|$$

Ainsi, tout $C > -\frac{\log(uv^{-1})}{\log(p)}$ convient. □

Remarque : Il nous semble très probable que le résultat soit encore vrai pour $p = 2$.

6.4.8. *Diverses composantes.* Soit e un idempotent de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, on peut lui associer l'ouvert fermé $\mathcal{D}_{\chi,e}$ de $\mathcal{D}_\chi$ défini par $a_e = 1$. En particulier, la décomposition $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} = \prod_{i=1}^r e_{\chi,i}\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ en produit de Λ-algèbres locales du §4.5.3 nous fournit une partition de $\mathcal{D}_\chi$ en un nombre fini d'ouverts fermés rigides

$$\mathcal{D}_\chi = \coprod_{i=1}^r \mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}$$

Si $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$, on notera $\overline{x} : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ la composition du morphisme d'évaluation en x par la surjection canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. On pose $\Psi_{\chi,i} : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ le morphisme d'anneau valant 1 sur $e_{\chi,j}$ si, et seulement si, $i = j$.

Proposition 6.4.9. *L'application $x \mapsto \overline{x}$ est constante, égale à $\Psi_{\chi,i}$, sur chaque $\mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}$.*

Preuve: Si $i \neq j$, $a_{e_{\chi,j}}$ est nulle sur $\mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}$, car $e_{\chi,i}e_{\chi,j} = 0$. Si $x \in \mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}(\mathbb{C}_p)$, $\overline{x}$ est donc nul sur tous les $e_{\chi,j}$ tels que $j \neq i$, c'est donc $\Psi_{\chi,i}$. □

Définition : Le *lieu ordinaire de* $\mathcal{D}_\chi$ est l'ouvert fermé $\mathcal{D}_\chi^{\mathrm{ord}} := \mathcal{D}_{\chi,e_\chi^{\mathrm{ord}}}$ (cf. 6.1). Dans la traduction du théorème 6.3.6, ses $\mathbb{C}_p$-points paramètrent exactement les systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ sur les formes automorphes p-adiques propres sur lesquelles U_p agisse par une unité p-adique, ou encore (de manière équivalente) sur lesquelles tous les F_i agissent par une unité p-adique.

Proposition 6.4.10. *$\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{D}_\chi}(\mathcal{D}^{\mathrm{ord}}_\chi)$ se factorise par $\mathcal{H}^{\mathrm{ord}}_{\chi,\Lambda}$, le morphisme $\pi : \mathcal{D}^{ord}_\chi \to \mathcal{W}$ est fini et provient par extension des scalaires du morphisme fini*

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{H}^{ord}_{\chi,\Lambda}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\Lambda)$$

Preuve: La première assertion est immédiate, prouvons la seconde. Soit Z^{ord}_χ l'ouvert admissible de Z_χ défini par $pr_2^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{A}^1_{rig}, |\lambda| = 1\})$, c'est aussi un fermé de Z_χ car sa nilréduction est l'image de $(\mathcal{D}^{\mathrm{ord}}_\chi)^{\mathrm{red}}$ par le morphisme fini π. Soit $r \in p^{\mathbb{Q}} \cap [1, |\pi/\mathbf{p}|[$, le morphisme canonique

$$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow \mathcal{S}_\chi(\mathcal{W}_r)(G, U_0(p)) \tag{16}$$

s'identifie, via le choix d'une base orthonormée de $A(\mathcal{F})_\chi(G, U_0(p))$ auquel $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ est associé (cf. 4.4), à l'application canonique $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda) \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A(\mathcal{W}_r))$. Le lemme 6.4.11 assure donc que (16) est injective d'image dense. Après application de l'idempotent continu e^{ord}_χ à (16), il vient que

$$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))^{\mathrm{ord}} \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow e^{ord}_\chi(\mathcal{S}_\chi(\mathcal{W}_r)(G, U_0(p))) \tag{17}$$

est encore injective d'image dense. Cela implique que (17) est un isomorphisme, car son image est de rang fini sur $A(\mathcal{W}_r)$ par 6.1.2, et qu'elle est donc fermée par [B2] lemme 2.3. On en déduit facilement que Z^{ord}_χ est l'hypersurface de Fredholm associée au polynôme $\det(1 - TU_{p|\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))^{\mathrm{ord}}})$. En particulier, $pr_1 : Z^{\mathrm{ord}}_\chi \to \mathcal{W}$ est fini et plat. Cela montre la seconde assertion. La dernière vient de ce que (17) est un isomorphisme, et de la platitude de $\Lambda \to A(\mathcal{W}_r)$ (cf. [ST2] proposition 4.7 avec $G = (\mathbb{Z}_p)^n$). $\square$

Lemme 6.4.11. *L'application canonique $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda) \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A(\mathcal{W}_r))$ est injective, d'image dense.*

Preuve: La densité de l'image est claire, montrons l'injectivité. Il suffit de voir que si M est un sous-Λ-module de type fini de $A(\mathcal{W}_r)$, muni de la topologie induite, alors l'application canonique

$$\varphi_M : \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda) \otimes_\Lambda M \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, M)$$

est injective, où $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, M)$ est le Λ-module des suites d'éléments de M tendant vers 0. Rappelons que Λ étant compact séparé, toute application Λ-linéaire entre deux Λ-modules topologiques de type fini est continue. On en déduit aisément que φ_M est un isomorphisme si M est libre de rang fini, puis qu'il est injectif si M est de type fini quelconque au moyen d'une présentation finie $\Lambda^n \to \Lambda^m \to M \to 0$. $\square$

7. Représentations et pseudo-caractères galoisiens

7.1. **Prolongement des pseudo-caractères.** Soient $X/\mathbb{C}_p$ un espace rigide réduit, $\mathcal{H}'$ un sous-anneau compact de $\mathcal{O}^{rig}_X(X)$. La topologie sur $\mathcal{O}^{rig}_X(X)$ est la moins fine pour laquelle les restrictions $\mathcal{O}^{rig}_X(X) \to \mathcal{O}^{rig}_X(\Omega)$, Ω ouvert affinoide de X, sont continues. Soient Γ un groupe topologique, S' un ensemble, $(F_v)_{v \in S'}$ une famille d'éléments de

Γ, et $(a_v)_{v\in S'}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}'$. On suppose que la réunion des classes de conjugaison des F_v, $v \in S'$, est dense dans Γ. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, faisons l'hypothèse suivante :

(H) Il existe $Z \subset X(\mathbb{C}_p)$ Zariski-dense et des représentations continues

$$\rho(z) : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p), \;\; z \in Z,$$

$$\text{tels que pour tout } v \in S', \;\; \mathrm{tr}(\rho(z)(F_v)) = a_v(z)$$

En particulier pour chaque $z \in Z$, $T_z := \mathrm{tr}(\rho(z)(.)) : \Gamma \to \mathbb{C}_p$ est un pseudo-caractère de dimension n de Γ dans $\mathbb{C}_p$. Pour les généralités sur ces pseudo-caractères, on se référera à [Rou]. Soient $T : \Gamma \to A$ une fonction (resp. un pseudo-caractère) de Γ à valeurs dans un anneau A, $x \in \mathrm{Spec}(A)$, on appellera *évaluation en x de T* la fonction (resp. le pseudo-caractère) $T_x : \Gamma \to A/x$ déduite de T par composition avec $A \to A/x$.

