UNE APPLICATION DES VARIÉTÉS DE HECKE DES GROUPES UNITAIRES

GAËTAN CHENEVIER

Dans cette note[1], nous expliquons la construction de variétés de Hecke p-adiques associées aux groupes unitaires définis d'un corps de nombres CM et décrivons des propriétés de la famille de représentations galoisiennes portée par ces variétés. Nous donnons une application à la construction de certaines représentations galoisiennes qui joue un rôle important dans cette série de livres (voir [ChH]). Les variétés de Hecke ci-dessus sont aussi utilisées dans [BCh2].

La construction des variétés de Hecke que nous donnons est une combinaison essentiellement triviale des méthodes de [Ch] (cas d'un corps quadratique imaginaire, revisité dans [BCh, §7]) et de [Bu] (cas d'une algèbre de quaternions sur un corps totalement réel, voir aussi [Y]). Elle pourrait aussi se déduire comme cas particulier des travaux d'Emerton [E], et elle est aussi contenue dans les travaux récents de Loeffler [Loe]. En ce qui concerne les propriétés galoisiennes, nous utilisons et étendons certains résultats de [BCh, §7].

1. Variétés de Hecke des groupes unitaires définis

1.1. **Notations et choix.** Fixons un corps de nombres totalement réel F, $\mathcal{K}$ une extension quadratique totalement imaginaire de F, $n \geq 1$ un entier et U un groupe unitaire à n variables attaché à $\mathcal{K}/F$ vu comme groupe algébrique sur F. On suppose que U est *défini*, ce qui signifie que $U(F_v)$ est un groupe unitaire compact pour chaque place réelle v de F. Cela entraîne que les représentations automorphes (complexes, irréductibles) Π de U sont toutes discrètes et cohomologiques en degré 0 :

$$L^2(U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F))_{K-\text{fini}} = \bigoplus_{\Pi} m(\Pi)\Pi,$$

$K \subset U(\mathbb{A}_F)$ étant un sous-groupe compact ouvert quelconque, et m(Π) étant la multiplicité (finie) de la représentation Π. De plus, les composantes archimédiennes Π_∞ sont de dimension finie et les composantes Π_f aux places finies sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Afin d'associer aux Π_f des $\overline{\mathbb{Q}}$-structures de manière univoque, il convient de fixer un plongement $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}$. Comme nous allons nous intéresser aux congruences entre ces Π, il nous faut aussi fixer un nombre premier p ainsi qu'un plongement $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. Dans toute cette note, $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ sont des clôtures algébriques fixées de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}_p$. On munit $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de sa norme $\|.\|$ et de sa valuation p-adique $\mathbf{v}(.)$ telles que $\mathbf{v}(p) = 1$ et $\|p\| = 1/p$. Si v est une place de F divisant p, nous noterons $\Sigma(v) \subset \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ l'ensemble des plongements continus v-adiquement (i.e. induisant v) et $\Sigma_\infty(v) := \iota_\infty\iota_p^{-1}\Sigma(v) \subset \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$ les plongements réels correspondants.

Si v est une place de F décomposée dans $\mathcal{K}$, et si $U(F_v) \simeq \mathrm{GL}_n(F_v)$, la donnée d'une place w de $\mathcal{K}$ au dessus de v permet d'identifier $U(F_v)$ avec $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K}_w) = \mathrm{GL}_n(F_v)$ de manière unique à conjugaison près, ce que l'on fera parfois sans plus de précision. En particulier, si Π est une représentation automorphe de U on notera Π_w, ou même par abus Π_v, la représentation de $\mathrm{GL}_n(F_v)$ associée à un tel choix.

[1]Le 15 Avril 2009. L'auteur est financé par le C.N.R.S.

Les variétés de Hecke de U que nous allons considérer dépendent de la donnée de S_p, W_∞, $\mathcal{H}$ et e que nous fixons dès maintenant :

(En p) S_p est un *sous-ensemble non vide* de l'ensemble des places finies de F divisant p tel que $\forall v \in S_p$, $U(F_v) \simeq \mathrm{GL}_n(F_v)$. En particulier, chaque place $v \in S_p$ est décomposée dans $\mathcal{K}$. Il sera important dans les applications à [ChH] d'autoriser que S_p ne contienne pas toutes les places de F divisant p.

(En ∞) W_∞ est une représentation irréductible fixée de $\prod_{w\in\Sigma_\infty(v), v\notin S_p} U(F_v)$.

(Hors S_p) Fixons de plus :

- un ensemble fini S de places finies de F tel que $S \cap S_p = \emptyset$, et contenant les places v telles que $U(F_v)$ est ramifié,

- $K^S = \prod_{v\notin S} K_v \subset U(\mathbb{A}^S_{F,f})$ un sous-groupe compact ouvert tel que K_v est maximal hyperspécial pour $v \notin S_p$, égal à $U(\mathcal{O}_{F_v})$ pour presque tout v, et tel que K_v est un sous-groupe d'Iwahori pour $v \in S_p$,

- $\mathcal{H}$ une sous-algèbre commutative de l'algèbre de Hecke globale de $U(\mathbb{A}^{S_p}_{F,f})$ contenant l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}^S = \mathbb{Z}[U(\mathbb{A}^{S\cup S_p})//K^{S\cup S_p}]$ hors de $S \cup S_p$.

- pour chaque $v \in S$, un idempotent e_v de l'algèbre de Hecke de $U(F_v)$.

On pose $e = (\otimes_{v\in S} e_v) \otimes \mathbb{1}_{K^{S\cup S_p}}$, c'est un idempotent de l'algèbre de Hecke de $U(\mathbb{A}^{S_p}_{F,f})$.On supposera que $\mathcal{H}$ et les e_v sont à coefficients dans un corps de nombres galoisien $E \subset \overline{\mathbb{Q}}$ et on notera L la clôture galoisienne de $\iota_p(E)$ et $\iota_p(\mathcal{K})$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des représentations automorphes irréductibles Π de U telles que $e(\Pi_f)^{K_{S_p}} \neq 0$ et telles que[2] $\bigotimes_{w\in\Sigma_\infty(v), v\notin S_p} \Pi_w \simeq W_\infty$.

1.2. **Congruences entre représentations automorphes.** Si $\Pi \in \mathcal{A}$, alors $e(\Pi_f)^{K_{S_p}}$ est un $\mathcal{H}$-module de dimension finie sur $\mathbb{C}$, que l'on peut donc trigonaliser, ce qui nous fournit après semi-simplification un ensemble fini de morphismes d'anneaux $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ (dont on négligera les multiplicités). Comme Π_f, e et $\mathcal{H}$ sont définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ces morphismes prennent leurs valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$ via ι_∞^{-1}, que nous pouvons alors envoyer dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via ι_p, et nous les verrons toujours de cette manière comme des morphismes d'anneaux

$$\psi : \mathcal{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p,$$

que l'on appellera *systèmes de valeurs propres associés à* Π. Notons que $(\Pi_f^{S\cup S_p})^{K^{S\cup S_p}}$ étant de dimension 1, les systèmes de valeurs propres associés à un même Π coïncident sur $\mathcal{H}^S$ et contiennent par la théorie de Satake une information identique à $\Pi_f^{S\cup S_p}$.

Donnons déjà une version primitive, mais non triviale, des résultats de cette note. Supposons jusqu'à la fin de ce §1.2 que $\mathcal{H} = \mathcal{H}^S$ pour simplifier. Dans ce cas, chaque Π a un unique système de valeurs propres $\psi = \psi_\Pi$ associé.[3] La notion de congruence entre représentations automorphes de U qui nous intéresse est la suivante : *si* Π *et* Π' *sont dans* $\mathcal{A}$*, on écrit* $\Pi \equiv \Pi' \bmod p^m$ *si*

$$\forall h \in \mathcal{H}^S, \quad \|\psi_\Pi(h) - \psi_{\Pi'}(h)\| \leq p^{-m}.$$

Soit T un tore maximal de $\prod_{v\in S_p} U(F_v)$, $X^*(T)$ son groupe de caractères $\mathbb{Q}_p$-algébriques. On munit $X^*(T)$ d'un ordre de Weyl de manière usuelle. Si $\Pi \in \mathcal{A}$ on peut définir un caractère $\kappa(\Pi) \in X^*(T)$ comme le plus haut poids du facteur de Π_∞ correspondant à S_p

[2]Notons que nous ne spécifions pas Π_w pour $w \in \Sigma_\infty(v)$ et $v \in S_p$, de sorte qu'il existera en général une infinité dénombrable de telles représentations, du moins si $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

[3]Cependant, noter que les fibres (finies) de $\Pi \mapsto \psi_\Pi$ ne sont pas nécéssairement des singletons car la multiplicité un forte n'est pas satisfaite pour U quand $n > 1$.

(cela sera rappelé en détail plus bas). Soit q un entier tel que pour tout v, $|k_v^*|$ divise $q-1$ où k_v est le corps résiduel de F_v. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.6.

Théorème 1.3. *Soient* $\Pi \in \mathcal{A}$ *et* $m \in \mathbb{N}$. *Il existe* $M \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout*

$$k \in \kappa(\Pi) + p^M(q-1)X^*(T)$$

dominant et suffisamment loin des murs de Weyl, il existe $\Pi' \in \mathcal{A}$ *telle que*

$$\Pi' \equiv \Pi \bmod p^m \ \text{ et } \ \kappa(\Pi') = k.$$

En particulier, l'image de $\Pi \mapsto (\psi_\Pi, \kappa(\Pi))$, $\mathcal{A} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^S, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times (X^*(T) \otimes \mathbb{Z}_p)$, est sans point isolé (le membre de droite étant muni de la distance ultramétrique évidente).[4]

1.4. **Poids et raffinements : l'application ν.** De même que les congruences de Kummer entre les nombres de Bernoulli ont une incarnation analytique p-adique en la fonction ζ p-adique de Kubota-Leopold et Iwasawa (une fonction analytique p-adique sur l'espace des caractères p-adiques de $\mathbb{Z}_p^*$), les congruences ci-dessus admettent une variante analytique plus subtile, qui est le contenu des variétés de Hecke.

Plus exactement, la variété de Hecke de U attachée à $(S_p, W_\infty, \mathcal{H}, e)$ est un espace analytique p-adique interpolant tous les couples (ψ, ν) où ν contient la donnée du *poids* de Π_∞ et d'un *p-raffinement* de Π_{S_p} où Π est la représentation ayant donné lieu à ψ. À cet effet il nous reste à définir ces ν précisément. Du point de vue du parallèle avec les congruences de Kummer, ce ν représente la modification du facteur eulérien en p nécessaire à effectuer pour obtenir les congruences, en dimension $n > 1$ elle n'est pas unique et chaque choix possible conduit à des congruences différentes en général.

Pour tout $v \in S_p$, il sera commode de fixer un isomorphisme $U(F_v) \simeq \mathrm{GL}_n(F_v)$ comme au §1.1, c'est à dire une place de $\mathcal{K}$ divisant v. Regardons chaque $U(F_v)$ comme un $\mathbb{Q}_p$-groupe par restriction des scalaires. Soient $T = \prod_{v \in S_p} T_v \subset \prod_{v\in S_p} U(F_v)$ le $\mathbb{Q}_p$-tore diagonal, $T^0 = \prod_{v \in S_p} T_v^0$ son sous-groupe compact maximal, et $B = \prod_{v\in S_p} B_v$ le sous-$\mathbb{Q}_p$-groupe de Borel des éléments triangulaires supérieurs de $\prod_{v \in S_p} U(F_v)$. Cela munit en particulier le groupe $X^*(T)$ des caractères algébriques de T d'une notion de caractère dominant (relativement à B). Un élément κ de $X^*(T)$ est entièrement déterminé par une famille d'entiers $k_{i,\sigma}$, $(i, \sigma) \in \{1, \dots, n\} \times \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, et la relation

$$\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{(i,\sigma)} \sigma((x_i)_{v_\sigma})^{k_{i,\sigma}},$$

v_σ désignant la place de S_p induite par σ. Sous cette écriture, κ est dominant si pour tout σ, $k_{i,\sigma}$ est décroissante au sens large.

On notera

$$\mathcal{T} = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}}), \ \ \mathcal{W} = \mathrm{Hom}(T^0, \mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}})$$

les espaces analytiques[5] en groupes sur $\mathbb{Q}_p$ paramétrant respectivement les caractères continus p-adiques de T et de T^0. Le groupe $X^*(T)$ des caractères algébriques de T est un sous-groupe de $\mathcal{T}(L)$.

[4] J'ignore si cette image est d'adhérence compacte en général. Il s'agirait de savoir si les $\psi_\Pi(\mathcal{H}^S)$, $\Pi \in \mathcal{A}$, restent dans une extension *finie* de $\mathbb{Q}_p$.

[5] Dans cette note, les espaces rigides analytiques que nous considérons sont pris au sens de Tate. En tant qu'espace analytique, $\mathcal{W}$ est une réunion disjointe de boules ouvertes et $\mathcal{T}$ est produit direct (non canoniquement) de $\mathcal{W}$ par des copies de $\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}}$. Nous renvoyons par exemple à [Bu, §8] pour des généralités sur ces espaces.

Nous allons tout d'abord définir une application naturelle
$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{T}(\overline{\mathbb{Q}}_p), \ \ \Pi \mapsto \kappa(\Pi),$$
déjà mentionnée plus haut. Soient $v \in S_p$, $w \in \Sigma_\infty(v)$, et W une représentation irréductible continue de $U(F_w)$. Alors $W_{|U(F)}$ est canoniquement définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ via ι_∞, et ce $\overline{\mathbb{Q}}$-modèle induit une F_v-représentation algébrique de $U(F_v)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ en étendant les scalaires à ι_p. Le plus haut poids de cette représentation, c'est-à-dire l'unique sous-caractère de sa restriction à B_v, définit un caractère algébrique $\kappa_{W,w} : T_v \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^*$, que l'on étend trivialement en un caractère de T. On pose alors pour $\Pi \in \mathcal{A}$,
$$\kappa(\Pi) = \kappa(\Pi_\infty) = \prod_{v \in S_p, w \in \Sigma_\infty(v)} \kappa_{\Pi_w, w}.$$
Par construction, $\kappa(\Pi) \in X^*(T) \subset \mathcal{T}(L)$.

