

QUELQUES COURBES DE HECKE SE PLONGENT DANS L'ESPACE DE COLMEZ

GAËTAN CHENEVIER

ABSTRACT : Let p be a prime, \mathcal{C} the p -adic Eigencurve (with tame level 1) and $\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$ the blow-up of the Fredholm hypersurface of the U_p -operator at the *special* points. We show that for $p = 2, 3, 5$ and 7 , the natural map

$$\mathcal{C} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$$

is a rigid-analytic isomorphism.

INTRODUCTION

Soient p un nombre premier et \mathcal{C} la courbe de Hecke p -adique de GL_2 de niveau modéré 1 – *the Eigencurve* – construite par Coleman et Mazur dans [CM]¹. Cette courbe rigide analytique p -adique \mathcal{C} (réduite, séparée) admet par construction un morphisme localement fini et plat

$$\kappa : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{W},$$

où \mathcal{W} désigne l'espace de caractères p -adiques « des poids » de \mathbb{Z}_p^* .

Soit \mathcal{H} la \mathbb{Z} -algèbre de polynômes abstraite engendrée par les symboles U_p et T_l pour tout $l \neq p$ premier, ce qui fournit des $T_n \in \mathcal{H}$ pour tout entier $n \geq 1$ par les formules usuelles². À chaque $T \in \mathcal{H}$ est associée une fonction analytique bornée par 1 sur \mathcal{C} , que l'on désignera du même nom. Pour chaque $x \in \mathcal{C}$, il existe une unique forme modulaire surconvergente f_x propre pour \mathcal{H} , de pente finie, et normalisée³, telle que $T(f_x) = T(x)f_x$ pour tout $T \in \mathcal{H}$, *i.e.* telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$a_n(f_x) = T_n(x),$$

où $a_n(g)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ coefficient de g pour son q -développement usuel à l'infini. Enfin, chaque telle forme apparaît ainsi; cela inclut notamment toutes les formes modulaires usuelles de niveau $\Gamma_1(p)$, et l'ensemble des points x sous-jacents à celles-là est en fait Zariski-dense dans \mathcal{C} .

L'auteur est financé par le C.N.R.S. Courriel : « chenevie@math.univ-paris13.fr ».

¹Il y a deux constructions de la courbe de Hecke *loc. cit.*, nous utiliserons dans cet article uniquement celle qu'ils notent D .

²Formellement, $(1 - U_p p^{-s})^{-1} \prod_{l \neq p} (1 - T_l l^{-s} + l^{\kappa-1-2s})^{-1} = \sum_{n \geq 1} T_n n^{-s}$.

³Strictement, il faut exclure le point Eisenstein ordinaire p -adique de poids 0 pour que cela soit vrai, c'est sans importance ici.

Il se trouve que par construction U_p est une fonction inversible sur \mathcal{C} , ce qui permet de considérer le morphisme

$$U_p^{-1} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{W} \times \mathbb{G}_m,$$

qui s'avère être fini (mais non surjectif évidemment) par construction. Toujours par construction, son image est la courbe réduite

$$\mathcal{Z}(U_p) \subset \mathcal{W} \times \mathbb{G}_m$$

définie comme étant la courbe spectrale de l'opérateur U_p . Rappelons que suivant Coleman, l'opérateur U_p agit de manière compacte sur la famille orthonormale d'espaces de Banach sur \mathcal{W} constituée des espaces de formes modulaires surconvergentes, et que (toujours suivant Coleman) on peut donc considérer sa série caractéristique

$$\det(1 - TU_p) \in \mathcal{O}(\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m),$$

dont $\mathcal{Z}(U_p)$ est par définition le lieu des zéros.