Proposition 7.1.1. *Sous l'hypothèse (H), il existe un unique pseudo-caractère continu de Γ dans $\mathcal{H}'$, de dimension n, dont l'évaluation en tout $z \in Z$ coïncide avec T_z. De plus, $T(1) = n$.*

Preuve: Soit le morphisme d'anneaux

$$\psi : \mathcal{H}' \longrightarrow \prod_{z\in Z} \mathbb{C}_p, \;\; f \mapsto (f(z))_{z\in Z}$$

On munit $\prod_{z\in Z}\mathbb{C}_p$ de la topologie produit, ψ est alors continue par définition de la topologie sur $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$. Par Zariski-densité de Z dans l'espace réduit X, ψ est injective. Comme $\prod_{z\in Z}\mathbb{C}_p$ est séparé et que $\mathcal{H}'$ est compact, ψ induit un homéomorphisme sur son image, et cette dernière est fermée.

Considérons l'application

$$\varphi : \Gamma \to \prod_{z\in Z} \mathbb{C}_p, \;\; g \mapsto (T_z(g))_{z\in Z}$$

Cette application est continue car les T_z le sont. Ses valeurs sur le sous-ensemble de Γ réunion des classes de conjugaison des F_v, $v \in S'$, sont dans $\psi(\mathcal{H}')$ par hypothèse. La densité ce sous-ensemble dans Γ et le fait que $\psi(\mathcal{H}')$ est fermé assurent alors que $\varphi(\Gamma) \subset \psi(\mathcal{H}')$. L'application continue $T := \psi^{-1}\varphi$, $\Gamma \to \mathcal{H}'$, est donc l'unique application continue dont les évaluations sur Z sont les T_z.

L'application ψ étant un morphisme injectif d'anneaux, T est un pseudo-caractère de dimension n si, et seulement si, ψ en est un. Mais ce dernier est la trace d'une représentation dans $\mathrm{GL}_n(\prod_{z\in Z}\mathbb{C}_p)$ par définition, ce qui conclut. □

7.2. **Représentation attachée à un pseudo-caractère absolument irréductible.**

7.2.1. *Lieu d'irréductibilité d'un pseudo-caractère.* Soient X un espace rigide, Γ un groupe topologique, et $T : \Gamma \to \mathcal{O}_X^{rig}(X)$ un pseudo-caractère continu de dimension n tel que $T(1) = n$. Soit $x \in X(\mathbb{C}_p)$, $T_x : \Gamma \to \mathbb{C}_p$ est un pseudo-caractère continu. Un résultat de R.Taylor ([Tay]) implique que c'est la trace d'une unique représentation semi-simple $\rho(x)$ de Γ sur $\mathbb{C}_p$.

Lemme 7.2.2. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique* 0*, Γ un groupe, $T:\Gamma \to k$ un pseudo-caractère de dimension n, $\rho:\Gamma\to \mathrm{GL}_n(k)$ une représentation semi-simple de Γ de trace T, les conditions suivantes sont équivalentes :*

– *i) T est absolument irréductible (*[Rou] *§4),*
– *ii) ρ est irréductible,*
– *iii) $\rho(k[\Gamma]) = \mathrm{M}_n(k)$,*
– *iv) Il existe $g_1,...,g_{n^2}\in\Gamma$, tels que $(T(g_ig_j))_{1\leq i,j\leq n^2}\in \mathrm{GL}_{n^2}(k)$*

Preuve: L'équivalence de $iii)$ et $iv)$ vient de ce que la trace est une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathrm{M}_n(k)$, et donc qu'une famille $m_1,...,m_{n^2}\in \mathrm{M}_n(k)$ est une base de $\mathrm{M}_n(k)$ si et seulement si $\det((tr(m_im_j))_{1\leq i,j\leq n^2})\neq 0$. L'équivalence de $ii)$ et $iii)$ est un théorème de Burnside, et $i)\Rightarrow ii)$ est triviale. On rappelle que la condition $i)$ est par définition : pour toute extension L algébriquement close de k, T ne s'écrit pas T_1+T_2, avec T_1,T_2 des pseudo-caractères $\Gamma\to L$. Par manque de référence, détaillons $ii)\Rightarrow i)$. Soit L une extension algébriquement close de k telle que $T=T_1+...+T_s$, les T_i étant des pseudo-caractères absolument irréductibles de dimension n_i au sens de Rouquier. Chaque T_i, ainsi que T, est la trace d'une unique représentation semi-simple de Γ, et $\rho\otimes L$ est donc somme de s représentations (en fait irréductibles par [Rou] 4.4). Or $\rho\otimes L$ est encore irréductible (car $iii)\Leftrightarrow ii)$) et $s=1$. $\square$

En vertu du lemme précédent, on définit le lieu de réductibilité de T comme le fermé rigide-Zariski Z de X défini par l'annulation de tous les $\det((T(g_ig_j))_{1\leq i,j\leq n^2})$, $(g_i)_{1\leq i\leq n^2}$ parcourant les familles de n^2 éléments de Γ. Si $x\in X(\mathbb{C}_p)$, $x\notin Z(\mathbb{C}_p)$ si et seulement si T_x est absolument irréductible. L'ouvert complémentaire $X\backslash Z =: X_{\mathrm{irr}}$ est un espace rigide pour la structure induite de X que l'on appellera *lieu d'irréductibilité* de T. Nous allons montrer que sur X_{irr}, T est le pseudo-caractère attaché à une représentation de Γ dans les inversibles d'une algèbre d'Azumaya sur X_{irr}.

7.2.3. *Algèbres d'Azumaya et représentations.* Une algèbre d'Azumaya sur un espace rigide X est une $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbre $\mathcal{A}$, cohérente comme $\mathcal{O}_X^{rig}$-module ([BGR] 9.4.3), et telle que sur tout ouvert affinoide Ω, $\mathcal{A}(\Omega)$ est une $\mathcal{O}^{rig}(\Omega)$-algèbre d'Azumaya au sens classique du terme. Il est équivalent à demander que $\mathcal{A}$ soit une $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbre localement libre de rang fini qui est centrale simple sur les corps résiduels des points fermés, ce qui montre que la condition d'être d'Azumaya est locale pour la topologie rigide. Si $\mathcal{A}$ est d'Azumaya sur X, on peut définir sa trace réduite $\mathrm{Trd}:\mathcal{A}\to\mathcal{O}_X^{rig}$, qui est un morphisme de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules. En effet, on peut la définir sur chaque ouvert affinoide V par la trace réduite $\mathcal{A}(V)\to\mathcal{O}_X^{rig}(V)$, et on a la compatibilité à la restriction car la formation de la trace commute à l'extension des scalaires (ici, $\mathcal{O}_X^{rig}(V)\to\mathcal{O}_X^{rig}(W)$ si $W\subset V$ est ouvert affinoide).

Lemme 7.2.4. *Soit X un affinoide, $T:\Gamma\to A(X)$ un pseudo-caractère continu de dimension n tel que $T(1)=n$. On suppose que $\forall x\in X(\mathbb{C}_p)$, T_x est absolument irréductible.*

Alors il existe une unique représentation surjective de $A(X)[\Gamma]$ dans une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ de rang n^2 sur $A(X)$, de trace réduite T. Sa restriction à Γ est une représentation continue de Γ dans les inversibles de $\mathcal{A}$.