Pour terminer la définition de ν nous devons rappeler le concept de *p-raffinement* d'une représentation de $U(F_v)$ ([M, §3],[Ch, §4.8],[BCh, §6.4]), qui est au coeur de la théorie. On suppose encore $v \in S_p$. Soit π_v une représentation complexe lisse et irréductible de $\mathrm{GL}_n(F_v)$ admettant un vecteur invariant non nul sous le sous-groupe d'Iwahori K_v. Un résultat de Borel et Matsumoto assure que π_v est une sous-représentation d'une série principale non ramifiée. Autrement dit, il existe un caractère
$$\chi : T_v/T_v^0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
tel que π_v se plonge comme sous-représentation dans l'induite parabolique lisse et normalisée de χ à $U(F_v)$:
$$\mathrm{Ind}_{B_v}^{\mathrm{GL}_n(F_v)} \chi = \{f : \mathrm{GL}_n(F_v) \to \mathbb{C} \text{ lisse}, f(bg) = (\chi \delta_{B_v}^{1/2})(b) f(g) \ \forall b \in B_v, \forall g \in \mathrm{GL}_n(F_v)\}.$$
On dira qu'un tel caractère χ est un *raffinement accessible*[6] de π_v.

Concrètement, un raffinement accessible de π_v est simplement la donnée d'un ordre particulier sur les valeurs propres de la classe de conjugaison semi-simple du Frobenius géométrique dans le paramètre de Langlands de π_v. Précisément, cet ordre $\varphi_{1,v}, \cdots, \varphi_{n,v}$ est défini par $\varphi_{i,v} = \chi(t_{i,v})$ où
$$t_{i,v} = (1, \ldots, 1, \varpi_v, 1, \ldots, 1) \ \in \ T_v,$$
l'uniformisante ϖ_v de F_v étant en i-ème position dans le tore diagonal T_v.

Pour revenir aux représentations automorphes de U, si $\Pi \in \mathcal{A}$ nous appellerons *raffinement de* Π, ou de Π_{S_p}, la donnée d'un caractère
$$\chi = \bigotimes_{v \in S_p} \chi_v : T/T^0 \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^*$$
où pour chaque v, χ_v est un raffinement accessible de $\Pi_v |\det|^{\frac{1-n}{2}}$ composé par $\iota_p \iota_\infty^{-1}$. Au final, *à chaque représentation automorphe raffinée* (Π, χ), $\Pi \in \mathcal{A}$, *on peut associer l'élément* (produit)
$$\nu(\Pi, \chi) := \kappa(\Pi) \cdot \chi \cdot (\delta_B^{-1/2} |\det|^{\frac{n-1}{2}}) \in \mathcal{T}(\overline{\mathbb{Q}}_p).$$
Notons que $\nu(\Pi, \chi)$ détermine exactement $\kappa(\Pi)$ et χ. La normalisation par le facteur constant $\delta_B^{-1/2} |\det|^{\frac{n-1}{2}}$ apparaît pour des raisons d'algébricité.

[6] Plus généralement, on appelle *raffinement de* π_v un caractère de T_v/T_v^0 tel que π_v soit un *sous-quotient* de $\mathrm{Ind}_{B_v}^{\mathrm{GL}_n(F_v)} \chi$. Si π_v est sphérique et tempérée (ou même simplement générique) alors tous ses raffinements sont accessibles; en général c'est inexact, par exemple la représentation de Steinberg ou la représentation triviale n'admettent qu'un seul raffinement accessible. En revanche, il existe toujours au moins un raffinement accessible.

1.5. **Énoncé du théorème.** Nous avons maintenant suffisamment de notations pour énoncer le théorème. Considérons le sous-ensemble

$$\mathcal{Z} \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(\mathcal{H}, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathcal{T}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

formé des couples (ψ, ν) tels qu'il existe une représentation automorphe $\Pi \in \mathcal{A}$ de U et un raffinement accessible χ de Π_{S_p} de sorte que ψ est un système de valeurs propres de $\mathcal{H}$ associé à Π et $\nu = \nu(\Pi, \chi)$.

Théorème 1.6. *Il existe un unique quadruplet (X, ψ, ν, Z) où :*

- *X est un espace rigide analytique sur L qui est réduit,*
- *$\psi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ est un morphisme d'anneaux,*
- *$\nu : X \longrightarrow \mathcal{T}$ est un morphisme analytique fini,*
- *$Z \subset X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est un sous-ensemble Zariski-dense et d'accumulation,*

tel que les conditions (i) et (ii) suivantes soient satisfaites :

(i) *Pour tout ouvert affinoide $V \subset \mathcal{T}$, l'application naturelle*

$$\psi \otimes \nu^* : \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(\nu^{-1}(V))$$

est surjective.

(ii) *L'application naturelle d'évaluation $X(\overline{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(\mathcal{H}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$,*

$$x \mapsto \psi_x := (h \mapsto \psi(h)(x)),$$

induit une bijection $Z \overset{\sim}{\to} \mathcal{Z}$, $z \mapsto (\psi_z, \nu(z))$.

Il satisfait de plus :

(iii) *X est équidimensionnel de dimension* $\dim(\mathcal{W}) = n(\sum_{v \in S_p} [F_v : \mathbb{Q}_p])$.

(iv) *Plus précisément, soit*

$$\kappa : X \longrightarrow \mathcal{W}$$

la composée de ν par la projection canonique $\mathcal{T} \to \mathcal{W}$. L'espace X est admissiblement recouvert par les ouverts affinoides $\Omega \subset X$ tels que $\kappa(\Omega)$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$ et tels que $\kappa_{|\Omega} : \Omega \to \kappa(\Omega)$ soit finie, et surjective restreinte à chaque composante irréductible de Ω. Enfin, l'image par κ de chaque composante irréductible de X est un ouvert Zariski de $\mathcal{W}$.

(v) $\psi(\mathcal{H}^S) \subset \mathcal{O}(X)^{\leq 1}$.

(vi) *(Critère de classicité) Soit $x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\kappa(x)$ soit algébrique et dominant. Pour chaque $(i, \sigma) \in \{1, \ldots, n\} \times \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, notons $k_{i,\sigma}$ l'entier associé à $\kappa(x) \in X^*(T)$ comme au §1.4, $v_\sigma \in S_p$ la place induite par σ, et $\varphi_{i,\sigma} = \delta(t_{i,v_\sigma})(x)$. Supposons que pour tout $(i, \sigma) \in \{1, \ldots, n-1\} \times \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, on ait*

$$\frac{\mathbf{v}(\varphi_{1,\sigma}\varphi_{2,\sigma} \cdots \varphi_{i,\sigma})}{\mathbf{v}(\varpi_{v_\sigma})} < k_{i,\sigma} - k_{i+1,\sigma} + 1,$$

alors $x \in Z$.

Nous renvoyons à [BCh, Ch. 7] pour une discussion détaillée de ce type d'énoncé.

Rappels : Bornons-nous ci-dessous à rappeler les notions de géométrie rigide utilisées. Si Y est un espace rigide sur L, nous notons $\mathcal{O}(Y)$ l'algèbre de ses fonctions globales et $\mathcal{O}(Y)^{\leq 1}$ le sous-anneau des fonctions bornées par 1. De plus, $Y(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ désigne la réunion des $Y(L')$ où $L' \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ est une extension finie de L.

Une partie Z de $Y(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est dite Zariski-dense (resp. d'accumulation) si l'ensemble $|Z| \subset Y$ des points fermés sous-jacent l'est.[7] Une partie $Z \subset Y$ est dite Zariski-dense si le seul fermé analytique réduit de Y contenant Z est la nilréduction Y_{red} de Y. Si Y est de Stein et réduit (ce qui est le cas de $\mathcal{W}$, $\mathcal{T}$ et X) alors il est équivalent de demander qu'une fonction analytique globale sur Y s'annulant sur Z est identiquement nulle.

On dit que Z s'accumule en une partie Z' de Y si pour tout $z \in Z'$ et tout voisinage ouvert U de Y contenant z il existe un ouvert affinoide $V \subset U$ contenant z tel que $Z \cap V$ est Zariski-dense dans V. On dit que Z est d'accumulation si il s'accumule en lui-même.

Par exemple, le sous-ensemble de $\mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ paramétrant les caractères algébriques dominants est Zariski-dense, et son sous-ensemble des caractères réguliers s'accumule en tous les caractères algébriques (lemme 2.7).

2. Preuve du théorème

La preuve que nous donnons ci-dessous du théorème 1.6 est similaire à celle donnée dans [BCh, §7] dans le cas $F = \mathbb{Q}$, et auquel nous nous réfèrerons parfois. La variété de Hecke X associée à $(S_p, W_\infty, \mathcal{H}, e)$ est construite par un procédé formel, dû à Coleman et Coleman-Mazur [CM] (voir aussi [Bu], [Ch]), à partir de l'action d'opérateurs de Hecke compacts agissant sur la famille plate des espaces de Banach de formes automorphes p-adiques pour U. Une partie importante de la démonstration consiste à définir ces espaces, une autre étant de vérifier un analogue du critère de "classicité" de Coleman [C1].

2.1. **Notations.** Dans les §2.2 à §2.8 suivants, de nature purement locale, F_p est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'uniformisante ϖ et d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_p$. Nous désignons par G le groupe $\mathrm{GL}_n(F_p)$, B son sous-groupe triangulaire supérieur, N le radical unipotent de B, et T son tore diagonal. Soient T^0 le sous-groupe compact maximal de T et I le sous-groupe d'Iwahori de G constitué des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_p)$ qui sont triangulaires supérieurs modulo ϖ. Enfin, on note $T^- \subset T$ le sous-monoïde des éléments de la forme

$$\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n), \quad x_i \in F_p^*, \quad \mathbf{v}(x_i) \geq \mathbf{v}(x_{i+1}) \quad \forall 1 \leq i < n,$$

$M \subset G$ le sous-monoïde engendré par I et T^-, et $T^{--} \subset T^-$ le sous-monoïde des éléments $\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ satisfaisant $\mathbf{v}(x_i) \geq \mathbf{v}(x_{i+1})+1$ pour $1 \leq i < n$ (on rappelle que $\mathbf{v}(p) = 1$).

2.2. **Algèbre de Hecke-Iwahori et raffinements accessibles.** Commençons par rappeler le lien existant entre algèbre de Hecke-Iwahori et raffinements. Nous renvoyons à [BCh, §6.2] ou à [Ch, §4.8] pour une discussion détaillée.

Soit $\mathfrak{A}^- \subset \mathbb{Z}[G//I]$ le sous-anneau engendré par les fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{ItI}$ des doubles classes ItI pour $t \in T^-$. Ces fonctions sont inversibles dans $\mathbb{Z}[1/p][G//I]$, on peut donc considérer le sous-anneau $\mathfrak{A} \subset \mathbb{Z}[1/p][G//I]$ engendré par les $\mathbb{1}_{ItI}$ $(t \in T^-)$, et leurs inverses. On verra l'inclusion $T^-/T^0 \subset T/T^0$ comme une symétrisation du monoïde T^-/T^0. Le lemme suivant récapitule un ensemble de résultats dûs à Bernstein, Borel, Casselman et Matsumoto (voir par exemple [BCh, §6.2]).

Lemme 2.3. (i) *On a l'égalité* $M = \coprod_{t \in T^-/T^0} ItI$. *De plus, l'application*

$$\tau : M \longrightarrow T^-/T^0,$$

définie par la relation $m \in I\tau(m)I$, *est un homomorphisme multiplicatif.*

(ii) *L'application* $T^-/T^0 \to \mathfrak{A}^-$, $t \mapsto \mathbb{1}_{ItI}$, *est multiplicative et s'étend en des isomorphismes d'anneaux*[8] $\mathbb{Z}[T^-/T^0] \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}^-$ *et* $\mathbb{Z}[T/T^0] \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.

[7] Noter que l'ensemble $\mathcal{Z}$ introduit plus haut est stable par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$.

[8] Il faut prendre garde que pour $n > 1$ cet homomorphisme n'envoie pas $t \in T$ sur $\mathbb{1}_{ItI}$, mais plutôt sur $\mathbb{1}_{IaI}/\mathbb{1}_{IbI}$ si $a, b \in T^-$ et $t = a/b$.

Soit π une représentation complexe lisse irréductible de G telle que $\pi^I \neq 0$. Regardons π^I comme module sur $\mathbb{C}[T/T^0]$ par le dernier isomorphisme du (ii), sa semi-simplification $(\pi^I)^{\mathrm{ss}}$ est une somme de caractères de T/T^0.

(iii) *Un caractère $\chi : T/T^0 \to \mathbb{C}^*$ apparaît dans $(\pi^I)^{\mathrm{ss}}$ si, et seulement si, $\chi\delta_B^{1/2}$ est un raffinement accessible de π. En particulier, il existe toujours au moins un raffinement accessible de π.*

2.4. **Préliminaires sur les fonctions et les caractères r-analytiques.** Soient Λ un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, $r \geq 0$ un entier, et A une $\mathbb{Q}_p$-algèbre affinoide. Choisissons $e_1, \ldots, e_d$ une $\mathbb{Z}_p$-base de Λ, et notons $u_1, \cdots, u_d \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda, \mathbb{Z}_p)$ sa base duale. L'algèbre de Tate $A\langle u_1, \cdots, u_d\rangle$ s'injecte de manière naturelle dans la A-algèbre A^Λ des fonctions de Λ dans A, et son image dans cette dernière ne dépend pas du choix de la base (e_i). On la notera $A\langle\Lambda\rangle$. Si A est muni d'une norme, on munit $A\langle\Lambda\rangle \simeq A\langle u_1, \cdots, u_d\rangle$ de la norme de Gauss associée.