Definition : *Un point $(\kappa, \lambda^{-1}) \in \mathcal{W} \times \mathbb{G}_m$ sera dit spécial, si $\kappa = \chi^k = (x \mapsto x^k)$ pour un certain entier $k \geq 2$ et si de plus $\lambda^2 = p^{k-2}$. Plus généralement, on dira que $x \in \mathcal{C}$ est spécial si $(\kappa(x), U_p^{-1}(x))$ l'est.*

Le théorème de classicité de Coleman [C] assure que si $x \in \mathcal{C}$ est spécial, f_x est une forme modulaire classique de poids k et niveau $\Gamma_0(p)$. La relation $a_p(f_x)^2 = p^{k-2}$ entraîne, pour des raisons de poids, que cette forme est nécessairement p -nouvelle. La réciproque étant évidente, il vient que x est spécial si, et seulement si, f_x est une forme modulaire parabolique classique de niveau $\Gamma_0(p)$ et p -nouvelle. Pour faire court, nous appellerons tout simplement *spéciale* une telle forme⁴.

Inspirés par l'article de Colmez [Co2], considérons l'éclatement $\widetilde{\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m}$ de $\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m$ aux points spéciaux, ainsi que

$$\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)} \subset \widetilde{\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m}$$

le transformé strict de $\mathcal{Z}(U_p)$ par cet éclatement. Si $x \in \mathcal{C}$ est spécial, il se trouve que $\kappa : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{W}$ est étale en x (cf. Lemme 6.1), et en particulier que x est un point lisse de \mathcal{C} . On en déduit que l'application naturelle $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Z}(U_p)$ se relève en un morphisme rigide analytique

$$(1) \quad \mathcal{C} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}.$$

On se propose dans cet article de démontrer le résultat suivant :

Théorème : *Si $p = 2, 3, 5$ ou 7 , le morphisme (1) est un isomorphisme.*

De plus, en chaque point spécial (χ^k, λ^{-1}) , $\mathcal{Z}(U_p)$ est un diviseur à croisements normaux. Ses branches sont en bijection naturelle avec les formes modulaires spéciales propres pour \mathcal{H} de poids k et de valeur propre λ sous U_p , la direction d'une branche étant naturellement reliée au L -invariant de Fontaine de la forme associée.

⁴Notons que cela équivaut encore à demander que f_x engendre une représentation lisse *spéciale* de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ au sens usuel, d'où la terminologie adoptée ici.

Ce théorème a les conséquences ponctuelles amusantes suivantes.

Corollaire : *Supposons encore $p = 2, 3, 5$ ou 7 . Si $\kappa \in \mathcal{W}$, notons M_κ^\dagger l'espace des formes modulaires p -adiques surconvergentes de poids κ et niveau modéré 1.*

(i) *Soit $f \in M_\kappa^\dagger$ une forme propre pour l'opérateur de Hecke U_p de valeur propre $a_p \neq 0$. Si (κ, a_p^{-1}) n'est pas spécial, alors f est propre pour tous les opérateurs de Hecke dans \mathcal{H} . De plus, si $f = \sum_{n \geq 0} a_n(f)q^n$ est normalisée alors pour tout $n \geq 1$*

$$a_n(f) \in \mathbb{Q}_p(a_p, \kappa).$$

(ii) *Soient f et g deux formes modulaires spéciales propres pour \mathcal{H} , de même poids et normalisées. Alors $f = g$ si et seulement si $a_p(f) = a_p(g)$ et si elles ont même L -invariant \mathcal{L}_F de Fontaine⁵ en p . De plus, pour tout $n \geq 1$,*

$$a_n(f) \in \mathbb{Q}_p(a_p(f), \mathcal{L}_F(f)).$$

(iii) *Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de U_p sur M_κ^\dagger , alors l'espace propre de U_p associé à λ est de dimension 1, à moins que (κ, λ^{-1}) ne soit spécial, auquel cas il est de dimension égale au nombre de formes spéciales de tels poids κ et U_p -valeur propre λ .*