Preuve: Le théorème 5.1 de [Rou] affirme que si un pseudo-caractère $T : \Gamma \to A(X)$ est tel que pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, T_x est absolument irréductible de dimension $n = \dim(T)$, alors T est la trace réduite d'une vraie représentation de $A(X)[\Gamma]$ à valeurs dans une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ de rang n^2 sur $A(X)$, d'image engendrant $\mathcal{A}$ sur $A(X)$. Ceci nous fournit l'existence de la représentation. L'unicité découle du corollaire 5.3 de [Rou]. On note $\rho : \Gamma \to \mathcal{A}$ la représentation de Γ ainsi construite, prouvons sa continuité.

Soient $g_1, ..., g_s \in \Gamma$ tels que $\rho(g_1), ..., \rho(g_s)$ engendrent $\mathcal{A}$ comme $A(X)$-module, on considère

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow A(X)^s, \text{ défini par } v \longrightarrow (\mathrm{Trd}(\rho(g_1)v), ..., \mathrm{Trd}(\rho(g_s)v)),$$

alors φ est une injection $A(X)$-linéaire car la trace réduite est non dégénérée sur une algèbre d'Azumaya. On munit $\mathcal{A}$ de son unique topologie de module de Banach de type fini sur $A(X)$, de même pour $A(X)^s$. L'injection $A(X)$-linéaire φ est alors un homéomorphisme sur son image, qui est fermée dans $A(X)^s$ ([BGR] 3.7.3). Comme $\mathrm{Trd}(\rho(g)) = T(g)$, on en déduit que T est continue si, et seulement si, ρ l'est, vue comme application de Γ dans $\mathcal{A}$. Ainsi, $\rho : \Gamma \to \mathcal{A}$ est continue.

La topologie sur $\mathcal{A}^*$ est celle induite par son plongement dans le fermé de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ défini par $xy = 1$. L'application $\rho : \Gamma \to \mathcal{A}^*$ est donc continue si, et seulement si, les deux applications $\Gamma \longrightarrow \mathcal{A}$, $g \mapsto \rho(g)$ et $g \mapsto \rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$ le sont. Mais la première est continue comme on l'a vu, et la seconde est la composition de l'inversion de Γ par la première, ce qui conclut. $\square$

Soit $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, la $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbre du groupe Γ, définie sur les ouverts admissibles Ω par $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma](\Omega) := \mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)[\Gamma]$. En tant que $\mathcal{O}_X^{rig}$-module, $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$ est une somme directe indexée par Γ de copies du faisceau structural $\mathcal{O}_X^{rig}$. Sa formation commute à la restriction à un ouvert admissible Ω : l'application canonique $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]_{|\Omega} \to \mathcal{O}_\Omega^{rig}[\Gamma]$ est un isomorphisme. Si Ω est un ouvert affinoide, $\mathcal{O}_\Omega^{rig}[\Gamma]$ est le $\mathcal{O}_\Omega^{rig}$-module associé au $A(\Omega)$-module $A(\Omega)[\Gamma]$, au sens de [BGR] 9.4.2. On notera $\underline{\Gamma}$ le faisceau de groupes topologiques Γ constant sur X. On a une injection canonique $\underline{\Gamma} \to \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$.

Si $\mathcal{B}$ est un faisceau en $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbres, un pseudo-caractère $T : \mathcal{B} \to \mathcal{O}_X^{rig}$ de dimension n est un morphisme de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules tel que pour pour tout ouvert admissible Ω, T_Ω : $\mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ est un pseudo-caractère de dimension n de la $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$-algèbre $\mathcal{B}(\Omega)$ au sens classique du terme. Si $\mathcal{B} = \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, la restriction de T à $\underline{\Gamma}$ le détermine entièrement, cette dernière étant à son tour uniquement déterminée par ses sections globales T_X : $\Gamma \to \mathcal{O}_X^{rig}(X)$. La fonction T_X est alors un pseudo-caractère à valeurs dans $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$ si, et seulement si, T est un pseudo-caractère au sens ci-dessus. Si $x \in X(\mathbb{C}_p)$, on notera $T_x : \Gamma \to \mathbb{C}_p$ l'évaluation de T_X en x. On définit un sous-faisceau $\ker(T)$ en idéaux bilatères de $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, sur les ouverts admissibles Ω de X, par :

$$\ker(T)(\Omega) := \{m \in \mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)[\Gamma],\ \forall g \in \Gamma, T(gm) = 0\}$$

Proposition 7.2.5. *Soient X un espace rigide et $T : \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma] \to \mathcal{O}_X^{rig}$ un pseudo-caractère de dimension n tel que $T(1) = n$. On suppose que pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, T_x est un pseudo-caractère absolument irréductible.*

Alors $\mathcal{A} := \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]/\ker(T)$ *est une algèbre d'Azumaya sur* X *de rang* n^2 *et de trace réduite* T*. La représentation déduite* $\underline{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{A}^*$ *est continue, de trace réduite* T*.*

Preuve: Il s'agit de globaliser [Rou] 5.1. La condition d'être d'Azumaya étant locale sur X, ainsi que la formation de $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, $\ker(T)$, et du faisceau quotient, on peut supposer que X est affinoide. Par le lemme 7.2.4, T_X est alors le pseudo-caractère associé à une représentation $A(X)$-linéaire surjective $\rho : A(X)[\Gamma] \to \mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'$ étant d'Azumaya sur $A(X)$ et T coïncidant avec la trace réduite de $\mathcal{A}'$.

Soient $g_1, ..., g_r \in \Gamma$ engendrant $\mathcal{A}'$ sur $A(X)$, considérons les $\mathcal{O}_X^{rig}$-morphismes $T_1, ..., T_r$ de $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$ vers $\mathcal{O}_X^{rig}$, définis sur les ouverts admissibles Ω de X par

$$T_i(f) := T(g_i f), f \in A(\Omega)[\Gamma]$$

Soient $K_i := \ker(T_i)$ le faisceau noyau de T_i et $K := \cap_{i=1}^r K_i$. Par [BGR] 9.4.2 (proposition 2 et corollaire 3), K et les K_i sont respectivement les faisceaux sur X associés aux $A(X)$-modules $K(X)$ et $K_i(X)$. Soit Ω un ouvert affinoide de X, la surjection $A(X)[\Gamma] \to \mathcal{A}'$ induit une surjection $A(\Omega)[\Gamma] \to \mathcal{A}' \otimes_{A(X)} A(\Omega)$, et $\mathcal{A}' \otimes_{A(X)} A(\Omega)$ est d'Azumaya sur $A(\Omega)$, de trace réduite coïncidant avec $T(\Omega)$. En particulier l'image des g_i engendre $\mathcal{A}' \otimes_{A(X)} A(\Omega)$ sur $A(\Omega)$ et la non dégénérescence de la trace réduite sur cette dernière implique que l'application canonique $\ker(T)(\Omega) \to K(\Omega)$ est un isomorphisme. En particulier, $\ker(T)$ est le faisceau associé à $K(X)$, et [BGR] 9.4.2.2.iii) implique que $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]/\ker(T)$ est le faisceau associé à $A(X)[\Gamma]/(\ker(T)(X))$. Comme cette dernière $A(X)$-algèbre coïncide avec $\mathcal{A}'$, cela conclut la première assertion de la proposition.