Une fonction $f : \Lambda \to A$ est dite r-analytique si pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'application

$$f_\lambda : \Lambda \to A, \ \ x \mapsto f(\lambda + p^r x),$$

appartient à $A\langle\Lambda\rangle$. Ces fonctions forment une sous-A-algèbre de A^Λ que l'on munit de la norme $\sup_{\lambda\in\Lambda}|f_\lambda|_{\mathrm{Gauss}}$ (noter que le sup porte sur un sous-ensemble fini). On rappelle que suivant Coleman, un A-module de Banach est dit *orthonormalisable* s'il est isométrique à $A\langle u\rangle$. Le résultat suivant est alors immédiat.

Lemme 2.5. *Le A-module des fonctions r-analytiques $\Lambda \to A$ est un A-module de Banach orthonormalisable.*

Des considérations similaires s'appliquent aux caractères de T^0 comme suit. Un caractère $c : \mathcal{O}_p^* \to A^*$ est dit r-analytique si la fonction qui s'en déduit

$$x \mapsto c(1 + \varpi x), \mathcal{O}_p \to A,$$

est r-analytique sur le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{O}_p$; par multiplicativité il suffit en fait de vérifier que $x \mapsto c(1 + p^r\varpi x)$ est dans $A\langle\mathcal{O}_p\rangle$. De même, un caractère $T^0 = (\mathcal{O}_p^*)^n \to A^*$ est dit r-analytique si sa restriction à chaque facteur $\mathcal{O}_p^*$ l'est.

Le lemme suivant est bien connu : voir par exemple [Bu, Lemme 8.2] pour le (i), le (ii) découle du fait qu'un caractère continu $\mathbb{Z}_p \to A^*$, A disons affinoide, est r-analytique pour r assez grand.

Lemme 2.6. (i) *Le foncteur des $\mathbb{Q}_p$-algèbres affinoides dans les groupes, associant à A le groupe des morphismes de groupes continus $T^0 \to A^*$, est représentable par un espace rigide analytique en groupes sur $\mathbb{Q}_p$ que l'on notera $\mathcal{W}$.*

On notera aussi $\chi : T^0 \to \mathcal{O}(\mathcal{W})^*$ le caractère universel, et si $V \subset \mathcal{W}$ désigne un ouvert affinoide, ou un point fermé, on notera enfin $\chi_V : T^0 \longrightarrow \mathcal{O}(V)^*$ le caractère induit par restriction.

(ii) *Un tel V étant fixé, il existe un plus petit entier r_V tel que χ_V est r-analytique pour tout $r \geq r_V$.*

En tant qu'espace rigide, $\mathcal{W}$ est une réunion disjointe de $|\mu|^n$ boules unités ouvertes de dimension $n[F_p : \mathbb{Q}_p]$, $\mu \subset F_p^*$ étant le sous-groupe des racines de l'unité. Si L est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}_p$ contenant F_p, la restriction à T^0 induit une inclusion $X^*(T) \subset \mathcal{W}(L)$. Soit $X^*(T)_{\mathrm{reg}} \subset X^*(T)$ le sous-monoïde des caractères B-dominants et *réguliers* (c'est-à-dire qui ne sont pas dans un mur, ou encore que les $(k_{\sigma,i})$ associés satisfont $k_{\sigma,i} > k_{\sigma,i+1}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}(F_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ et $1 \leq i < n$).

Lemme 2.7. *$X^*(T)$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}$ et $X^*(T)_{\mathrm{reg}}$ s'accumule en $X^*(T)$.*

Preuve — Pour le premier point on peut supposer $n = 1$, donc $T = \mathcal{O}_p^*$, auquel cas le résultat suit car μ est un groupe cyclique et donc l'un quelconque des plongements de F_p dans L engendre $\mathrm{Hom}(\mu, L^*)$.

Pour le second, on vérifie immédiatement que si $\kappa \in X^*(T)$ et si Ω est un voisinage ouvert affinoide de κ dans $\mathcal{W}$, disons même une boule, alors pour tout entier N assez grand on a (en notation additive)

$$\kappa + (q-1)p^N X^*(T)_{\mathrm{reg}} \subset X^*(T)_{\mathrm{reg}} \cap \Omega,$$

où $q := |\mathcal{O}_p/\varpi\mathcal{O}_p|$. Il est alors élémentaire de vérifier que le terme de gauche est Zariski-dense dans la boule Ω, par l'indépendance L-linéaire des plongements de F_p dans L. Le point est que si $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{O}_L^r$ est L-libre, et si $f \in L\langle z_1, \dots, z_r\rangle$ s'annule en tous les éléments du monoïde $\sum_{i=1}^r \mathbb{N}v_i$, alors $f = 0$. $\square$

2.8. **La série principale localement analytique et T^--stable d'un sous-groupe d'Iwahori.** Soit $\overline{N}_0$ le sous-groupe des éléments triangulaires *inférieurs* de I. Soit J l'ensemble des couples (i,j), avec $1 \leq i < j \leq n$, et soit

$$\phi : \mathcal{O}_p^J \to \overline{N}_0, \ (\phi(x))_{i,j} = \varpi x_{(i,j)},$$

la bijection évidente. Si A est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre affinoide, une fonction $f : \overline{N}_0 \to A$ est dite r-analytique si la composée de ϕ par f l'est, cela ne dépend pas du choix de ϖ intervenant dans ϕ. Ces fonctions forment une A-algèbre de Banach par transport de structure.

Afin de prolonger les caractères de T^0 en des caractères de B, nous aurons besoin de choisir une section du morphisme $T \to T/T^0$. Pour fixer les idées, notons $T^\varpi \subset T$ le sous-groupe constitué des

$$\mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \cdots, \varpi^{a_n}), \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

On a $T = T^\varpi \times T^0$ et si ψ est un caractère de T^0, nous noterons $\tilde{\psi}$ le caractère de B tel que $\widetilde{\psi}_{|T^0} = \psi$ et $\widetilde{\psi}(T^\varpi) = \widetilde{\psi}(N) = \{1\}$.

La série principale localement analytique et T^--stable de I peut être définie comme suit. Soit $V \subset \mathcal{W}$ un ouvert affinoide et $r \geq r_V$, on pose

$$\mathcal{C}(V,r) = \left\{ \begin{array}{l} f : IB \longrightarrow \mathcal{O}(V), \ f(xb) = \widetilde{\chi_V}(b)f(x) \ \ \forall\, x \in IB, \ b \in B, \\ \\ f_{|\overline{N}_0} \text{ est } r\text{-analytique.} \end{array} \right\}.$$

C'est un $\mathcal{O}(V)$-module que l'on munit de la norme $|f| := |f_{|\overline{N}_0}|$ héritée des fonctions r-analytiques sur $\overline{N}_0$, $\mathcal{O}(V)$ étant muni de sa norme sup. Le lemme suivant, essentiellement immédiat, résume les propriétés élémentaires de la famille $\{\mathcal{C}(V,r), V, r \geq r_V\}$ ainsi définie.

Lemme 2.9. (i) *L'application $f \mapsto f_{|\overline{N}_0}$ induit une isométrie $\mathcal{O}(V)$-linéaire de $\mathcal{C}(V,r)$ sur les fonctions r-analytiques $\mathcal{O}(V)$-valuées sur $\overline{N}_0$. En particulier, c'est un $\mathcal{O}(V)$-module orthonormalisable.*

(ii) *$\mathcal{C}(V,r)$ est munie d'une action $\mathcal{O}(V)$-linéaire de M par translations à gauche*

$$(m.f)(x) = f(m^{-1}x).$$

Les éléments de M agissent par des endomorphismes continus de norme ≤ 1, et pour tout $t \in T^{--}$, l'action de t sur $\mathcal{C}(V,r)$ est $\mathcal{O}(V)$-compacte.

(iii) *Si $V' \subset V$ est un ouvert affinoide ou un point fermé, la restriction $\mathcal{C}(V,r) \to \mathcal{C}(V',r)$ induit un isomorphisme M-équivariant*

$$\mathcal{C}(V,r)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(V)}\mathcal{O}(V') \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(V',r).$$

Si $r' \geq r$ l'inclusion naturelle $\mathcal{C}(V,r) \longrightarrow \mathcal{C}(V,r')$ est continue et $\mathcal{O}(V)[M]$-équivariante, $\mathcal{O}(V)$-compacte si de plus $r' > r$. Enfin, si $r \geq 1$ et $t \in T^{--}$, alors l'action de t se factorise par l'inclusion compacte $\mathcal{C}(V, r-1) \longrightarrow \mathcal{C}(V,r)$ ci-dessus.

Preuve — Le premier point du (i) vient de ce que la multiplication dans G induit une bijection (décomposition d'Iwahori) $\overline{N}_0 \times B \overset{\sim}{\to} IB$, et le reste du lemme 2.5. Remarquons que si $t \in T^-$, on a $t^{-1}\overline{N}_0 t \subset \overline{N}_0$, de sorte que $M^{-1}IB \subset IB$. Soit $i \in I$. La multiplication $n \mapsto in$ par i dans G et la décomposition d'Iwahori induisent une application

$$\overline{N}_0 \to \overline{N}_0 \times T^0 \times (N \cap I),\ n \mapsto (\alpha(n), \beta(n), \gamma(n)),$$

qui n'est que les $\mathcal{O}_p$-points d'un morphisme analogue défini au niveau des $\mathcal{O}_p$-schémas formels associés de manière évidente à $\overline{N}_0$, T^0 et $N \cap I$. En particulier via ϕ, $n \mapsto \alpha(n)$ est un automorphisme du $\mathcal{O}_p$-espace affine formel de rang $|J|$, de sorte que son action sur les fonctions préserve la r-analyticité pour tout r. De même, l'application $n \mapsto \beta(n)$ a la propriété que si $c : T^0 \to A^*$ est r-analytique, alors $n \mapsto c(\beta(n))$ est r-analytique sur $\overline{N}_0$. (Pour un calcul explicite des $\alpha(n)$ et $\beta(n)$, voir [Ch, §3]). Cela démontre le premier point du (ii). Le second point est standard si l'on remarque que

$$\forall\, t \in T^{--},\quad \phi^{-1}(t^{-1}\overline{N}_0 t) \subset p\,\mathcal{O}_p^J.$$

Le (iii) est une conséquence immédiate du (i). □

2.10. **Plongement des représentations algébriques de G dans la série principale.** Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\delta : T \longrightarrow L^*$ un caractère continu, étendu à B par $\delta(U) = \{1\}$. On note r_δ le plus petit entier r tel que $\delta_{|T^0}$ soit r-analytique. Soit

$$i_B^{IB}(\delta, r)$$

le L-Banach des fonctions $f : IB \to L$ dont la restriction à $\overline{N}_0$ est r-analytique et qui satisfont $f(xb) = \delta(b)f(x)$ pour tout $x \in IB$ et $b \in B$. Cet espace est encore muni d'une action continue L-linéaire de M par translations à gauche. Il coïncide avec $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, r)$ si $\delta_{|U}$ est trivial. En général, nous aurons besoin d'un sorite permettant de comparer $i_B^{IB}(\delta, r)$ et $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, r)$.

Soit $\delta' : T \longrightarrow L^*$ un caractère tel que $\delta'(T^0) = \{1\}$. Ce caractère se prolonge en un morphisme de monoïdes $\delta' : M \longrightarrow L^*$ par $\delta'(m) := \delta'(\tau(m))$ (lemme 2.3 (i)), dont on vérifie facilement qu'il s'étend de manière unique en une fonction $\delta' : M^{-1}B = IB \to L^*$ telle que $\delta'(m^{-1}tn) = \delta'(m)^{-1}\delta'(t)$ pour tout $m \in M$, $t \in T$ et $n \in N$. Si $r \geq r_\delta$, on dispose donc d'une bijection naturelle

$$i_B^{IB}(\delta, r) \longrightarrow i_B^{IB}(\delta\delta', r),\ f \mapsto (x \mapsto \delta'(x)f(x)),$$

dont on vérifie immédiatement qu'elle induit une isométrie M-équivariante

$$(i_B^{IB}(\delta, r)) \otimes \delta'^{-1} \longrightarrow i_B^{IB}(\delta\delta', r). \tag{2.1}$$

Supposons jusqu'à la fin de ce paragraphe que $\delta \in X^*(T)$ est un caractère algébrique dominant, auquel cas $r_\delta = 0$. Soit W_δ la L-représentation de G de plus haut poids δ, elle est irréductible et absolument simple. Le choix d'un vecteur $v \in W_\delta$ de plus haut poids fournit un morphisme $L[M]$-équivariant non nul, donc injectif,

$$W_\delta^* \longrightarrow i_B^{IB}(\delta, 0),\ \varphi \mapsto (x \mapsto \varphi(x(v))).$$

On déduit alors de (2.1) le lemme suivant.

Lemme 2.11. *Soit δ^{ϖ} le caractère de T trivial sur T^0 et coïncidant avec δ sur T^{ϖ}. Il existe un plongement $L[M]$-équivariant*

$$W_{\delta}^{*} \otimes \delta^{\varpi} \longrightarrow \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0) = i_B^{IB}(\delta, 0) \otimes \delta^{\varpi}.$$

En fait, le sous-espace de $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)$ ainsi défini est exactement le sous-espace des fonctions sur IB qui sont la restriction d'un fonction polynomiale sur G (vu comme $\mathbb{Q}_p$-groupe).

Nous allons terminer ce paragraphe en introduisant un sous-espace intermédiaire entre W_{δ}^{*} et $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)$. Supposons que L contienne une clôture galoisienne de F_p. Pour chaque $j \in J$ et $\sigma \in \mathrm{Hom}(F_p, L)$, on dispose d'une fonction $\sigma_j : F_p^J \to L$, $(x_i) \mapsto \sigma(x_j)$. Ces éléments forment une base du L-espace vectoriel des applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires de F_p^J dans L. Disons qu'une fonction $f : \mathcal{O}_p^J \to L$ est $\sharp$-analytique si c'est la restriction à $\mathcal{O}_p^J$ d'un élément de l'algèbre de Tate sur les σ_j :

$$L\langle\ \{\sigma_j\}_{(j,\sigma) \in J \times \mathrm{Hom}(F_p, L)}\ \rangle.$$

Par transport de structure via ϕ, cela nous fournit une notion de fonction $\sharp$-analytique sur $\overline{N}_0$, elles forment une L-algèbre de Banach pour la norme de Gauss de l'algèbre ci-dessus. On peut considérer l'espace

$$\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp} = \left\{ \begin{array}{l} f : IB \longrightarrow L,\ f(xb) = \widetilde{\delta_{|T^0}}(b) f(x) \quad \forall\, x \in IB,\ b \in B, \\ \\ f_{|\overline{N}_0} \text{ est } \sharp\text{-analytique.} \end{array} \right\}.$$

C'est un L-Banach pour la norme introduite plus haut sur les fonctions $\sharp$-analytiques. Une fonction $\sharp$-analytique étant 0-analytique, et une fonction polynomiale sur G étant $\sharp$-analytique, on a des inclusions $W_{\delta}^{*} \otimes \delta^{\varpi} \subset \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp} \subset \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)$. Quand F_p est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$ cette dernière inclusion est une égalité, mais pas en général.