Le premier ingrédient dans la démonstration du théorème consiste en une étude locale-globale des représentations galoisiennes p -adiques attachées aux formes modulaires surconvergentes de niveau modéré 1, que nous effectuons au §1. Précisément, nous montrons que pour $p \leq 7$, ces représentations galoisiennes p -adiques globales sont déterminées par un sous-groupe de décomposition en p , dans ce sens qu'elles ont même images que leur restriction à un tel sous-groupe (Prop. 1.8). Lorsque $p = 2$, cette propriété nous avait été communiquée par M. Emerton, ainsi que l'idée que \mathcal{C} devrait du coup pouvoir s'étudier « purement localement » dans ce cas. En fait, ces valeurs de p sont les seules pour lesquelles cette propriété est satisfaite. Les arguments ici sont élémentaires et ont peu de liens avec les formes modulaires surconvergentes : ils reposent essentiellement sur la théorie du corps de classes et sur la nullité du genre de $X_1(p)$ et du groupe des classes de $\mathbb{Q}(\mu_p)$ pour ces p .

Le second ingrédient consiste en l'étude ponctuelle et infinitésimale de la famille p -adique de représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ portée par \mathcal{C} ; cela occupe les sections 2 à 5, le nombre premier p y est quelconque ainsi que le niveau modéré N auxiliaire. Pour chaque point $x \in \mathcal{C}$ et chaque épaissement artinien $\text{Spec}(A) \hookrightarrow \mathcal{C}$ de x dans \mathcal{C} , nous disposons d'une représentation galoisienne

$$\rho_A : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \text{GL}_2(A)$$

(canonique à quelques exceptions près) que nous voulons décrire aussi précisément que possible. Nous disposons pour cela de résultats de Kisin [Ki] assurant le prolongement analytique de certaines périodes cristallines héritées par Zariski-densité de celles des

⁵Ainsi que nous l'a fait remarqué H. Hida, cet énoncé implique l'existence de beaucoup de formes modulaires spéciales en p dont l'invariant \mathcal{L}_F est non nul. En effet, le nombre de formes propres p -nouvelles de niveau $\Gamma_0(p)$ croît asymptotiquement linéairement avec le poids k (pair), et pour chaque poids k donné il n'y a que deux possibilités pour a_p , à savoir $\pm p^{k/2-1}$.

points classiques. Ainsi que l'avait remarqué Colmez [Co2] ces résultats de Kisin s'interprètent efficacement, du moins ponctuellement, en terme de propriétés de triangulation des (φ, Γ) -modules associés sur l'anneau de Robba. Ce point de vue avait alors été repris et étendu au cadre infinitésimal (et à la dimension supérieure) dans [BCh2, Ch. 2], et c'est celui-là aussi que nous adoptons ici.

Aussi, les sections 2, 3 et 4 sont consacrées aux (φ, Γ) -modules généraux. Nous rappelons au §3 les résultats de Colmez concernant les (φ, Γ) -modules de rang 1 et leurs extensions, ainsi que son critère de triangulation. Dans la section §4, reprenant des arguments de [BCh2], nous en donnons les analogues infinitésimaux. Dans la section §5, nous explicitons l'application à la courbe de Hecke \mathcal{C} . Le point crucial, résultant des propriétés de triangulation et des calculs d'extensions précédents, est qu'à certaines exceptions évidentes près nous décrivons complètement la représentation ρ_A plus haut (Prop. 5.2, Prop. 5.5) et ce *uniquement en terme du couple* (U_p, κ) sur $\text{Spec}(A)$. Mentionnons tout de même ici une subtilité concernant les points (non classiques) x de poids-caractère $\kappa = x^k \chi(x)$ (χ d'ordre fini) pour $k \geq 2$ et tels que $v(U_p(x)) > k - 1$: leurs épaississements infinitésimaux ont des propriétés triangulines plus restreintes. Précisément, pour un tel x , ρ_A est A -trianguline si, et seulement si, $\text{Spec}(A)$ est dans la fibre de κ en x .