Soit $\rho : \underline{\Gamma} \to \mathcal{A}^*$, le morphisme canonique déduit de $\underline{\Gamma} \to \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, il reste à voir qu'il est continu. Ceci se vérifie sur les sections sur les ouverts affinoides de X, on est donc ramené à le vérifier sur les sections globales quand X est affinoide, cas qui découle du lemme 7.2.4. $\square$

Corollaire 7.2.6. *Soient* X *un espace rigide,* $T : \Gamma \to \mathcal{O}_X^{rig}$ *un pseudo-caractère continu,* X_{irr} *le lieu d'irréductibilité de* X*. Alors il existe une algèbre d'Azumaya* $\mathcal{A}$ *sur* X_{irr} *qui est une représentation continue surjective de* $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{irr}}}^{rig}[\Gamma] \to \mathcal{A}$ *de trace réduite* T*. Elle induit une représentation continue de* $\underline{\Gamma} \to \mathcal{A}^*$*.*

7.3. **Certains groupes unitaires.**

On considère un groupe unitaire G comme en §4.1. Nous devrons faire quelques restrictions sur G pour assurer l'existence, selon les résultats actuels, de représentations galoisiennes attachées à ses formes automorphes. Rappelons que G est le groupe unitaire d'une algèbre centrale simple D de dimension n^2 de centre une extension quadratique imaginaire E de $\mathbb{Q}$ munie d'une involution de seconde espèce, cette dernière étant de type $(n, 0)$ à l'infini. L'extension des scalaires à E de G est le groupe D^*/E des inversibles de D, qui est une forme intérieure de GL_n/E. On fera les hypothèses suivantes :

– D n'est ramifiée sur E qu'en des places décomposées sur $\mathbb{Q}$, où elle est de surcroît une algèbre à division,
– il existe au moins un telle place.

Théorème 7.3.1. *(Labesse-Clozel) Soit π une représentation automorphe irréductible de $G(\mathbb{A})$, alors il existe une représentation automorphe irréductible* $\mathrm{BC}(\pi)$ *de $D^*(\mathbb{A}_E)$, qui est un changement de base faible de π.*

Ce résultat est une conséquence de [C-L] Appendice A, théorème 5.2, notant que la condition d'être cohomologique à l'infini est satisfaite en degré 0 par l'hypothèse "$G(\mathbb{R})$ compact", et que l'on est dans leur hypothèse (b). On entend par changement de base faible une représentation automorphe qui coïncide en toutes les places où E, D et π sont non ramifiés avec le changement de base local non ramifié. Le plongement distingué $E \subset \mathbb{C}$ défini en 4.1 nous permet de voir π_∞ comme la restriction à $G(\mathbb{R})$ d'une représentation de tout $G(\mathbb{C})$. On notera $\pi_\infty^{\mathbb{C}}$ la représentation de dimension finie $\pi_\infty \otimes \pi_\infty^*$ de $G(\mathbb{C})$. Il est démontré *loc.cit.* que $\mathrm{BC}(\pi)_\infty$ a de la cohomologie dans $(\pi_\infty^{\mathbb{C}})^*$.

On passe de D^*/E à sa forme intérieure déployée GL_n/E par la correspondance de Jacquet-Langlands globale. Cette correspondance est due à Vignéras (cf. [H-T] chapitre VI.1), on en énonce une version un peu affaiblie ci-dessous. Elle utilise l'hypothèse que l'algèbre à division est supposée déployée aux places où elle n'est pas une algèbre à division :

Théorème 7.3.2. *(Vignéras) Soit π une représentation automorphe irréductible de $D^*(\mathbb{A}_E)$, alors il existe une unique représentation automorphe irréductible* $\mathrm{JL}(\pi)$ *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$*, intervenant dans le spectre discret, isomorphe à π aux places où D est non ramifiée.*

Enfin, on obtient les représentations galoisiennes par le résultat suivant, dont les premières versions sont dues à Clozel dans [Cl], se basant sur les résultats de Kottwitz, puis amélioré par Harris-Taylor dans [H-T].

Théorème 7.3.3. *(*[H-T] *théorème VII.1.9) Soit π une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$*, irréductible, telle que :*
- $\pi^* \simeq \pi^c$,
- *π_∞ a le même caractère infinitésimal qu'une représentation algébrique complexe de la restriction des scalaires de E à $\mathbb{Q}$ de* GL_n*,*
- *à une place finie v de L, π_v est de carré intégrable.*

Alors il existe un unique système compatible de représentations semi-simples λ-adiques

$$R_\lambda(\pi) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l}),$$

découpées dans la cohomologie l-adique d'une variété algébrique propre et lisse, telles que :

- *$R_\lambda(\pi)$ est non ramifiée en toutes les places finies v de E, $v \neq \lambda$, où π_v est non ramifiée, et correspond en ces même places, par la correspondance de Langlands locale non ramifiée, à $\pi_v \otimes |\det(.)|^{(1-n)/2}$,*
- *$R_\lambda(\pi)$ est potentiellement semi-stable en toutes les places v de E divisant l, et cristalline en ces places si π_v est non ramifiée,*
- $(R_\lambda(\pi)^c)^* \simeq (R_\lambda(\pi))(n-1)$

Pour une représentation ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ ou de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, nous entendons par ρ^c la représentation sur l'espace de ρ définie par

$$g \mapsto \rho(\tau(g)),$$

où τ désigne la conjugaison complexe. Nous faisons agir τ sur $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ par conjugaison, et sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ par son action naturelle sur $\mathbb{A}_E$. Nous normalisons la correspondance de Langlands en faisant correspondre Frobenius géométriques et uniformisantes dans la théorie du corps de classe locale (cf. [H-T] p.2). Le caractère cyclotomique est noté $\mathbb{Q}_p(1)$, la convention que l'on adopte pour son poids de Hodge-Tate est -1. On fixe pour chaque place v, un élément de Frobenius géométrique $F_v \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$.

On considère l'ensemble fini S des places finies v de E divisant p, ou divisant une place v' de $\mathbb{Q}$ en laquelle soit G est ramifié, soit il est non ramifié mais $U_0(p)_{v'}$ n'est pas maximal de type hyperspécial dans $G(\mathbb{Q}_{v'})$ (cf. [Ti] §1.10,3.2). On fixe une algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ (cf. 4.5.3) contenant l'algèbre de Hecke globale hors de S de $(G(\mathbb{A}_f), U_0(p))$. On note S' l'ensemble des places finies de E non dans S, et $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S$ le groupe de Galois de la plus grande sous-extension de $\overline{E}/E$ non ramifiée hors de S. On rappelle de plus que nous avons fixé en 4.1 une place décomposée w de E divisant p. On note D_w un groupe de décomposition en w de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S$.

Soit $v \in S'$ divisant $l \in \mathbb{Z}$ et décomposé dans E, la donnée de v nous permet d'identifier $G(\mathbb{Q}_l)$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_l) = \mathrm{GL}_n(E_v)$, et de considérer l'opérateur de Hecke $T_v \in \mathcal{H}$ donné par la double classe :

$$[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1,1,..,1,l)\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_l)]$$

De même, si $v \in S'$ divise un premier $l \in \mathbb{Z}$ inerte dans E, il existe un opérateur de Hecke T_v ayant la propriété suivante : pour toute représentation non ramifiée π_v de $G(\mathbb{Q}_l)$, la valeur propre de T_v sur la droite non ramifiée $\pi_v^{U_0(p)_v}$ est la même que celle de

$$[\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{E_v})\mathrm{diag}(1,1,..,1,l)\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{E_v})]$$

sur la droite non ramifiée $\mathrm{BC}(\pi)_v^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{E_v})}$.