Lemme 2.12. (i) *$\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)$ stable par M.*

(ii) *Les éléments de M sont de norme ≤ 1 sur $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp}$ et ceux de T^{--} sont compacts.*

(iii) *Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in T^{--}$ et $f \in \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)$, alors $t^m(f) \in \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp}$.*

Preuve — Les arguments donnés au (i) et (ii) du lemme 2.9 montrent que $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp}$ est stable par M, ainsi que le (ii) ci-dessus. L'assertion de densité dans le (i) vient de ce que les fonctions $\mathbb{Z}_p$-polynomiales $\mathcal{O}_p^J \to L$ sont denses dans les fonctions 0-analytiques, et sont $\sharp$-analytiques. Le sous-$\mathcal{O}_L$-module

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(F_p, L)} \mathcal{O}_L \sigma \ \subset\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_L)$$

est un $\mathcal{O}_L$-réseau par indépendance linéaire des $[F_p : \mathbb{Q}_p]$ plongements. On en déduit que (iii) est satisfait pour tout entier m tel que l'indice de ce réseau divise p^m. $\square$

L'intérêt de l'espace $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp}$ est qu'il admet une présentation simple, la *présentation de Plücker*, permettant d'obtenir des estimées raisonnablement précises des normes des éléments $m \in M$ agissant sur $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp}/W_{\delta}^{*}$. Cette présentation, classique pour les W_{δ} et introduite dans [Ch] pour la série principale analytique de GL_n, est la présentation obtenue en plongeant la variété des drapeaux complets de GL_n sur $\mathcal{O}_p$ dans le produit des espaces projectifs des $\Lambda^i(\mathcal{O}_p^n)$ (plongement de Plücker). Considérons à cet effet la décomposition de δ en poids fondamentaux :

$$\delta = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(F_p, L), 1 \leq i \leq n} \delta_{i,\sigma}$$

où $\delta_{i,\sigma}$ est le plus haut poids de la puissance symétrique $(k_{i,\sigma}-k_{i+1,\sigma})$-ième de la représentation fondamentale

$$\mathrm{GL}_n(F_p) \xrightarrow{\Lambda^i} \mathrm{GL}(\Lambda^i(F_p^n)) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{GL}(\Lambda^i(L^n))$$

(on conviendra que $k_{n+1,\sigma}=0$ pour tout σ).

Lemme 2.13. *Pour chaque $\sigma \in \mathrm{Hom}(F_p, L)$ et $1 \leq i \leq n$ il existe un L-Banach $P_{i,\sigma}$ muni d'une action linéaire continue de M par éléments de norme ≤ 1, ayant les propriétés suivantes :*

(i) *Il existe un diagramme commutatif de $L[M]$-modules de Banach,*

$$\begin{tikzcd} \otimes_{i,\sigma}(W^*_{\delta_{i,\sigma}} \otimes \delta^{\varpi}_{i,\sigma}) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\otimes}_{i,\sigma} P_{i,\sigma} \arrow[d] \\ W^*_{\delta} \otimes \delta^{\varpi} \arrow[r] & \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^{\sharp} \end{tikzcd} ,$$

les flèches verticales (resp. horizontales) étant surjectives (resp. injectives).

(ii) *T^{--} agit sur les $P_{i,\sigma}$ par des opérateurs compacts.*

(iii) *Si $i<n$ et [9] $m \in It_1t_2\cdots t_iI \subset M$, alors $\frac{m}{\varpi^{k_{i,\sigma}-k_{i+1,\sigma}+1}}$ est de norme ≤ 1 sur*

$$P_{i,\sigma}/(W^*_{i,\sigma} \otimes \delta^{\varpi}_{i,\sigma}).$$

Preuve — Définissons tout d'abord $P_{i,\sigma}$. Soit $1 \leq i \leq n$. Soient $G_i = \mathrm{GL}(\Lambda^i(F_p^n))$, $R_i = \Lambda^i(\mathcal{O}_p^n)$ et écrivons

$$R_i = \mathcal{O}_p e \oplus R'$$

une décomposition en $\mathcal{O}_p$-modules T^0-stables telle que e est un vecteur de plus haut poids de $R_i[1/p]$, vu comme F_p-représentation de $\mathrm{GL}_n(F_p)$ muni du Borel supérieur. Soient B_i le stabilisateur de $F_p e$ dans G_i, $\overline{B}_i$ le parabolique opposé pour la décomposition de R_i ci-dessus, I_i le sous-groupe parahorique des éléments $g \in G_i$ tels que $g(R_i) \subset R_i$ et $g(e) \in \mathcal{O}_p e + \varpi R_i$, et enfin $\overline{N}_i$ le sous-groupe des éléments unipotents de $\overline{B}_i \cap I_i$. L'application

$$g \mapsto \frac{g(e)-e}{\varpi}$$

identifie $\overline{N}_i$ à R'. On notera $\mathcal{O}(\overline{N}_i)$ l'algèbre de Tate des fonctions F_p-analytiques $\overline{N}_i \to F_p$, c'est-à-dire $F_p\langle u_1, \cdots, u_s\rangle$ où (u_i) est une $\mathcal{O}_p$-base du $\mathcal{O}_p$-dual de R'. Soient $\delta' : B_i \to F_p^*$ le caractère de B_i sur $F_p\, e$ et $m \in \mathbb{Z}$. On pose

$$P_i(m) = \left\{ \begin{array}{l} f : I_iB_i \longrightarrow F_p,\ f(xb) = \delta'(b)^m f(x) \quad \forall\ x \in I_iB_i,\ b \in B_i, \\ \\ f_{|\overline{N}_i} \in \mathcal{O}(\overline{N}_i). \end{array} \right\}.$$

C'est un F_p-Banach isométrique à $\mathcal{O}(\overline{N}_i)$ (via $f \mapsto f_{|\overline{N}_i}$) qui est muni d'une action continue du sous-monoïde de G_i préservant I_iB_i par translations à gauche, et que l'on restreint via Λ^i en une représentation de M. On pose alors

$$P_{i,\sigma} := (P_i(k_{i,\sigma}-k_{i+1,\sigma}) \otimes_\sigma L) \otimes \delta^{\varpi}_{i,\sigma}.$$

Par construction, $P_{i,\sigma}$ contient $W^*_{\delta_{i,\sigma}} \otimes \delta_{i,\sigma}$ comme sous-$L[M]$-module des fonctions F_p-polynomiales. De plus, on dispose d'une application naturelle $L[M]$-équivariante

$$((f_{i,\sigma} \otimes_\sigma 1)_{i,\sigma}) \to (x \mapsto \prod_{i,\sigma} \sigma(f_{i,\sigma}(\Lambda^i(x)))),\ \widehat{\otimes}_{i,\sigma} P_{i,\sigma} \to \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0). \tag{2.2}$$

[9] Comme au §1.4, on note $t_i \in T$ l'élément diagonal valant ϖ à la place i et 1 ailleurs.

L'application $(\Lambda^i)_{i=1\dots n} : \overline{N}_0 \to \prod_i \overline{N}_i$ étant induite par une immersion fermée de schémas formels sur $\mathcal{O}_p$, l'image de l'application (2.2) est exactement le sous-espace $\mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^\sharp$. De plus, l'application obtenue

$$\widehat{\otimes}_{i,\sigma} P_{i,\sigma} \to \mathcal{C}(\delta_{|T^0}, 0)^\sharp$$

est continue de norme ≤ 1. Nous avons donc construit la flèche verticale de droite du diagramme du (i). Cette flèche induit par construction la surjection de Plücker sur les sous-espaces de fonctions polynomiales, ce qui démontre le (i). L'assertion (ii) est immédiate.

L'assertion (iii) est conséquence du fait trivial suivant : si un endomorphisme continu θ de la F_p-algèbre de Tate $V := F_p\langle u_1, \cdots, u_s\rangle$ est tel que pour tout $i = 1 \dots s$,

$$\theta(u_i) \in \varpi(\sum_{j=1}^{s} \mathcal{O}_p u_j),$$

et si $V_n \subset V$ est le sous-espace des polynômes de degré total $\leq n$ en les u_i, alors la norme de θ/ϖ^{n+1} sur V/V_n est ≤ 1. $\square$

2.14. **Extension de ces constructions au cas du groupe $U(F_{S_p})$.** Pour chaque place $v \in S_p$, choisissons une place $\tilde{v}$ de $\mathcal{K}$ divisant p, ce qui nous permet d'identifier une fois pour toutes F_v à $\mathcal{K}_{\tilde{v}}$ et $U(F_v)$ à $\mathrm{GL}_n(F_v)$ (cf. §1.1). Les constructions des paragraphes 2.2 à 2.10 s'appliquent et nous fournissent des objets que nous noterons dès à présent par les même symboles mais indicés par les $v \in S_p$. Pour les groupes ou monoïdes en jeu, le symbole $*$ sans indice sera désormais utilisé pour désigner le produit sur tous les $v \in S_p$ des $*_v$. Par exemple,

$$T = \prod_{v \in S_p} T_v, \ \ I = \prod_{v \in S_p} I_v, \ \text{ etc...}$$

Cela nous fournit des G, B, N, T, I, M, ainsi que leurs décorations précédemment introduites. On désignera aussi par $\mathcal{W}$ le produit $\prod_{v\in S_p} \mathcal{W}_v$. Ces notations sont alors compatibles avec celle du §1. On pose de plus $\mathfrak{A}^- = \otimes_{v\in S_p} \mathfrak{A}_v^-$ et

$$\mathcal{C}(\prod_v V_v, r) := \widehat{\otimes}_v \mathcal{C}(V_v, r).$$

La formation des $\mathcal{C}(V_v, r)$ commutant à l'extension des scalaires complétée $V' \subset V$, la définition de $\mathcal{C}(V, r)$ ci-dessus s'étend aux ouverts affinoides $V \subset \mathcal{W}$ qui ne sont pas nécessairement des produits d'ouverts affinoides. Tout ce qui a été dit au §2.8 sur les représentations $\mathcal{C}(V_v, r)$ des M_v s'étend trivialement aux $\mathcal{C}(V, r)$ vus comme $\mathcal{O}(V)[M]$-modules.

2.15. **Formes automorphes p-adiques de U de type (S_p, W_∞, e, $\mathcal{H}$).** Le travail local précédemment effectué nous permet enfin de définir les formes automorphes p-adiques de U qui nous intéressent.

La représentation W_∞ donnée peut être vue comme une représentation algébrique du $\mathbb{Q}_p$-groupe $\prod_{v\notin S_p} U(F_v)$ qui est définie sur L, via ι_p et ι_∞. On pose

$$\mathcal{H}^- := \mathfrak{A}^- \otimes \mathcal{H}.$$

Soit $I = \prod_{v\in S_p} K_v$. Choisissons un sous-groupe compact ouvert $I \times K' \subset K$ suffisament petit de sorte que $e \in E[U(\mathbb{A}_{F,f}^{S_p})//K']$ et que K'_v soit sans torsion à au moins une place v.

Il sera commode d'introduire le foncteur $F : \mathrm{Mod}(L[M]) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathfrak{A}^- \otimes E[U(\mathbb{A}_{F,f}^{S_p})//K'])$ défini par

$$F(E) := \left\{ \begin{array}{l} f : U(F)\backslash U(\mathbb{A}_{F,f}) \longrightarrow E \otimes_L W_\infty^*, \\ \\ f(gk) = (\prod_{v|p} k_v)^{-1} f(g), \ \forall g \in U(\mathbb{A}_{F,f}), \ \forall\, k \in I \times K'. \end{array} \right\}$$

L'ensemble $U(F)\backslash U(\mathbb{A}_{F,f})/(I \times K')$ est fini par finitude du nombre de classes [Bo], notons h son cardinal et choisissons une décomposition

$$U(\mathbb{A}_{F,f}) = \coprod_{i=1}^{h} U(F) x_i (I \times K').$$

Les groupes $x_i^{-1} U(F) x_i \cap (I \times K')$ sont finis (car $U(F_v)$ est compact si v est archimédienne) et sans torsion, donc triviaux. L'application $f \mapsto (f(x_1), \cdots, f(x_h))$ induit donc un isomorphisme L-linéaire

$$F(E) \overset{\sim}{\rightarrow} E^h. \tag{2.3}$$

En particulier $F(E)$, ainsi que son facteur direct $eF(E)$, héritent de la plupart des propriétés supplémentaires satisfaites par E. Par exemple, si E est muni d'une norme $|.|$ de L-espace vectoriel, il en va de même de $eF(E)$ en posant

$$|f| := \sup_{x \in U(\mathbb{A}_{F,f})} |f(x)| = \sup_{i=1\ldots h} |f(x_i)|.$$

Si M agit par éléments de norme ≤ 1 sur E, l'espace normé $eF(E)$ est un facteur direct topologique de $F(E) \overset{\sim}{\rightarrow} E^h$, et si de plus $t \in T^-$ est de norme $\leq s$ sur E, alors $\mathbb{1}_t$ est aussi de norme $\leq s$ sur $eF(E)$.