La section 6 contient la preuve du théorème principal. Nous commençons par vérifier que

$$\mathcal{C} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$$

est injectif sur les points fermés. Un point x de \mathcal{C} étant uniquement déterminé par le couple $(\rho_x, U_p(x))$ où ρ_x est la représentation galoisienne globale attachée à f_x , il faut voir que ce dernier couple est uniquement déterminé par la donnée « locale » de $(\kappa(x), U_p(x))$. En dehors de certains points exceptionnels traités à part, cela résulte alors des §1 et §5. Nous vérifions ensuite que $\mathcal{C} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$ est une immersion fermée, *i.e.* sépare les vecteurs tangents. L'argument est alors similaire à l'argument ponctuel sauf que nous utilisons cette fois les propriétés triangulines infinitésimales (en fait sur les $A = k(x)[\epsilon]/(\epsilon^2)$) des ρ_A données au §5. Nous étudions enfin les divers points exceptionnels manquants. Pour les premiers p considérés, le lieu ordinaire cuspidal de \mathcal{C} est vide⁶, et il est possible de déterminer explicitement les points non ordinaires de \mathcal{C} dont la représentation locale associée est réductible : ce sont les points Eisenstein critiques, ils sont étales sur \mathcal{W} car les p ci-dessus sont réguliers. L'analyse des points spéciaux utilise un autre théorème de Colmez [Co1] reliant l'invariant L local avec la dérivée de U_p par rapport au poids.

Terminons par mentionner que, du moins lorsque $p = 2$, la géométrie de la courbe \mathcal{C} a été étudiée par de nombreux auteurs (Emerton, Smithline, Buzzard, Kilford, Jacobs, Calegari, Loeffler, voir [BuCa] et [BuK]), et ce par calculs explicites de l'action de la correspondance de Hecke U_2 sur certaines régions de $X_1(2)(\mathbb{C}_2)$. Les résultats que nous obtenons sont complémentaires. Il est par exemple intéressant de les comparer avec ceux

⁶C'est certainement attendu puisque la représentation globale est déterminée par un groupe de décomposition en p .

de [BuK] dans lequel les auteurs décrivent l'image réciproque dans \mathcal{C} du bord

$$\{\kappa \in \mathcal{W}, 1/8 < |\kappa(5) - 1| < 1\}$$

de \mathcal{W} : cette couronne extérieure est en fait la plus grande évitant tous les points spéciaux, en lesquels les valeurs propres spéciales de U_2 ont en général de la multiplicité.

REMERCIEMENTS. L'auteur remercie Joël Bellaïche, Kevin Buzzard, Pierre Colmez, Matthew Emerton et Barry Mazur pour des discussions utiles, ainsi que les organisateurs et acteurs du semestre *Eigenvarieties* de Harvard university pendant lequel l'essentiel de cet article a été écrit. Nous remercions de plus le referee pour ses remarques pertinentes.

1. REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES GLOBALES DE DIMENSION 2 DÉTERMINÉES PAR UN GROUPE DE DÉCOMPOSITION EN p

1.1. Définitions. Soient G et H deux groupes munis d'un morphisme $\iota : H \rightarrow G$. Pour toute représentation de G , et plus généralement tout morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \Gamma$, on dira que ρ est *déterminée par sa restriction à H* si ρ et $\rho \circ \iota$ ont même image. Il est évidemment équivalent de demander que l'application naturelle $H \rightarrow G/\text{Ker } \rho$ est surjective.

Si K est un corps de nombres, on notera G_K le groupe de Galois absolu de K et $G_{K,S}$ le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de K non ramifiée hors de S . Pour toute place v de K on dispose d'une classe de conjugaison canonique de morphismes

$$\text{Gal}(\overline{K}_v/K_v) \rightarrow G_{K,S}.$$

On dira alors qu'une représentation de $G_{K,S}$ est déterminée par un groupe de décomposition (resp. d'inertie) en p , si elle est déterminée par sa restriction à $\text{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ (resp. au groupe d'inertie de ce dernier), ce qui ne dépend pas du morphisme choisi.