Définitions : Si $f \in S_t(G, U_0(p))$, on dira que f *est ancienne en* p si elle engendre[10] une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ contenant un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-invariant non nul. Un poids $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ est dit *régulier* si aucun des m_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$, n'est nul.

Corollaire 7.3.4. *Soient $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ régulier, $f \in \mathcal{S}_{t,\chi}(G, U_0(p))^{cl}$ une forme propre pour $\mathcal{H}$, alors il existe une unique représentation semi-simple*

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p),$$

potentiellement semi-stable aux places de E divisant p, telle que pour toute place $v \in S'$,

$$T_v(f) = \mathrm{tr}(\rho_f(F_v))f$$

[10] On rappelle que l'on a fixé en §4.1 un isomorphisme $i_p : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, qui nous permet en particulier d'associer à f un élément de $S_t(G, U_0(p), \mathbb{C})$ comme en §4.2.

La représentation ρ_f ne dépend que du point $x \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ attaché à f par le théorème 6.3.6, on la note $\rho(x)$.

Si f est ancienne en p et π_p est un facteur irréductible non ramifié de la représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ engendrée par f, alors la restriction de ρ_f à D_w est cristalline, de poids de Hodge-Tate

$$m_n < 1 + m_n + m_{n-1} < \cdots < (n-1) + m_n + ... + m_1$$

et le polynôme caractéristique de son Frobenius cristallin est l'image par i_p du polynôme de Hecke de π_p.

Preuve: Notons encore f l'élément de $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$ associé à la forme de l'énoncé comme au paragraphe 4.2. L'espace $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ étant compact, $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ est l'adhérence de la somme directe de ses sous-représentations (automorphes) irréductibles sous l'action de $G(\mathbb{A})$. Soit $A(t, U_1(p))$ le sous-espace vectoriel de $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ somme directe des représentations automorphes irréductibles π de $G(\mathbb{A})$ telles que

$$\pi_\infty \simeq S_t(\mathbb{C})^*, \text{ et } \pi^{U_1(p)} \neq 0.$$

La représentation $A(t, U_1(p))$ est engendrée par $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$, et se décompose comme somme finie de représentations irréductibles,

$$A(t, U_1(p)) = \oplus_{i=1}^r \pi_i$$

Soit $f = f_1 + ... + f_r \in S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$ écrite selon cette décomposition. Comme f est propre pour l'algèbre de Hecke non ramifiée hors de S, tous les f_i le sont aussi, avec même caractère. On choisit une quelconque des représentations automorphes irréductibles π_i telle que f_i soit non nulle, on la note $\pi(f)$. On a vu que les $\pi(f)_v$ avec $v \in S'$ sont non ramifiées et que leurs paramètres de Langlands se lisent sur l'action de $\mathcal{H}$ sur f. L'image par i_p de ces derniers se lit donc sur le point $x_f \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ correspondant à f par le théorème 6.3.6.

Par la discussion précédent 7.3.3, on peut considérer la représentation automorphe $\pi' := \mathrm{JL}(\mathrm{BC}(\pi(f)))$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, qui est discrète par 7.3.2. Elle satisfait $(\pi')^* \simeq (\pi')^c$ car c'est vrai aux places finies hors de S, et par le théorème de multiplicité 1 forte dans le spectre discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$. On sait de plus que la représentation $\mathrm{BC}(\pi(f))_\infty$ a de la cohomologie dans $(\pi_\infty^{\mathbb{C}})^*$, et en particulier même caractère infinitésimal que $\pi_\infty^{\mathbb{C}}$ (cf. [BW] chapitre I corollaire 4.2). Le théorème principal de [MW] assure qu'il existe un diviseur d de n, ainsi qu'une représentation automorphe cuspidale irréductible π'' de $\mathrm{GL}_{n/d}(\mathbb{A}_E)$, tels que si P est un parabolique de GL_n de Levi $\mathrm{GL}_{n/d}^d$, alors π' est un sous-quotient de l'induite parabolique normalisée de $P(\mathbb{A}_E)$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ de la représentation $\pi'' \otimes |\det|^{(1-d)/2} \times \cdots \times \pi'' \otimes |\det|^{(d-1)/2}$. La composante archimédienne de cette induite admet un caractère infinitésimal ([Kn] proposition 8.22), qui est donc aussi celui de tous ses constituants. Si t est un poids régulier, l'identification de ce caractère infinitésimal avec celui de $\pi_\infty^{\mathbb{C}}$ entraîne que $d = 1$, puis que π' est cuspidale (le théorème 6.1 de [En] montre même que π'_∞ est tempérée). Un théorème de Shalika ([Sh] corollaire du §5) assure alors que les composantes locales de π' sont génériques en toutes les places finies de E. Soit v une place finie de E telle que D_v est une algèbre à division, il en existe par hypothèse sur G. Une version plus précise du théorème 7.3.2, énoncée et prouvée en [H-T] (cf. I.3 et théorème VI.1.1 n° 2), montre qu'il y a deux possibilités à priori pour π'_v (cf. *loc.cit.*). Le théorème 9.7 de [Ze] assure que seule celle de carré intégrable est générique (*non dégénérée* dans sa terminologie). Ainsi, π' est de carré intégrable aux places finies ramifiées pour D, et π' entre dans les hypothèses du théorème 7.3.3.

La donnée de i_p comme place λ-adique nous fournit en particulier une représentation p-adique semi-simple de dimension n comme dans l'énoncé :

$$\rho_f := R_{i_p}(\pi')$$

Les transferts à D^* puis GL_n sont compatibles avec le transfert non ramifié aux places dans S', $\pi(f) \mapsto \rho_f$ est donc compatible avec la correspondance de Langlands non ramifiée par le théorème 7.3.3. Ceci détermine les polynômes caractéristiques dans ρ_f des Frobenius de S', le théorème de Cebotarev conclut que ρ_f est indépendante du $\pi(f)$ choisi initialement, puis ne dépend que du point $x_f \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ associé à f.

Si f est ancienne en p on peut choisir un $\pi(f)$ ayant pour composante en p le π_p de l'énoncé, qui est non ramifié. Mais les transferts 7.3.1 et 7.3.2 étant compatibles aux transferts locaux non ramifiés en les places non ramifiées pour D, E et π, ils le sont en la place w. Le théorème 7.3.3 implique alors que la représentation p-adique ρ_f, restreinte à chaque groupe de décomposition aux places v de E divisant p, est cristalline et que le paramètre de Langlands de π'_w est celui de π_p.