Soit $V \subset \mathcal{W}$ un ouvert affinoide ou un point fermé, et soit $r \geq r_V$. On définit un $\mathcal{H}^-$-module en posant

$$\mathcal{S}(V, r) := eF(\mathcal{C}(V, r)).$$

C'est la définition que nous adoptons pour l'espace des *formes automorphes p-adiques de U de type (S_p, W_∞, e), rayon de convergence r et de poids dans V*. C'est un $\mathcal{O}(V)$-module de Banach pour la norme qu'il hérite de $\mathcal{C}(V, r)$ comme plus haut, qui est facteur direct topologique d'un $\mathcal{O}(V)$-Banach orthonormalisable (c'est la condition (Pr) de [Bu, p. 72]). Il est muni d'une action $\mathcal{O}(V)$-linéaire de $\mathcal{H}^-$ telle que chaque $h \in \mathcal{H}^-$ est borné par 1 et chaque $t \in T^{--}$ est $\mathcal{O}(V)$-compact. La formule (2.3) assure que la collection des espaces $\{\mathcal{S}(V, r), V, r \geq r_V\}$ satisfait des compatibilités analogues à celles des $\{\mathcal{C}(V, r),\ V,\ r \geq r_V\}$ quand V et r varient (lemme 2.9).

2.16. **Formes automorphes classiques et critère de classicité.** Soit $\delta \in X^*(T) \subset \mathcal{W}(L)$ un caractère dominant relativement au $\mathbb{Q}_p$-sous-groupe de Borel B, en particulier $r_\delta = 0$. Il est bien connu, et trivial de vérifier, que la donnée de ι_p et ι_∞ réalise le $\mathcal{H}^-$-module $eF(W_\delta^*)$ est comme une L-structure du $\mathcal{H}^-$module des formes automorphes complexes

$$\bigoplus_{\Pi \in \mathcal{A}, \Pi_\infty \simeq_\iota W_\delta \otimes W_\infty} m(\Pi) e(\Pi_f)^{K_{S_p}}.$$

(voir par exemple [Ch, §4.2].) De plus, le lemme 2.11 fournit une inclusion naturelle $\mathcal{H}^-$-équivariante

$$eF(W_\delta^*) \otimes \delta^\varpi \hookrightarrow \mathcal{S}(\delta, 0) = eF(\delta, 0), \tag{2.4}$$

le caractère δ^ϖ de T/T^0 étant vu comme un caractère de M via le lemme 2.3 (ii), dont l'image est en général appelée *l'espace des formes automorphes p-adiques classiques* de poids δ.

Dans le reste de ce paragraphe nous allons établir le *critère de classicité*, qui est un critère assurant qu'un élément $f \in \mathcal{S}(\delta, r)$ est classique, *i.e.* qu'il appartient à $eF(W_\delta^*)$. Une condition nécessaire est qu'il soit *de pente finie* aux places v divisant S_p. Rappelons qu'un élément $f \in \mathcal{S}(\delta, r)$ est dit de pente finie si pour un $t \in T^{--}$ (vu comme élément de $\mathfrak{A}^-$) :

- le sous-espace $L[t].f \subset \mathcal{S}(\delta, r)$ est de dimension finie,
- et $t_{|L[t].f}$ est inversible.

Comme un tel t agit de manière compacte sur $\mathcal{S}(\delta, r)$, et comme $\mathfrak{A}^-$ est commutative, cela entraîne que le sous-espace $\mathfrak{A}^-.f$ est de dimension finie sur L, stable par t, et que la restriction de t y est inversible. On vérifie immédiatement que si f est de pente finie, alors pour tout $t \in T^{--}$, $L[t].f$ est de dimension finie et $t_{|L[t].f}$ est inversible. Par conséquent les éléments de pente finie forment un sous-L-espace vectoriel

$$\mathcal{S}(\delta, r)^{\mathrm{fs}} \subset \mathcal{S}(\delta, r),$$

sur lequel tous les éléments de T^- sont inversibles. En particulier, $\mathcal{S}(\delta, r)^{\mathrm{fs}}$ s'étend naturellement en un $\mathfrak{A}$-module et

$$eF(W_\delta^*) \otimes \delta^\varpi \subset \mathcal{S}(\underline{k}, r)^{\mathrm{fs}}$$

en est un sous-$\mathfrak{A}$-module. Rappelons que l'on a défini au §1.4 des éléments $t_{i,v} \in T_v$ pour $v \in S_p$ et $1 \leq i \leq n$, on les verra aussi comme des éléments de $\mathfrak{A}_v$ (lemme 2.3 (ii)). On a aussi défini loc. cit. des $k_{i,\sigma} \in \mathbb{Z}$ associés à δ.

Proposition 2.17. *Soit $f \in \mathcal{S}(\delta, r)^{\mathrm{fs}} \otimes_L \overline{\mathbb{Q}}_p$ une forme propre pour tous les éléments de $\mathfrak{A}$. Pour $v \in S_p$ et $i = 1, \ldots, n$ écrivons $t_{i,v}(f) = \varphi_{i,v} f$ avec $\varphi_{i,v} \in \overline{\mathbb{Q}}_p^*$. Supposons*

$$\frac{\mathbf{v}(\varphi_{1,v}\varphi_{2,v}\cdots\varphi_{i,v})}{\mathbf{v}(\varpi_v)} < k_{i,\sigma} - k_{i+1,\sigma} + 1,$$

pour tout $v \in S_p$, $1 \leq i < n$ et $\sigma \in \mathrm{Hom}(F_v, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, alors f est classique.

Plus précisément, le sous-espace caractéristique tout entier de f sous l'action de $\mathfrak{A}$ est inclus dans $eF(W_\delta^*)$.

Nous renvoyons à [BCh, §7.3.5] pour une discussion de ce résultat. La preuve que nous donnons est une légère variante de celle donnée loc. cit, elle-même issue de [Ch, Prop. 4.7.4], reposant sur les propriétés de la présentation de Plücker (lemme 2.13).

Preuve — En raisonnant comme dans [BCh, §7.3.5], on peut supposer que $e = \mathbb{1}_{K'}$, c'est à dire que $eF(E) = F(E)$, et aussi que $r = 0$ par un argument de série caractéristique dû à Coleman. D'après le lemme 2.12,

$$\mathcal{S}(\delta, 0)^{\mathrm{fs}} \subset \mathcal{S}(\delta, 0)^\sharp := F(\mathcal{C}(\delta, 0)^\sharp).$$

Le foncteur F étant exact, l'image par F du diagramme du lemme 2.13 (i) nous fournit un diagramme commutatif de $\mathcal{H}^- \otimes L$-modules

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & F(B) \arrow[d, two heads] \\ F(W_\delta^*) \otimes \delta^\varpi \arrow[r] & \mathcal{S}(\delta, 0)^\sharp \end{tikzcd}$$

où $A = \otimes_{i,\sigma}(W_{\delta_{i,\sigma}}^* \otimes \delta_{i,\sigma}^\varpi)$ et $B = \widehat{\otimes}_{i,\sigma} P_{i,\sigma}$, les flèches verticales (resp. horizontales) étant surjectives (resp. injectives).

Soit $\psi : \mathfrak{A}^- \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ le système de valeurs propres associé à la forme f de l'énoncé ; si V est un $\mathfrak{A}^-$-module, on désignera par $V[\psi] \subset V$ le sous-espace caractéristique associé à ψ.

Comme T^{--} agit par opérateurs compacts sur B, la surjection de droite ci-dessus induit encore une surjection $F(B)[\psi] \to \mathcal{S}(\delta,0)^\sharp[\psi]$. On a une injection naturelle :

$$B/A \hookrightarrow \prod_{(i,\sigma)} C_{i,\sigma}, \quad \text{où} \quad C_{i,\sigma} := (\widehat{\otimes}_{(i',\sigma')\neq(i,\sigma)} P_{i',\sigma'})\widehat{\otimes}(P_{i,\sigma}/(W^*_{\delta_{i,\sigma}} \otimes \delta^{\varpi}_{i,\sigma})),$$

et une injection similaire de $\mathcal{H}^-$-modules qui s'en déduit en appliquant F, de sorte qu'il suffit de montrer que $F(C_{i,\sigma})[\psi] = 0$ pour tout i et σ. C'est évident si $i = n$ car $C_{n,\sigma} = 0$. Si $i < n$ cela découle exactement de l'estimée de la norme de l'élément $t_{1,v}t_{2,v}\dots t_{i,v} \in \mathfrak{A}^-$ donnée par le lemme 2.13 (iii), $v \in S_p$ étant la place induite par σ. □

2.18. **Fin de la démonstration.** La méthode de Coleman et Coleman-Mazur [CM] permet de construire formellement la variété de Hecke X à partir de l'action de $\mathcal{H}^-$ sur la famille des modules de Banach $\mathcal{S}(V,r)$, avec $V \subset \mathcal{W}$ et $r \geq r_V$. L'existence de (X, ψ, ν, Z) comme dans le théorème 1.6 satisfaisant (i) à (vi) découle de manière standard de cette construction, de la proposition 2.17 et du lemme 2.7 : on choisit n'importe quel élément dans T^{--} et on construit X au dessus de l'hypersurface de Fredholm de cet élément. On renvoie à [CM], [Ch, §6.3], [Bu] et [BCh, §7.3.6] pour plus de détails. L'assertion d'unicité est [Ch, prop. 7.2.8].

3. Famille de pseudo-caractères galoisiens sur les variétés de Hecke

Dans cette section, nous donnons une application galoisienne des constructions précédentes qui sera utilisée dans [ChH].

3.1. **Hypothèses et énoncé du résultat.** Plaçons nous dans le contexte simplifié où

- $[F:\mathbb{Q}]$ est pair,
- $\mathcal{K}/F$ est non ramifiée à toutes les places finies de $\mathcal{K}$,
- n est pair,
- au moins une place de F divisant p se décompose dans $\mathcal{K}$.

On choisit l'ensemble S_p non vide et quelconque comme au §1.1 et on notera de plus S'_p le complémentaire de S_p dans l'ensemble des places de F divisant p. Par abus de langage, on verra parfois S_p et S'_p comme des ensembles de places de $\mathcal{K}$ (celles au dessus de S_p et S'_p respectivement).

Par le principe de Hasse pour les groupes unitaires, il existe un (unique) groupe unitaire U à n variables attaché à $\mathcal{K}/F$ qui est quasi-déployé à toutes les places finies de F et tel que $U(F_v)$ est compact pour toute place archimédienne v de F. Par exemple, si $N(.)$ désigne la norme de $\mathcal{K}$ sur F, le groupe unitaire associé à la forme hermitienne $\sum_{i=1}^n N(z_i)$ sur $\mathcal{K}^n$ convient quand n est multiple de 4.

Soit $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des représentations automorphes Π de U qui sont non ramifiées aux places finies de F non décomposées dans $\mathcal{K}$ et telles que Π_v a des Iwahori-invariants non nuls pour chaque $v \in S_p$. Remarquons le changement de base local à GL_n est bien défini pour les composantes locales des éléments Π de $\mathcal{A}_0$, et on posera

$$\mathrm{BC}(\Pi) := \bigotimes_v{}' \mathrm{BC}(\Pi_v),$$

c'est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathcal{K}})$. Soit $\mathcal{A}_0^{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{A}_0$ le sous-ensemble des Π tels que *pour au moins une place archimédienne* v de F, le poids extrémal de la représentation de dimension finie Π_v de $U(F_v)$ n'est dans aucun mur d'une chambre de Weyl. D'après un résultat de Labesse [Lab, Cor. 5.4], pour toute représentation $\Pi \in \mathcal{A}_0^{\mathrm{reg}}$ alors $\mathrm{BC}(\Pi)$

est une représentation automorphe (non nécessairement discrète). Rappelons le théorème collectif suivant, combinant des énoncés démontrés dans les livres 1 et 2 et par S.W. Shin (voir [ChH, Thm. 1.4], [Shin]).

Si π_v est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K}_v)$, nous désignons par $\mathcal{L}(\pi_v)$ la représentation de Weil-Deligne associée par la correspondance de Langlands locale (normalisée comme dans [ChH], et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si π_v l'est) et par $\mathcal{L}_W(\pi_v) : W_{\mathcal{K}_v} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la représentation (semi-simple) du groupe de Weil $W_{\mathcal{K}_v}$ de $\mathcal{K}_v$ associée.

Théorème 3.2. *Soit* $\Pi \in \mathcal{A}_0^{\mathrm{reg}}$, $\pi := \mathrm{BC}(\Pi)$. *Il existe une unique représentation*

$$\rho_\Pi : \Gamma_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p),$$

semi-simple et continue, telle que :

(a) *Pour toute place finie* v *de* $\mathcal{K}$ *première à* p,

$$((\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}})^{F-ss} \simeq \iota_p \iota_\infty^{-1} \mathcal{L}(\pi_v|\bullet|^{\frac{1-n}{2}}).$$

(b) *Pour toute place finie* v *de* $\mathcal{K}$ *divisant* p, $(\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est de de Rham et à poids de Hodge-Tate distincts déterminés par* Π_∞ *(voir* [ChH, §1.5] *pour la recette).*

(c) *Soit* v *une place finie de* $\mathcal{K}$ *divisant* p *telle que* π_v *ait des Iwahori-invariants. Alors* $(\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est semi-stable.*

(d) *Soit* v *une place finie de* $\mathcal{K}$ *divisant* p *telle que* π_v *soit non ramifiée. Alors* $\rho_v := (\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est crystalline, et si* φ_v *désigne la plus petite puissance linéaire*[10] *du Frobenius cristallin de* $D_{\mathrm{cris}}(\rho_v)$, *on a l'égalité dans* $\overline{\mathbb{Q}}_p[T]$ *:*

$$\det(T - \varphi_v) = \iota_p \iota_\infty^{-1} \det(T - \mathcal{L}_W(\pi_v|\bullet|^{\frac{1-n}{2}})(\mathrm{Frob}_v)).$$

Le reste de cet article est consacré à la preuve du résultat suivant :

Théorème 3.3. *Soit* $\Pi \in \mathcal{A}_0$, $\pi = \mathrm{BC}(\Pi)$. *Il existe une unique représentation*

$$\rho_\Pi : \Gamma_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p),$$

semi-simple et continue, telle que :

(a') *Pour toute place finie* v *de* $\mathcal{K}$ *première à* p,

$$((\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}})^{ss} \simeq \iota_p {\iota_\infty}^{-1} \mathcal{L}_W(\pi_v \otimes |\bullet|^{\frac{1-n}{2}}).$$

De plus, $(\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est non ramifiée si* π_v *l'est.*

(b) *Pour toute place finie* $v \in S'_p$, $(\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est de de Rham et à poids de Hodge-Tate distincts déterminés par les* Π_w *avec* $w \in \Sigma_\infty(v)$ *(même recette).*

(c) *Soit* $v \in S'_p$ *telle que* π_v *ait des Iwahori-invariants. Alors* $(\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est semi-stable.*

(d) *Soit* $v \in S'_p$ *telle que* π_v *soit non ramifiée. Alors* $\rho_v := (\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est crystalline, et si* φ_v *désigne la plus petite puissance linéaire*[11] *du Frobenius cristallin de* $D_{\mathrm{cris}}(\rho_v)$, *on a l'égalité dans* $\overline{\mathbb{Q}}_p[T]$ *:*

$$\det(T - \varphi_v) = \iota_p {\iota_\infty}^{-1} \det(T - \mathcal{L}_W(\pi_v|\bullet|^{\frac{1-n}{2}})(\mathrm{Frob}_v)).$$

(e) *Si* $v \in S_p$, *alors* $(\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ *est de Hodge-Tate, à poids distincts et déterminés par les* Π_w *avec* $w \in \Sigma_\infty(v)$ *(même recette).*

[10] Autrement dit, $\varphi_v = F^r$ où F est le Frobenius cristallin et r le degré du corps résiduel de F_v.