L'assertion sur les poids de Hodge-Tate de $(R_{i_p}(\pi'))_{|D_w}$ découle du théorème VII.1.9, n° 4, de [H-T], car π'_∞ a même caractère infinitésimal que $\pi^{\mathbb{C}}_\infty$. La représentation $(\rho_f)_{|D_w}$ obtenue dans [H-T] (cf. §3) est réalisée dans la cohomologie étale p-adique de la fibre générique d'une variété propre et lisse sur $\mathbb{Z}_p$, un de ses multiples étant découpé par une correspondance algébrique (cf. [H-T] chapitre III.2). Un théorème de Katz-Messing ([KMe] théorème 2.2), combiné avec 7.3.3 et le théorème de changement de base lisse en cohomologie l-adique, assure que le polynôme caractéristique du Frobenius de cristallin de $(\rho_f)_{|D_w}$ coïncide avec l'image par i_p du polynôme de Hecke de $\pi(f)_p$. □

7.4. **Applications aux familles de représentations galoisiennes.** On conserve dans ce paragraphe les notations du §7.3. Soit $\mathbf{D}_\chi$ la nilréduction de l'espace rigide associé à la donnée $(G, U_0(p), \chi, \mathcal{H}_{\chi,\Lambda})$ par le théorème 6.3.6. La proposition 7.1.1 s'applique en prenant :

- $X := \mathbf{D}_\chi$,

- $\mathcal{H}'$ l'image par le morphisme a (6.3.6) de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ dans $\mathcal{O}^{rig}_{\mathbf{D}_\chi}$, elle est compacte par la proposition 4.5.5,

- $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S$ défini en 7.3,

- S' ainsi que les $(F_v)_{v\in S'}$ définis *loc.cit.* (la réunion des classes de conjugaison des F_v est dense dans Γ par le théorème de Cebotarev),

- pour $v \in S'$, $a_v := a(T_v)$, T_v étant défini *loc.cit.*,

- Z l'ensemble des points classiques de poids régulier de $\mathbf{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ (il est Zariski-dense par une modification triviale de 6.4.6),

- les représentations $\rho(z)$, $z \in Z$, données par le corollaire 7.3.4.

Corollaire 7.4.1. *Il existe un unique pseudo-caractère continu, de dimension n,*

$$T : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S \to \mathcal{O}^{rig}_{\mathbf{D}_\chi},$$

dont l'évaluation en tout point classique de poids régulier de $\mathbf{D}_\chi$ est la trace de la représentation galoisienne associée à ce point par 7.3.4.

Tout pseudo-caractère continu $\mathbb{C}_p$-valué étant la trace d'une unique représentation continue, semi-simple, de dimension finie ([Tay]), on en déduit le :

Corollaire 7.4.2. *Soit $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $f \in \mathcal{S}_{t,\chi}(G, U_0(p))$ une forme propre pour $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, de pente finie, il existe une unique représentation semi-simple continue*

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)$$

telle que pour tout $v \notin S$, $T_v(f) = \mathrm{tr}(\rho_f(F_v))f$.

En utilisant la théorie de Sen développée dans [Sen], ainsi que 7.3.4, on montrerait facilement que si $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, alors ρ_f a pour poids de Hodge-Tate-Sen

$$(t_n, 1 + t_n + t_{n-1}, ..., (n-1) + t_n + ... + t_1)$$

En particulier, ρ_f n'est pas de Hodge-Tate en général. La théorie de Hodge p-adique de ces représentations peut être comprise à l'aide des travaux récents Kisin dans [Ki] (voir aussi §7.5, ainsi que [BC] §5 et §6).

Enfin, si $\mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}}$ désigne le lieu d'irréductibilité du pseudo-caractère T, le corollaire 7.2.6 donne :

Corollaire 7.4.3. *Il existe une unique algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}}$ et une représentation continue $\underline{\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S} \longrightarrow \mathcal{A}^*$, dont l'évaluation en tout point classique régulier $x \in \mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}}(\mathbb{C}_p)$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{C}_p$ de la représentation galoisienne associée à ce point par 7.3.4.*

Remarques :

– L'irréductibilité des représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes du théorème 7.3.3, bien que conjecturée, n'est connue en générale que si $n \leq 3$ (Ribet, Blasius-Rogawski, cf. [ZFPMS]), ou si elles sont supposées supercuspidales à au moins une place finie (Harris-Taylor [H-T] théorème C). Dans le premier cas, on a donc, $Z \subset \mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}} \neq \emptyset$.

  Expliquons rapidement comment utiliser le second cas. Soit v' une place finie de E décomposée, ne divisant pas p, telle que $D^*(E_{v'}) = \mathrm{GL}_n(E_{v'})$. Soit (J, r) un type d'une supercuspidale fixée de $\mathrm{GL}_n(E_{v'})$ (cf. [BK] §5), choisissons $U_0(p)$ de façon à ce que $U_0(p)_{v'} = J$. Une modification triviale des constructions faites au §4 nous permettrait de construire des familles de formes automorphes p-adiques de pentes finies pour G avec type $(U_0(p), \chi \otimes r)$. Un exemple est traité en détail pour $n = 3$ dans [BC] §8.2, le cas général est formellement identique. Notant que les transferts 7.3.1 et 7.3.2 sont compatibles au transfert local en la place v' ([La] 3.4, 4.5.2, 4.6.2), il vient que si π est une représentation automorphe pour G ayant le type (J, r) en v', $\mathrm{JL}(\mathrm{BC}(\pi))$ est supercuspidale en v. On est donc dans le second cas discuté ci-dessus et $\mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}} = \mathbf{D}_\chi$.

Enfin, par des techniques de théorie de Hodge p-adique, il est possible de démontrer que sur certaines composantes irréductibles de $\mathbf{D}_\chi$, $(T_x)_{|D_w}$ est la trace d'une représentation irréductible (cf. [BC] §6.3, §9.1).

– D'après le lemme 4.8.3, chaque représentation ρ_f avec f classique apparaît jusqu'à $n!$ fois sur $\mathbf{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$. Ce phénomène est l'analogue de l'existence des *formes jumelles* dans le cas du groupe GL_2. Les déformations de ρ_f construites à partir de différents points de $\mathbf{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ sont en général très différentes.

7.5. Variétés de Hecke et p-motifs classiques raffinés.

7.5.1. *p-motifs raffinés de Mazur.* Soient E un corps de nombres, $K \subset \mathbb{C}_p$ un corps local, et $n \geq 1$ un entier. Suivant Mazur dans [Ma], on appelle *p-motif classique de rang n à coefficients dans K*, la donnée d'un K-espace vectoriel W de rang n et d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur W, qui est non-ramifiée hors d'un ensemble fini, et dont la restriction à chaque groupe de décomposition aux places de E divisant p est cristalline.

Soit w une place de E divisant p telle que $E_w = \mathbb{Q}_p$, D_w un groupe de décomposition en w, et W un tel p-motif. À W vue comme représentation de $D_w = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on peut alors associer, suivant Fontaine, un φ-module filtré $D(W)$ faiblement admissible. Comme $E_w = \mathbb{Q}_p$, φ est K-linéaire et on notera $\mathcal{R}(W)$ l'ensemble des n valeurs propres de φ, comptées avec multiplicités. De plus, on note $\mathcal{J}(W) \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des poids de Hodge-Tate de W, et

$$\delta_i := \dim_K(\mathrm{Fil}^i(D(W))/\mathrm{Fil}^{i+1}(D(W)))$$

Mazur définit *loc.cit.* un *raffinement* de W comme étant la donnée $\mathcal{R}$ d'une partition ordonnée de $\mathcal{R}(W)$, soit $\mathcal{R} = \coprod_{i=1}^r I_i$, satisfaisant $|I_i| = \delta_i$. Si W est *régulier*, *i.e.* si $\forall i \in \mathcal{J}(W)$, $\delta_i = 1$, se donner un raffinement équivaut à ordonner les racines de φ. Si $(W, \mathcal{R})$ est un p-motif classique raffiné de rang n, on peut lui attacher les nombres

$$F_i(W) := \lambda_i/p^{k_i}$$

où k_i est le i-ème poids de Hodge-Tate de W, ces derniers étant rangés par ordre croissant, et $\mathcal{R} = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, ainsi que son polynôme-$U \in \overline{\mathbb{Q}}_p[T]$ qui est le polynôme dont les racines sont les $F_i(W)$.