[11] Autrement dit, $\varphi_v = F^r$ où F est le Frobenius cristallin et r le degré du corps résiduel de F_v.

Nous allons en fait démontrer un raffinement du théorème 3.3 (a'). Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des représentations irréductibles continues de $W_{\mathcal{K}_v}$, prises à isomorphisme et torsion par un caractère non ramifié près. Si ρ est une représentation de Weil-Deligne de $\mathcal{K}_v$,

$$\rho = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}} \rho[\sigma]$$

où $\rho[\sigma]$ est la plus grande sous-représentation de ρ dont les facteurs de Jordan-Hölder sont des torsions non ramifiées de σ. De plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{I}$, il existe une unique suite décroissante d'entiers positifs ou nuls $m_1(\sigma) \geq m_2(\sigma) \geq \cdots$, et des caractères non ramifiés χ_i, tels que

$$\rho[\sigma] = \bigoplus_{i=1} \sigma_i(m_i(\sigma)), \quad \sigma_i := \sigma \otimes \chi_i,$$

où la notation $\sigma(m)$ désigne la représentation de Weil-Deligne indécomposable de longueur m et de sous-représentation simple σ. On verra cette suite $(m_i(\sigma))$ comme une partition $p(\rho, \sigma)$ de l'entier $\dim(\rho[\sigma])/\dim(\sigma)$. On note $\prec$ la relation de dominance usuelle sur les partitions ([Mac, §1]).

Définition 3.4. *Si ρ et ρ' sont des représentations de Weil-Deligne de $\mathcal{K}_v$, on note $\rho \prec \rho'$ si ρ et ρ' ont même semi-simplifiée et si de plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{I}$, on a $p(\rho, \sigma) \prec p(\rho', \sigma)$.*

Des méthodes de Bellaïche-Chenevier [BCh] §6.5 et §7.8 permettent de démontrer l'assertion suivante de compatibilité locale-globale aux places premières à p :

Théorème 3.5. *Soit $\Pi \in \mathcal{A}_0$, $\pi = \mathrm{BC}(\Pi)$. Pour toute place finie v de $\mathcal{K}$ première à p,*

$$(\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}} \prec \iota_p {\iota_\infty}^{-1} \mathcal{L}(\pi_v \otimes |\bullet|^{\frac{1-n}{2}}).$$

3.6. **Choix de la variété de Hecke.** En vue de démontrer ces deux résultats, fixons dorénavant un $\Pi_0 \in \mathcal{A}_0$. Considérons la variété de Hecke *minimale* contenant Π_0 (voir [BCh, Example 7.5.1]), c'est à dire que nous faisons les choix suivants pour $(W_\infty, \mathcal{H}, e)$:

- $W_\infty := \bigotimes_{v \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{R}) \setminus \Sigma_\infty(w)} (\Pi_0)_v$.
- S est l'ensemble des places finies de F telles que Π_v est ramifiée et $v \notin S_p$. Pour chaque $v \in S$ (nécessairement $U(F_v) \simeq \mathrm{GL}_n(F_v)$), on fixe une composante connexe de Bernstein $\mathcal{B}_v$ de la catégorie des représentations lisses de $U(F_v)$.
- D'après l'extension par Schneider et Zink [SZ, Prop. 6.2] de résultats de Bushnell-Kutzko, on peut choisir un idempotent e_v de l'algèbre de Hecke de $U(F_v)$ (en fait associé à un K-type) de sorte que :
  - $b_v e_v = e_v$ où b_v est l'idempotent central de Bernstein associé à $\mathcal{B}_v$,
  - $e_v((\Pi_0)_v) \neq 0$,
  - pour toute irréductible π de $\mathcal{B}_v$, si $e_v(\pi) \neq 0$ alors $\mathcal{L}(\pi) \prec_I \mathcal{L}((\Pi_0)_v)$.

  Nous renvoyons au §3.10 pour la notation $\prec_I$, ainsi qu'à [BCh, §6.5] pour cette traduction des résultats de [SZ].

On choisit le corps de coefficients E de sorte que $\mathcal{B}_v$, son point base, e_v, ainsi que le centre de Bernstein $\mathfrak{z}_v$ de $\mathcal{B}_v$, soient tous définis sur E. On choisit enfin pour algèbre de Hecke la E-algèbre

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{S \cup S_p} \otimes (\bigotimes_{v \in S} \mathfrak{z}_v)$$

(le premier produit tensoriel étant sur $\mathbb{Z}$ et le second sur E).

Définition 3.7. *(X, ψ, ν, Z) désignera la variété de Hecke de U associée aux données $(S_p, W_\infty, \mathcal{H}, e)$ ci-dessus.*

Sous les hypothèses ci-dessus, l'ensemble $\mathcal{A}$ associé est le sous-ensemble des représentations automorphes Π de $\mathcal{A}_0$ telles que pour tout $v \in S$, Π_v est dans la composante de Bernstein $\mathcal{B}_v$ et dominée par $(\Pi_0)_v$. Par construction, si ψ est un système de valeurs propres de $\mathcal{H}$ associé à Π alors ψ détermine $\Pi^{S \cup S_p}$, et pour tout $v \in S$ le centre de Bernstein agit sur Π_v par $\psi_{|\mathfrak{z}_v}$. De plus, si ν est attaché comme en §1.4 au choix d'un raffinement accessible de Π (il en existe toujours au moins un), alors ν détermine Π_∞ et ainsi que le polynôme caractéristique de $\mathcal{L}_W(\Pi_v)(\mathrm{Frob}_v)$ pour tout $v \in S_p$. Un conséquence de tout cela est que (ψ, ν) *détermine le L-paramètre de* Π_v *restreint au groupe de Weil (plutôt qu'au Weil-Deligne) pour toute place* v *de* F.

Enfin, on dira que $\Pi \in \mathcal{A}$ est *régulière* si pour tout $w \in S_p$ et tout $v \in \Sigma_\infty(w)$ le poids extrémal de la représentation de dimension finie Π_v de $U(F_v)$ n'est dans aucun mur d'une chambre de Weyl. On notera $\mathcal{A}^{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{A}$ le sous-ensemble formé des Π qui sont régulières, et

$$Z^{\mathrm{reg}} \subset Z$$

le sous-ensemble paramétrant des (ψ, ν) où ψ est associé à un Π dans $\mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$. C'est un sous-ensemble Zariski-dense et d'accumulation dans X (voir par exemple [BCh, Lemma 7.5.3]).

3.8. **Le pseudo-caractère galoisien sur X et définition de ρ_Π.** Une conséquence simple du théorème 3.2 (a) est qu'il permet de définir un pseudo-caractère galoisien de Γ_K sur toute la variété de Hecke X, plutôt que seulement aux points définis par $\mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$. L'objectif dans ce qui suit sera de déterminer ses propriétés qui découlent "formellement" de ce théorème.

Pour tout $x = (\psi, \nu) \in Z^{\mathrm{reg}}$, associé à un $\Pi \in \mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$, on note ρ_x la représentation galoisienne ρ_Π définie par ce théorème. Notons que si deux Π donnent lieu au même x, alors $\rho_\Pi \simeq \rho_{\Pi'}$ par le (a) du théorème et Cebotarev : ρ_x est bien définie. Soient Σ l'ensemble des places finies de $\mathcal{K}$ qui sont au dessus d'une place de S ou au dessus de p, et $\Gamma_{\mathcal{K},\Sigma}$ le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de $\mathcal{K}$ non ramifiée hors de Σ. On renvoie à [BCh, Ch. 1] pour les généralités sur les pseudo-caractères. Soient $w \notin \Sigma$ une place finie de $\mathcal{K}$ et v la place de F au dessous de w, l'isomorphisme de Satake nous fournit un élément $h_w \in \mathcal{H}$ dans l'algèbre de Hecke sphérique de $(U(F_v), K_v)$ tel que pour toute représentation sphérique Π_v de $U(F_v)$, de changement de base π_w à $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K}_w)$, h_w agit sur la droite sphérique de π_v par multiplication par $\mathrm{tr}(\mathcal{L}(\pi_w|\bullet|^{\frac{1-n}{2}})(\mathrm{Frob}_w))$.

Corollaire 3.9. *Il existe un unique pseudo-caractère continu*

$$T : \Gamma_{\mathcal{K},\Sigma} \to \mathcal{O}(X),$$

de dimension n, tel que pour tout $z \in Z^{\mathrm{reg}}$, $T_z = \mathrm{tr}(\rho_z)$. *Pour tout* $w \notin \Sigma$,

$$T(\mathrm{Frob}_w) = \psi(h_w) \in \mathcal{O}(X).$$

(Voir [Ch, Cor. 7.1.1], ou encore [BCh, Cor. 7.5.4].) Dans ce corollaire, et par la suite, nous notons T_x l'évaluation de T en un $x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, i.e. $T_x(g) := T(g)(x)$. D'après un résultat général de Taylor et Procesi sur les pseudo-caractères, il existe une unique représentation continue semi-simple

$$\rho_x : \Gamma_{\mathcal{K},\Sigma} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

telle que $\mathrm{tr}(\rho_x) = T_x$.

Soit maintenant $\Pi \in \mathcal{A}$ qui n'est plus nécessairement régulière. Choisissons un raffinement accessible de Π aux places dans S_p, un système de valeurs propres ψ de $\mathcal{H}$ associé à Π, et considérons un point $z = (\psi, \nu) \in Z$ défini par ces choix. On pose

$$\rho_\Pi := \rho_z.$$

Par le théorème de Cebotarev, ρ_Π ne dépend ni du choix de raffinement, ni du choix de ψ.

3.10. **Propriétés aux places dans S ne divisant pas p.** Nous devons commencer par un préliminaire sur le centre de Bernstein de GL_n ([Bern]). Soient ℓ un nombre premier, F_ℓ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, et $m \geq 1$ un entier. Fixons une composante de Bernstein $\mathcal{B}$ de la catégorie des représentations complexes lisses de $\mathrm{GL}_m(F_\ell)$, de centre $\mathfrak{z}$.

Si π est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_m(F_\ell)$, rappelons que

$$\mathcal{L}_W(\pi) : W_{F_\ell} \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$$

désigne la représentation du groupe de Weil W_{F_ℓ} de F_ℓ associée à π par la correspondance de Langlands locale. D'après la théorie de Bernstein, pour π dans la composante $\mathcal{B}$ la représentation $\mathcal{L}_W(\pi)$ est uniquement déterminée par le caractère de $\mathfrak{z}$ sur π, que l'on notera $z(\pi) \in \mathcal{B}$ ("le support cuspidal de π").

La composante $\mathcal{B}$ est associée à une classe inertielle (M, ω) pour un certain sous-groupe de Levi M de $\mathrm{GL}_m(F_\ell)$ et ω une supercuspidale de M. On sait que quitte à remplacer ω par une torsion non ramifiée, on peut supposer qu'elle est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On choisit enfin un corps de coefficients $E \subset \overline{\mathbb{Q}}$ suffisament grand, fini et galoisien sur $\mathbb{Q}$, de sorte que ω, $\mathcal{L}_W(\omega)$, $\mathcal{B}$, et le centre de Bernstein $\mathfrak{z}$ de $\mathcal{B}$, soient tous définis sur E. Soit $E[\mathcal{B}]$ l'anneau des coordonnées affines de $\mathcal{B}$.

Proposition 3.11. *Il existe un (unique) pseudo-caractère de dimension m*

$$T^{\mathcal{B}} : W_{F_\ell} \longrightarrow E[\mathcal{B}]$$

tel que pour toute irréductible π dans $\mathcal{B}$, $T^{\mathcal{B}}_{z(\pi)} = \mathrm{tr}(\mathcal{L}_W(\pi))$.

(Ici encore, pour $x \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ et $g \in W_{F_\ell}$ on pose $T^{\mathcal{B}}_x(g) = T^{\mathcal{B}}(g)(x)$.)

Preuve — Supposons tout d'abord que $m = qd$, $M = \mathrm{GL}_d(F_\ell)^q$ et que ω est le produit de q supercuspidales identiques $r_1 = r_2 = \cdots = r_q$ de $\mathrm{GL}_d(F_\ell)$. Soit $Y = \mathbb{G}_m^q$ le tore des caractères non ramifiés de M, que l'on identifiera à ceux de $(F_\ell^*)^q$ via le déterminant. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_q$ agit sur Y par permutation des coordonnées, ainsi donc que sur $Y \rtimes \mathfrak{S}_q$ par

$$((\xi_1, \ldots, \xi_q), \sigma) \cdot (\chi_1, \ldots, \chi_q) := (\chi_{\sigma^{-1}(1)}\xi_1, \ldots, \chi_{\sigma^{-1}(q)}\xi_q).$$

On choisit $\omega = (r_1, r_2, \ldots, r_q)$ pour point base de $\mathcal{B}$. Cela permet d'identifier ce dernier au quotient de Y par le sous-groupe fini Δ des $(\xi, \sigma) \in Y(\overline{\mathbb{Q}}) \rtimes \mathfrak{S}_d$ tels que $r_i \otimes \xi_i \simeq r_{\sigma^{-1}(i)}$ pour tout i. On pose alors, pour $g \in W_{F_\ell}$ et $\chi = (\chi_1, \cdots, \chi_q) \in Y$,

$$T^{\mathcal{B}}(g)(\chi) := \sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(\mathcal{L}_W(r_i(g)))\chi_i(\mathrm{rec}(g)) = \mathrm{tr}(\mathcal{L}_W(\oplus_{i=1}^q r_i \otimes \chi_i)(g))$$

où $\mathrm{rec} : W_{F_\ell} \to F_\ell^*$ est l'homomorphisme de réciprocité du corps de classes local. Par construction,

- $T^{\mathcal{B}}(g) \in E[Y]^\Delta = E[\mathcal{B}]$ pour tout $g \in W_{F_\ell}$,
- Si π est dans $\mathcal{B}$, on a $T^{\mathcal{B}}_{z(\pi)} = \mathrm{tr}(\mathcal{L}_W(\pi))$.

Cela démontre la proposition pour ce cas particulier de classe inertielle.

Dans le cas général, on écrit $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_s$ et $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$ où chaque (M_j, ω_j) est une classe inertielle du type précédent : $M_j = \mathrm{GL}_{d_j}(F_\ell)^{q_j}$ et ω_j est le produit de q_j supercuspidales identiques, disons égales à une certaine r_j, de $\mathrm{GL}_{d_j}(F_\ell)$. Quitte à modifier ω dans sa classe inertielle, on peut supposer que cette écriture à été choisie de sorte que si $i \neq j$ et $d_i = d_j$, alors r_i n'est pas une torsion non ramifiée de r_j. Dans ce cas, la composante de Bernstein est de manière naturelle un produit $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_s$ des composantes de Bernstein des $\mathrm{GL}_{q_j d_j}(F_\ell)$ de classes inertielles les (M_j, ω_j). Il est immédiat que

$$T_{\mathcal{B}}(g) := \sum_{j=1}^{s} T_{\mathcal{B}_j}(g) \in \left(\bigotimes_j E[\mathcal{B}_j] \right) = E[\mathcal{B}]$$

a les propriétés requises. $\square$

Démontrons maintenant la propriété (a') du théorème 3.3. Fixons $v \in S$ et notons w la place de F au dessous de v, de sorte que $U(F_w)$ s'identifie à $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K}_v) = \mathrm{GL}_n(F_w)$. Par construction, on dispose d'une composante de Bernstein $\mathcal{B}_v$ de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K}_v)$, dont une E-structure du centre est $\mathfrak{z}_v$, et un morphisme d'anneaux $\psi : \mathfrak{z}_v \to \mathcal{O}(X)$, on peut donc considérer

$$T' : W_{\mathcal{K}_v} \to \mathcal{O}(X)$$

la composée de $T^{\mathcal{B}_v} : W_{\mathcal{K}_v} \to \mathfrak{z}_v = E[\mathcal{B}_v]$ et de ψ : c'est un pseudo-caractère de dimension n sur $W_{\mathcal{K}_v}$.

Lemme 3.12. $T_{|W_{\mathcal{K}_v}} = T'$.

Preuve — Par Zariski-densité de Z^{reg} dans X il suffit de vérifier l'égalité du lemme en un $z \in Z^{\mathrm{reg}}$. Si $z \in Z$, il existe par définition une représentation $\Pi(z) \in \mathcal{A}$ associée à z telle que $\iota_p \iota_\infty^{-1} \Pi(z)_w$ est dans la composante de Bernstein $\mathcal{B}_v$, l'action du centre $\mathfrak{z}_v$ sur cette dernière représentation étant donnée par ψ_z. Ainsi,

$$\forall z \in Z, \quad T'_z = \iota_p \iota_\infty^{-1} \mathrm{tr}(\mathcal{L}_W(\Pi(z)_w)) \tag{3.5}$$

par définition de $T^{\mathcal{B}_v}$ (i.e. par la Proposition 3.11). D'autre part, si de plus $z \in Z^{\mathrm{reg}}$, alors z provient d'un $\Pi \in \mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$. Le (a) du théorème 3.2 appliqué à ce Π assure que $(T_{|W_{F_\ell}})_z = \iota_p \iota_\infty^{-1} \mathrm{tr}(\mathcal{L}_W(\Pi(z)_w))$, ce qui conclut. $\square$

Le (a') du théorème 3.3 découle alors du lemme 3.12 et de l'identité (3.5).

Remarque 3.13. Les arguments ci-dessus démontrent aussi que pour tout $x \in X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, si π est un constituant irréductible de la $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentation de $U(F_w)$ associée à x dans l'espace des formes automorphes p-adiques de U (cf. [BCh, Def. 7.4.4]), alors $(\rho_x)^{\mathrm{ss}}_{\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ et $\mathcal{L}_W(\pi)$ sont isomorphes.

Démontrons maintenant le théorème 3.5. Nous avons déjà démontré le résultat si $v \notin S$, et pour $v \in S$ (ne divisant pas v) nous avons déjà démontré que les deux représentations de l'énoncé ont même semi-simplifiée.

Nous devons pour cela faire un rappel de notations issues de [BCh, §6.5.1]. Soit v une place finie de $\mathcal{K}$, $W_{\mathcal{K}_v}$ son groupe de Weil et $I_{\mathcal{K}_v} \subset W_{\mathcal{K}_v}$ le sous-groupe d'inertie. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de $I_{\mathcal{K}_v}$. Si ρ est une représentation de Weil-Deligne de $\mathcal{K}_v$, et si $\tau \in \mathcal{J}$, alors nous avons encore une décomposition en composantes isotypiques

$$\rho = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}} \rho[\tau]$$

qui sont préservées par $I_{\mathcal{K}_v}$ et par l'opérateur de monodromie. En particulier, on peut encore définir pour chaque $\tau \in \mathcal{J}$ une unique partition $p_I(\rho, \tau)$ de l'entier $\dim(\rho[\tau])/\dim(\tau)$ qui détermine la classe de conjugaison de l'opérateur de monodromie sur $\rho[\tau]$. Si ρ et ρ' sont deux représentations de Weil-Deligne, on note

$$\rho \prec_I \rho'$$

si les représentations de $W_{\mathcal{K}_v}$ associées à ρ et ρ' sont isomorphes restreintes au groupe d'inertie et si $p_I(\rho,\tau) \prec p_I(\rho',\tau)$ pour tout $\tau \in \mathcal{J}$. Si $\rho \prec_I \rho'$ et $\rho' \prec_I \rho$, on notera aussi $\rho \simeq_I \rho'$.

Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$ est une partition d'un entier n, et si $r \in \mathbb{N}$, on note $r\lambda$ la partition de rn constituée de r copies de λ_1, puis r copies de λ_2 etc. Le résultat suivant est bien connu (et sous-entendu dans la preuve de [BCh, Prop. 6.5.3]).

Lemme 3.14. *Soit ρ une représentation de Weil-Deligne de $\mathcal{K}_v$.*

(i) *Soit $\sigma \in \mathcal{I}$ et τ un constituant irréductible de $\sigma_{|I_{\mathcal{K}_v}}$. Alors $\rho[\sigma'] \cap \rho[\tau] = 0$ si $\sigma' \in \mathcal{I}$ n'est pas une torsion non ramifiée de σ. De plus, $p_I(\rho,\tau) = rp(\rho,\sigma)$ où $r = \dim(\sigma)/\dim(\tau) \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Si ρ' est une représentation de Weil-Deligne de $\mathcal{K}_v$ telle que $\rho^{\mathrm{ss}} \simeq \rho'^{\mathrm{ss}}$, alors $\rho \prec \rho'$ si et seulement si $\rho \prec_I \rho'$.*

Preuve — Soit σ' une représentation irréductible de $W_{\mathcal{K}_v}$. On peut trouver un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que si φ est un Frobenius de $W_{\mathcal{K}_v}$ alors φ^m commute aux images de I dans σ et σ'. Par le lemme de Schur, φ^m agit donc par un scalaire dans ces représentations, et quitte à tordre σ' par un caractère non ramifié, on peut supposer que ces scalaires sont identiques. La représentation τ s'étend donc en une représentation $\widetilde{\tau}$ du groupe de Weil W_M de l'extension M non ramifiée de degré m de $\mathcal{K}_v$, telle que $\sigma_{|W_M}$ et $\sigma'_{|W_M}$ contiennent $\widetilde{\tau}$. La formule pour l'induite d'une restriction montre que

$$\mathrm{Ind}_{W_M}^{W_{\mathcal{K}_v}} \widetilde{\tau} = \sigma \otimes \mathbb{C}[W_{\mathcal{K}_v}/W_M]$$

est un somme directe finie de torsions non ramifiées de σ, ce qui conclut le premier point de (i). Le fait que $\dim(\widetilde{\tau})(= \dim(\tau))$ divise $\dim(\sigma)$ un résultat classique de Clifford, le reste du (i) s'en déduit. Le (ii) découle du (i) et de ce que pour $r \geq 1$ et λ, λ' deux partitions,

$$\lambda \prec \lambda' \Leftrightarrow r\lambda \prec r\lambda'.$$

□

Ce lemme fait notamment le lien entre la relation $\prec$ introduite plus haut et la relation $\prec_I$ étudiée dans [BCh], qu'il ne reste qu'à appliquer. Supposons que v est au dessus de S et ne divise pas p. Par choix de l'idempotent e_v, tout $z \in Z$ est associé à une représentation $\Pi(z) \in \mathcal{A}$ telle que

$$\mathcal{L}(\Pi(z)_v) \prec_I \rho_0.$$

D'après le théorème 3.2 (a), il vient que

$$\forall z \in Z^{\mathrm{reg}}, \ \ (\rho_z)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}} \prec_I \rho_0.$$

D'après [BCh, Prop. 7.8.19] appliqué à $T : \Gamma_{\mathcal{K}} \to \mathcal{O}(X)$,

$$\forall x \in X, \ \ (\rho_x)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}} \prec_I \rho_0.$$

Cela vaut donc en particulier pour ρ_Π, qui est de la forme ρ_z pour $z \in Z$. Cela entraîne $\rho_{\Pi|\Gamma_{\mathcal{K}_v}} \prec \rho_0$ d'après le lemme 3.14 (ii) et le théorème 3.3 (a'), QED.

3.15. **Propriétés aux places divisant p.** Démontrons maintenant les points (b) – (e) du théorème 3.3. Ils se déduisent essentiellement de résultats de Sen [Sen] et Berger-Colmez [BeCo] rappelés ci-dessous.

Fixons L et F_p deux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ (respectivement, les "coefficients" et le "corps de base"), avec disons $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ galoisienne contenant F_p. Soit Y un L-espace rigide réduit, disons quasi-compact et quasi-séparé, M un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang n et

$$\rho : \Gamma_{F_p} \to \mathrm{GL}_{\mathcal{O}_Y}(M)$$

une $\mathcal{O}_Y$-représentation continue. Pour $y \in Y$ on notera $\rho_y : \Gamma_{F_p} \to \mathrm{GL}_n(L(y))$ (la classe d'isomorphie de) l'évaluation de ρ en y. En particulier, la théorie de Sen associe à ρ_y un polynôme

$$P_y^{\mathrm{sen}} \in (L(y) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F_p)[t]$$

unitaire de degré n dont les racines sont les poids de Hodge-Tate généralisés de ρ_y : il y en a donc n par choix de plongement $F_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Proposition 3.16. ([Sen]) *Il existe un unique polynôme $P \in \mathcal{O}(Y)[t]$ tel que pour tout $y \in Y$, l'évaluation en y de P coïncide avec P_y^{sen}.*

Proposition 3.17. ([BeCo]) *Supposons qu'il existe un sous-ensemble Zariski-dense $Z \subset Y$, tel que pour tout $z \in Z$ la représentation ρ_z est de de Rham (resp. semi-stable, resp. cristalline), et que ses poids de Hodge-Tate sont bornés indépendamment de z.*

Alors pour tout $y \in Y$, ρ_y est de de Rham (resp. semi-stable, resp. cristalline). Dans le cas cristallin, il existe de plus un unique polynôme $Q \in \mathcal{O}(Y)[t]$ tel que pour tout $y \in Y$, son évaluation Q_y en y coïncide avec le polynôme caractéristique de la plus petite puissance du Frobenius cristallin de $D_{\mathrm{cris}}(\rho_y)$.

En fait, Berger et Colmez démontrent le (ii) sous l'hypothèse technique supplémentaire que Y est affinoide et que $\mathcal{O}(Y)$ admet un $\mathcal{O}_L$-modèle[12] A et un A-module libre de type fini N muni d'une action A-linéaire de Γ_{F_p} tels que $N[1/p] = M(Y)$ comme $\mathcal{O}(Y)[\Gamma_{F_p}]$-modules. Pour en déduire la version énoncée ci-dessus, nous aurons besoin du lemme suivant étendant le fait bien connu qu'un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(L)$ admet un $\mathcal{O}_L$-réseau stable. Dans ce lemme, G est un groupe topologique compact quelconque et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n muni d'une représentation $\mathcal{O}_Y$-linéaire continue de G.

Lemme 3.18. *Il existe un $\mathcal{O}_L$-schéma formel de type fini $\mathcal{Y}$, et un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-module localement libre de rang n muni d'une action $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-linéaire continue de G, tels que $Y = \mathcal{Y}[1/p]$ et $M = \mathcal{M}[1/p]$.*

Preuve — D'après Raynaud, il existe un $\mathcal{O}_L$-modèle formel de type fini $\mathcal{Y}_0$ de X ainsi qu'un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0}$-module cohérent $\mathcal{N}_0$ tels que $\mathcal{N}_0[1/p] = M$ (et on peut les choisir sans p-torsion). Comme $\mathcal{N}_0$ est ouvert dans M et $\mathcal{Y}_0$ est de type fini, il existe par continuité un sous-groupe ouvert H de G qui préserve $\mathcal{N}_0$. Par compacité de G, $\mathcal{N} = \sum_{g \in G} g\mathcal{N}_0$ est alors une somme finie, c'est donc un faisceau cohérent sur $\mathcal{Y}_0$ muni d'une représentation $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0}$-linéaire continue de G, et tel que $\mathcal{N}[1/p] = M$. Il reste à le rendre localement libre.