L'intérêt de la notion de raffinement vient de ce que les p-motifs raffinés semblent se déformer p-adiquement "avec leur raffinement", dans le sens où les F_i (et non pas les λ_i) varient analytiquement dans la déformation. Ceci est discuté en détail dans [Ma], et les résultats de cet article (cf. §7.5.3) peuvent être vus comme une confirmation des prédictions faites *loc.cit.* Mazur a proposé de plus une condition de non criticité pour les p-motifs raffinés :

Définition : (Mazur) $(W, \mathcal{R})$ est dit *de pente non critique* si

$$v(\lambda_1) < k_2, \;\; v(\lambda_n) > k_{n-1} \;\text{ et si}$$

$$\forall i \in \{2, ..., n-1\}, \;\; v(\lambda_i) \in]k_{i-1}, k_{i+1}[$$

Par exemple, si W est ordinaire, il a un unique raffinement de pente non critique $\mathcal{R} = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, satisfaisant $v(\lambda_i) = k_i$; un tel $(W, \mathcal{R})$ sera dit *ordinaire.* Il nous sera utile de définir, si $a = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n)$ est une suite croissante d'entiers, $(W, \mathcal{R})$ un p-motif raffiné comme ci-dessus,

$$U^a(W) := \prod_{i=1}^{n} F_i(W)^{a_{n-i+1}}$$

Définition : $(W, \mathcal{R})$ sera dit U^a*-non critique* si a est strictement croissante et si

$$v(U^a(W)) < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)(k_{n-i+1} - k_{n-i})$$

$(W, \mathcal{R})$ sera dit U-non critique si il est U^a-non critique pour au moins une suite a.

Proposition 7.5.2. *Si $(W, \mathcal{R})$ est U-non critique, il est de pente non critique. La réciproque est vraie si $(W, \mathcal{R})$ est ordinaire, ou si $n = 2$.*

Preuve: Soit $(W, \mathcal{R})$ U^a-non critique, on supposera $a_1 = 0$ et aussi $k_1 = 0$, ce qui est loisible. Si $i \in \{1, ..., n-1\}$, on pose $m_i + 1 := k_{n-i+1} - k_{n-i}$, En terme des $F_i(W)$, la condition de pente non critique s'écrit $F_1(W) < m_{n-1} + 1$, $F_n(W) > -m_1 - 1$ et $\forall i \in \{2, ..., n-1\}$, $-m_{n-i+1} - 1 < F_i(W) < m_{n-i} + 1$. Or on a $U^a(W) = \prod_{i=1}^n F_i(W)^{a_{n-i+1}}$, et si pour $j \in \{0, ..., n-1\}$, on pose $v_j = \sum_{i=1}^{n-j} v(F_i(W))$, alors

$$\forall j \in \{1, ..., n-1\}, \quad \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)v_i < (m_j + 1)(a_{j+1} - a_j)$$

De ceci et du fait que $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $v_j \geq 0$ (le polygone de Hodge est au dessous du polygone de Newton), on déduit facilement que $(W, \mathcal{R})$ est de pente non critique. Si $(W, \mathcal{R})$ est ordinaire, il est $U^{(0,1,...,n-1)}$-critique. Enfin, l'équivalence quand $n = 2$ est immédiate. □

Exemple : Dans le cas $n = 3$, il est facile de montrer que $(W, \mathcal{R})$ (avec $k_1 = 0$ comme on peut le supposer) est U-non critique si et seulement si il est de pente non critique et si il vérifie la condition :

$$\frac{v(\lambda_1)}{k_2} + \frac{v(\lambda_2)}{k_3} < 1$$

Cette condition ne serait pas vérifiée par exemple pour un $(W, \mathcal{R})$ de poids de Hodge-Tate $(0, 1, 2)$ tel que $v(\lambda_1) = 1/2$, $v(\lambda_2) = 1$, et $v(\lambda_3) = 3/2$ (il n'y a pas d'obstruction locale en p à ce qu'un tel W existe).

7.5.3. *p-motifs raffinés attachés aux formes automorphes non ramifiées en p.*

On se replace dans le cadre du paragraphe 7.3, en particulier E est un corps quadratique imaginaire décomposé en p. On fixe

$$x \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p),$$

un point classique de poids régulier ancien en p, de poids $t = \kappa(x) = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$. Soit $\rho(x)$ la représentation galoisienne attachée à x comme en 7.3.4, elle prend ses valeurs dans un corps local E. D'après 7.3.4, on sait que sa restriction à D_w (ainsi qu'à l'autre place divisant p par la dernière assertion de 7.3.3) est cristalline. Cela nous fournit donc un p-motif classique noté $W(x)$. On sait de plus de 7.3.4 que $W(x)$ est régulier, de poids de Hodge-Tate :

$$(m_n, m_n + m_{n-1} + 1, m_n + m_{n-1} + m_{n-2} + 2, \cdots, m_n + m_1 + m_2 + ... + m_{n-1} + n - 1)$$

Il est commode de poser

$$k_i := m_n + m_{n-1} + m_{n-2} + ... + m_{n-i+1} + i - 1,$$

c'est le i^{eme} poids de Hodge-Tate de $W(x)$, rangés par ordre croissant.

Ceci nous permet d'associer à $W(x)$ un raffinement canonique de la manière qui suit. D'après 7.3.4, le polynôme caractéristique du Frobenius de $W(x)$ est $i_p(P(T))$ où $P(T)$ est le polynôme de Hecke d'une certaine représentation non ramifiée π_p de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Fixons $f \in S_t(G, U_0(p), \mathbb{C})$ telle que x est associé à f par 6.3.6 et §4.2, engendrant π_p. D'après §4.8, lemme 4.8.4, les opérateurs de Hecke $[IuI]$ opèrent par un caractère χ sur f ayant la propriété que le polynôme de Hecke est

$$\prod_{i=1}^{n}(T - p^{i-1}\chi(F_i))$$

De plus, par construction et la remarque concluant §4.8, $\iota_p(p^{i-1}\chi(F_i)) = p^{k_i}\mathbf{F}_i(x)$. On pose donc

$$\lambda_i := \mathbf{F}_i(x)p^{k_i}$$

D'après la remarque suivant la définition 4.8.3 §4.8, ceci nous fournit bien un raffinement de $W(x)$, que l'on note $\mathcal{R}(x)$. Son polynôme-U est $\prod_{i=1}^{n}(T - \mathbf{F}_i(x))$, $\mathbf{F}_i(x) = F_i(W(x))$ et pour toute suite croissante positive a, $\mathbf{U}_p^a(x) = U^a(W(x))$. La traduction de non criticité est donc :

$$(W(x), \mathcal{R}(x)) \text{ est } U^a\text{-non critique } \Leftrightarrow x \text{ est très classique pour } U_p^a$$

D'après la proposition 6.4.7, si $p > 2$, les $x \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ très classiques et anciens en p sont Zariski-denses. Ainsi, le couple $(\mathcal{D}_\chi(G, U_0(p)), \{\mathbf{F}_1, ..., \mathbf{F}_n\})$ peut être vu comme espace rigide d'interpolation de p-motifs raffinés en p. Ceci est un point de départ pour étudier la famille de représentations galoisiennes portée par $\mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))$, par exemple à la manière des travaux récents de Kisin [Ki].