Soit $\mathcal{I}$ le n-ième idéal de Fitting de $\mathcal{N}$ et considérons l'éclaté de $\mathcal{I}$ (c'est un éclatement admissible car $\mathcal{N}[1/p]$ est libre de rang n) : c'est un $\mathcal{O}_L$-schéma formel de type fini $\mathcal{Y}$ dont la fibre générique est encore Y. Notons $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_0$ cet éclatement. D'après [GR, Lemme 5.4.3], le transformé strict $\mathcal{M}$ de $\mathcal{N}$ par f est localement libre de rang n sur $\mathcal{Y}$. Par construction, l'action naturelle de G sur $f^*\mathcal{N}$ passe à son quotient $\mathcal{M}$, et $(\mathcal{Y}, \mathcal{M})$ a les propriétés de l'énoncé. □

[12]On rappelle qu'un $\mathcal{O}_L$-modèle d'une L-algèbre affinoide $\mathcal{O}(Y)$ est une $\mathcal{O}_L$-algèbre $A \subset \mathcal{O}(Y)$ qui est topologiquement de type fini et telle que $A[1/p] = \mathcal{O}(Y)$. De tels modèles existent toujours et sont ouverts dans $\mathcal{O}(Y)$.

On justifie alors la proposition 3.17 comme suit. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{Z}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{M}$ comme dans le lemme ci-dessus. Pour chaque ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}$ sur lequel $\mathcal{M}$ est libre, [BeCo, Thm. B, C] assure que le lieu des $y \in U := \mathcal{U}[1/p]$ tels que M_y $(=\rho_y)$ est de de Rham (resp. cristalline) et à poids de Hodge-Tate dans I est un fermé de U, notons-le U^I. Ce fait s'étend immédiatement aux $\mathcal{U}$ non nécessairement affines mais quasi-compacts et sur lesquels $\mathcal{M}$ est libre. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux tels ouverts, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ a la même propriété, et l'assertion $(U \cap V)^I = U^I \cap V^I$ a donc un sens et est évidente. Autrement dit, *le lieu* $Y^I \subset Y$ *des* $y \in Y$ *tels que* ρ_y *est de de Rham (resp. cristalline) à poids de Hodge-Tate dans* I *est un fermé analytique de* Y. Le premier point de la proposition 3.17 suit, ainsi que la précision dans le cas cristallin car les polynômes Q^I évidents se recollent trivialement. En vue d'utilisations éventuelles futures, mentionnons le corollaire suivant que nous venons de démontrer.

Corollaire 3.19. *Les théorèmes A, B et C de* [BeCo] *restent valables si* $\mathcal{X}$ *(resp.* S*) loc. cit. est remplacé par un* L*-espace rigide réduit quasi-compact quasi-séparé quelconque (resp. par* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$*), et la représentation* V *par un* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$*-module localement libre muni d'une action* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$*-linéaire continue de* G_K.

Terminons la preuve du théorème 3.3. Soit $\Pi \in \mathcal{A}$ et $z_0 \in Z$ qui lui est associé. Par la propriété d'accumulation de Z^{reg} aux points de Z, on peut trouver un ouvert affinoide $\Omega \subset X$ contenant z_0 et tel que $Z^{\mathrm{reg}} \cap \Omega$ est Zariski-dense dans Ω. Notons T_Ω le pseudo-caractère galoisien $\Gamma_{\mathcal{K}} \to \mathcal{O}(\Omega)$ obtenu par restriction de T à Ω. D'après [BCh, Lemme 7.8.11], il existe un espace rigide réduit séparé quasi-compact Y et un morphisme $f : Y \to \Omega$ ayant les propriété suivantes :

(a) f est propre et surjectif,
(b) il existe un ouvert admissible $U \subset \Omega$ Zariski-dense tel que $f^{-1}(U) \to U$ soit étale fini,
(c) il existe un $\mathcal{O}_Y$-module M localement libre de rang n muni d'une action linéaire continue de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dont la trace est le pull-back de T_Ω sur Y par f,
(d) pour tout $y \in U$, la $\Gamma_{\mathcal{K}}$-représentation $M_{f^{-1}(y)}$ est semi-simple (c'est donc ρ_y).

En particulier, $Z' := f^{-1}(U \cap Z^{\mathrm{reg}})$ est Zariski-dense dans Y.

Fixons $v \in S'_p$. Pour tout $z \in Z'$, la représentation $M_z \simeq \rho_z$, vue comme représentation de $\Gamma_{\mathcal{K}_v}$, est donc de de Rham (resp. semi-stable si $\mathcal{B}_v$ est la composante de Bernstein non ramifiée, resp. cristalline si $v \notin S$). Par le (b) du théorème 3.2, les poids de Hodge-Tate de ρ_z sont indépendants de $z \in Z'$ car ils ne dépendent que de la représentation W_∞ fixée dans la construction de X. La Proposition 3.17 assure donc que pour tout $y \in Y$, M_y est de de Rham (resp. semi-stable, resp. cristalline) restreinte à $\Gamma_{\mathcal{K}_v}$, ainsi donc que sa $\Gamma_{\mathcal{K}}$-semi-simplifiée $(M_y)^{\Gamma_{\mathcal{K}}-\mathrm{ss}} \simeq \rho_{f(y)}$. De plus, le polynôme de Sen de M_y est indépendant de $y \in Y$. Cela conclut (b), (c) et le premier point de (d).

Pour vérifier le second, qui suppose notamment que v est au dessus d'une place w de F qui n'est pas dans S, notons que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ contient l'algèbre de Hecke sphérique en w par définition, il existe donc par l'isomorphisme de Satake un polynôme $P_w(t) \in \mathcal{O}(\Omega)[t]$ tel que pour tout $z \in Z$, et $\Pi \in \mathcal{A}$ associée à z (de changement de base noté π), on ait

$$P_w(z)(t) = \iota_p \iota_\infty^{-1} \det(t - \mathcal{L}(\pi_v|\bullet|^{\frac{1-n}{2}})(\mathrm{Frob}_v)). \tag{3.6}$$

En particulier, le polynôme Q donné par la proposition 3.17 coïncide avec $f^*(P_w)$ sur Z' par le théorème 3.2 (c), donc $f^*(P_w) = Q$ par Zariski-densité. Le second point de (d) découle alors de (3.6) et de cette dernière égalité appliquée en un $y \in Y$ tel que $f(y) = z_0$.

Fixons $v \in S_p$ et vérifions (e). Soit $\kappa^{\mathrm{univ}} : T_v \to \mathcal{O}(\mathcal{W})^*$ le caractère continu universel de T_v. Il est bien connu que ce caractère est $\mathbb{Q}_p$-différentiable en l'identité, de sorte que l'on dispose d'une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire naturelle

$$d\kappa^{\mathrm{univ}} : \mathrm{Lie}(T_v) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{W}).$$

Rappelons que le corps L contient une clôture galoisienne de F_v. L'espace $\mathrm{Lie}(T_v) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ contient donc les différentielles en l'identité de tous les co-caractères algébriques de T_v (vu par restriction comme $\mathbb{Q}_p$-tore). Une $\mathbb{Z}$-base (e_i), $i = 1, \cdots, [\mathcal{K}_w : \mathbb{Q}_p]n$, de ces co-caractères étant choisie on peut ainsi lui associer des éléments universels $\kappa_i \in \mathcal{O}(\mathcal{W}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$.

Considérons maintenant le morphisme naturel $X \to \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} L$. On peut alors considérer le pull-back des κ_i ci-dessus à X. La recette exacte pour les poids de Hodge-Tate $k_{i,\sigma}(z)$ des $(\rho_z)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_w}}$ pour $z \in Z^{\mathrm{reg}}$ (w une place choisie de $\mathcal{K}$ au dessus de v), donnée par le théorème 3.3 (b), est une certaine combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire fixée (i.e. indépendante de z) de ces κ_i, naturellement indexée par $\{1, \dots, n\} \times \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_w, \overline{\mathbb{Q}}_p)$. Quitte à changer les e_i par des combinaisons linéaires, et les ré-indexer par ce dernier ensemble, on peut donc supposer

$$\forall z \in Z^{\mathrm{reg}},\ \forall (i, \sigma) \in \{1, \dots, n\} \times \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_w, \overline{\mathbb{Q}}_p),\ k_{i,\sigma}(z) = \kappa_{i,\sigma}(z) \tag{3.7}$$

Replaçons nous maintenant dans le contexte de Π, z_0, Ω, Y etc... plus haut. Soit $P^{\mathrm{sen}} \in \mathcal{O}(Y)[t]$ le polynôme associé à $M_{|\Gamma_{\mathcal{K}_w}}$ donné par la proposition 3.16. Il vient que

$$P^{\mathrm{sen}} = \Big(\prod_{i=1}^{n} (T - f^*(\kappa_{i,\sigma}))\Big)_{\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_w, \overline{\mathbb{Q}}_p)}$$

car cela vaut sur l'ensemble Zariski-dense Z' par (3.7). La proposition 3.16 assure donc que pour tout $y \in Y$, les poids de Hodge-Tate généralisés de M_y restreinte à $\Gamma_{\mathcal{K}_w}$ sont les $\kappa_{i,\sigma}(f(y))$, ainsi donc que ceux de sa $\Gamma_{\mathcal{K}}$-semi-simplifiée $(M_y)^{\Gamma_{\mathcal{K}}-\mathrm{ss}} \simeq \rho_{f(y)}$. Si y est tel que $f(y) = z_0$, alors pour chaque $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_w, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ les $\kappa_{i,\sigma}(y)$ sont des entiers distincts par construction, ce qui conclut le (e), et termine la preuve du théorème 3.3.

Remarque 3.20. (i) L'argument ci-dessus montre que pour tout $x \in X$ et $v \in S'_p$, $(\rho_x)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}$ est de de Rham avec les poids de Hodge-Tate attendus, et cristalline quand de plus $v \notin S$. Ceci est très faux en général si $v \in S_p$, auquel cas les propriétés galoisiennes des ρ_x sont beaucoup plus subtiles (voir les travaux de Kisin, Colmez, et Bellaïche-Chenevier [BCh]). Nous contournons ici cette difficulté en autorisant dans la construction de X des places divisant p qui ne sont pas dans S_p.

(ii) Les arguments ci-dessus (et [BeCo, Thm.C]) montrent de plus que si le théorème 3.2 (c) était étendu en :

(c')*Si* $\Pi \in \mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$ *et* $v \in S'_p$*, la Frobenius semi-simplifiée de la représentation de Weil-Deligne sous-jacente à* $D_{\mathrm{pst}}((\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}})$ *est isomorphe à* $\iota_p\iota_\infty{}^{-1}\mathcal{L}(\pi_v \otimes |\bullet|^{\frac{1-n}{2}})$,

on déduirait que pour $\Pi \in \mathcal{A}$ et $v \in S'_p$, $D_{\mathrm{pst}}((\rho_\Pi)_{|\Gamma_{\mathcal{K}_v}}) \prec \iota_p\iota_\infty{}^{-1}\mathcal{L}(\pi_v \otimes |\bullet|^{\frac{1-n}{2}})$. Par rapport au dévissage [ChH], il suffirait même de se restreindre au cas où v est décomposée sur F.

References

[BCh] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque 342.

[BCh2] J. Bellaïche & G. Chenevier, *The sign of Galois representations of automorphic forms for unitary groups*, prépublication.

[BeCo] L. Berger & P. Colmez, *Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique* dans *Représentations p-adiques de groupes p-adiques I : représentations galoisiennes et* (φ, Γ)*-modules*, Astérisque 319 (2008).

[Bern] J.-N. Bernstein, *Le centre de Bernstein* (rédigé par Pierre Deligne), dans *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Herman, collection "Travaux en cours" (1984).

[Bu] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, proceedings of the London Math. Soc. Symp. on *L-functions and Galois Representations*, Durham (2007).
[Bo] A. Borel, *Some finiteness properties of adele groups over number fields*, IHES Publ. math. 16 (1963), 5–30.
[Ch] G. Chenevier, *Familles p-adiques de formes automorphes pour* $\mathrm{GL}(n)$, Journal für die reine und angewandte Mathematik 570 (2004), 143–217.
[ChH] G. Chenevier & M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations*, Livre 2.
[C1] R.Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. 124 (1996), 214–241.
[C2] R. Coleman, *p-adic Banach spaces & families of modular forms*, Invent. Math. 127 (1997), 417–479.
[CM] R. Coleman & B. Mazur, *The eigencurve*, in Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry (Durham, 1996), London. Math. Soc. Lecture Notes **254**, Cambridge univ. press (1998).
[E] M. Emerton, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math. **164** (2006), 1–84.
[GR] C. Gruson & M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13** (1971), 1–89.
[Mac] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and hall polynomials*, Oxford Math. Monographs (1979).
[Lab] J.-P. Labesse, *Changement de base CM et séries discrètes*, Livre 1.
[Loe] D. Loeffler, *Overconvergent algebraic automorphic forms*, prépublication.
[M] B. Mazur, *The theme of p-adic variation*, Math.: Frontiers and perspectives, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax & B. Mazur Ed. , AMS (2000).
[SZ] P. Schneider & E.-W. Zink, *K-types for the tempered components of a p-adic general linear group*, Journal für die reine und angew. Math. **517** (1999), 161–208.
[Sen] S. Sen, *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*, Bull. Soc. math. France 121 (1993), 13–34.
[Shin] S.W. Shin, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, prépublication.
[Y] A. Yamagami, *On p-adic families of Hilbert cusp forms of finite slope*, Journal of Number Theory **123** (2007), 363–387.

E-mail address: `chenevier@math.polytechnique.fr`

Gaëtan Chenevier, C.N.R.S., Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France