Index

Références

[AFRL] **A.Borel & W.Casselman** *Automorphic forms, representations, and L-functions*
Proceedings of Symp. in Pure Maths. **33**, Corvallis (1977)

[BC] **J.Bellaïche & G.Chenevier** *Formes non tempérées pour* $U(3)$ *et conjectures de Bloch-Kato*
Chapitre III de [CH2]. Disponible sur ArXiV-math.NT/0212282.

[BZ] **I.N. Bernstein & A. V. Zelevinsky** *Induced representations of reductive p-adic groups I*
Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 10, 441-472 (1977)

[B1] **K.Buzzard** *p-adic modular forms on definite quaternion algebras*
Manuscript non publié (1998) `http://www.ma.ic.ac.uk/~kbuzzard/maths/other.html`

[B2] **K.Buzzard** *Eigenvarieties*
En préparation.

[Bo] **A.Borel** *Some finiteness properties of adele groups over number fields*
I.H.E.S. Publ. math. **16**, 5-30 (1963)

[BW] **A.Borel & N.Wallach** *Continous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*
Ann. maths Studies **94** (1980)

[BGR] **S.Bosch , U.Guntzer & R.Remmert** *Non archimedian analysis*
Grundlehren der math. **261** (1982)

[BK] **C.Bushnell & P.Kutzko** *Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types*
Proc. London Math. soc. (3) **77**, 582-634 (1998)

[Cas] **W. Casselman** *The unramified principal series of p-adic groups. I. The spherical function.*
Compositio Math. 40, no. 3, 387-406 (1980).

[CH] **G.Chenevier** *Une correspondance de Jacquet-Langlands p-adique*
Chapitre II de [CH2]. Disponible sur ArXiV-math.NT/0301032.

[CH2] **G. Chenevier** *Familles p-adiques de formes automorphes et applications aux conjectures de Bloch-Kato*
Thèse de l'université Paris 7 (2003)

[Cl] **L.Clozel** *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* GL_n
I.H.E.S. Publ. Math. **73**, 97-145 (1991)

[C-L] **L.Clozel & J.-P. Labesse** *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*
Asterisque **257**, SMF, Appendice A (1998)

[C1] **R.Coleman** *P-adic Banach spaces & families of modular forms*
Inventiones math. **127**, 417-479 (1997)

[C2] **R.Coleman** *Classical and overconvergent modular forms*
Inventiones math. **124**, 214-241 (1996)

[CM] **R.Coleman & B.Mazur** *The Eigencurve*
Proc. Durham, 1996. London Math. Soc. Lecture Note Ser., **254** (1998)

[Con1] **B.Conrad** *Modular Curves, Descent Theory and Rigid Analytic Spaces*
Preprint (2001).

[Con2] **B.Conrad** *Irreducible components of rigid analytic Spaces*
Annales de l'institut Fourier, **49**, 905-919 (1999).

[DS] **P.Deligne & J.-P. Serre** *Formes modulaires de poids* 1
Annales Sci. E.N.S. **7**, 507-530 (1974)

[En] **T.Enright** *Relative Lie algebra cohomology and unitary representations of complexe Lie groups*
Duke Math. J. **46** n° 3, 513-525 (1979)

[F-H] **W.Fulton & J.Harris** *Representation theory, a first course.*
Springer-Verlag, GTM **129** (1991)

[GW] **R.Goodman & N.Wallach** *Representations and invariants of classical groups*
Cambridge University Press. Encyclopedia of math. **68** (1998)

[GM] **F.Gouvêa & B.Mazur** *Families of modular eigenforms*
Mathematics of computation vol. 58 **198**, 793-805 (1992)

[H-T] **M.Harris & R.Taylor** *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*
Annals of math. studies **151** (2001)

[Hi1] **H.Hida** *Control theorems of p-nearly ordinary cohomology groups for SL(n)*
Bull. Soc. Math. Fr. **123**, 139-166 (1995)

[Hi2] **H.Hida** *p-adic automorphic forms on reductive groups*
Cours à l'institut Poincaré (2000).

[KMe] **N.M.Katz & W.Messing** *Some consequences of the Riemann Hypothesis for varieties over finite fields*
Inventiones math. **23**, 73-77 (1974)

[Ki] **M. Kisin** *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*
Inventiones math. **153**, 363-454 (2003)

[Kn] **A.Knapp** *Representation theory of semisimple Lie groups*
Princeton univ. press (1986)

[Kob] **N.Koblitz** *p-adic analysis, p-adic numbers and zeta functions.*
Springer Verlag, GTM **58** (1984)

[La] **J.-P. Labesse** *Cohomologie, stabilisation et changement de base*
Astérisque **257**, SMF (1998)

[Ma] **B.Mazur** *The theme of p-adic variation.*
Mathematics : Frontiers and perspectives
V.Arnold, M.Atiyah, P.Lax & B.Mazur Ed., AMS (2000)

[MW] **C.Moeglin & J.-L. Waldspurger** *Le spectre résiduel de* GL_n
Ann.Sci.ENS **22**, 605-674 (1989)

[Ro] **A.Roche** *Types and Hecke Algebras for principal series representations of split reductive p-adic groups*
Ann.scient.Ec.Norm.Sup **31**, 361-413 (1998)

[Rog] **J.D.Rogawski** *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*
Inventiones math. **79**, 443-465 (1985)

[Rou] **R.Rouquier** *Caractérisation des caractères et Pseudo-caractères*
Journal of Algebra **180**, 571-586 (1996)

[Sh] **J.Shalika** *The multiplicity one theorem for* $GL(n)$
Annals of math. **100**, 171-193 (1974).

[SS] **P.Schneider & U.Stuhler** *The cohomology of p-adic symmetric spaces*
Inventiones math. **105**, 47-122 (1991)

[ST1] **P.Schneider & J.Teitelbaum** *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with application to* GL_2 J.AMS **15**, 443-468 (2002)

[ST2] **P.Schneider & J.Teitelbaum** *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*
Inventiones math. **153**, 145-196 (2003)

[Sen] **S. Sen** *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*
Bull. Soc. math. France, **121**, pages 13–34 (1993)

[Ser] **J.-P. Serre** *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*
Publications Math. I.H.E.S. **12** (1962)

[St] **G.Stevens** *Families of modular forms with positive slopes*
Cours à l'IHP, printemps 2000.

[Tay] **R.Taylor** *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight.*
Duke Math. J. **63**, 281-332 (1991)

[Ti] **J.Tits** *Reductive groups over local fields*
[AFRL] Part I, 29-69

[Tow] **J.Towber** *Young symmetry, the flag manifold, and representations of* GL_n
Journal of Algebra **61**, no. 2, 414-462 (1979)

[Wan] **D.Wan** *Dimension variation of classical and p-adic modular forms*
Inventiones math. **133**, 449-463 (1998)

[Ze] **A. V. Zelevinsky** *Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of* $GL(n)$
Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 13, 165–210 (1980)

[ZFPMS] **Edited by R. Langlands and D. Ramakhrisnan,** *The Zeta functions of Picard modular surfaces, 1992, CRM*
Publications C.R.M., Montréal