1.2. Structure de certains groupes de Galois. Fixons p un nombre premier et K un corps de nombres dans lequel p ne se décompose pas. Soient P l'unique premier de K divisant p , et $K(p)$ la pro- p extension galoisienne maximale de K qui est non ramifiée hors de P et des places archimédiennes. Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 1.3. *P est totalement ramifié dans $K(p)$ si, et seulement si, le groupe des classes strictes d'idéaux de \mathcal{O}_K est d'ordre premier à p .*

Preuve — D'après le calcul classique du sous-groupe de Frattini d'un pro- p -groupe, un sous-groupe fermé I d'un pro- p -groupe Q qui se surjecte dans le quotient

$$Q/[\overline{Q, Q}] \langle Q^p \rangle$$

est en fait égal à Q . Appliquons ceci à $Q := \text{Gal}(K(p)/K)$ et à un sous-groupe d'inertie I au dessus de P . Le sous-corps de $K(p)$ fixé par l'image de I dans le quotient de Frattini étant la (p, p, \dots, p) -extension abélienne maximale de K non ramifiée à toutes les places finies, on conclut par la théorie du corps de classes. \square

Corollaire 1.4. *Si p est régulier, le morphisme*

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)(p)/\mathbb{Q})$$

est déterminé par un groupe d'inertie en p . En particulier, toute représentation continue de $G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}}$, dont la restriction à $G_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ est d'image pro- p , est déterminée par un groupe d'inertie en p .

1.5. Représentations galoisiennes en petits conducteur et caractéristique.

Lemme 1.6. *Le genre de $X_1(M)$ est nul si, et seulement si, $1 \leq M \leq 10$ ou $M = 12$.*

Preuve — C'est bien connu, nous laissons le lecteur le déduire par exemple de [Mi, Thm. 4.2.5, 4.2.9, 4.2.11]. Pour simplifier les calculs on peut remarquer que si $X_1(M)$ est de genre 0, alors $X_1(d)$ l'est aussi pour tout d divisant M . Si $M > 3$ est premier, alors le genre de $X_1(M)$ est $1 + (M - 1)(M - 11)/24$. \square

Soit p un nombre premier. Noter que d'après le lemme ci-dessus, $X_1(p)$ est de genre 0 si et seulement si $p = 2, 3, 5$ ou 7 .

Lemme 1.7. *Supposons que $p = 2, 3, 5$ ou 7 . Alors toute représentation continue, semi-simple, impaire*

$$G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

est réductible. En particulier, elle se factorise par $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$.

Preuve — Supposons tout d'abord que cette représentation est attachée à une forme modulaire propre f de poids $k \geq 2$ et niveau $\Gamma_1(p)$. D'après un argument bien connu, on peut supposer $k = 2$. Mais pour les p de l'énoncé $X_1(p)$ est de genre 0, de sorte que f est une série d'Eisenstein, ce que l'on voulait. Ce simple fait sera bien entendu suffisant pour notre application à la courbe de Hecke. Le cas général résulte de la démonstration récente de la conjecture de Serre en niveau 1 par Khare⁷. \square

Soit A une \mathbb{Q}_p -algèbre finie, locale, de corps résiduel $L := A/m_A$, munie de sa topologie naturelle de \mathbb{Q}_p -algèbre de Banach. Pour $p = 2$, le résultat suivant était connu de M. Emerton.

Proposition 1.8. *Soient $p = 2, 3, 5$ ou 7 , et*

$$\rho : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$$

une représentation continue, impaire si $p > 2$, alors :

- (i) *la restriction de ρ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_p))$ est d'image pro- p ,*
- (ii) *ρ est déterminée par sa restriction à un groupe d'inertie en p ,*
- (iii) *si $\rho' : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$ est une autre représentation ayant les mêmes propriétés que ρ , alors ρ et ρ' sont isomorphes, si et seulement si, elles le sont après restriction à un groupe d'inertie en p .*

⁷Quand $p = 2$ (resp. $p = 3$), c'est un théorème de Tate (resp. Serre).

Preuve — Comme nos premiers p sont réguliers, (i) entraîne (ii) et (iii) d'après le Corollaire 1.4. Démontrons (i).

Considérons plus généralement une représentation continue

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(A),$$

G étant un groupe topologique compact quelconque. Si $\rho \bmod m_A$ est d'image pro- p , il en va de même pour ρ : cela vient de ce que les quotients successifs des groupes multiplicatifs $1 + m_A^i M_n(A)$, pour $i \geq 1$, sont isomorphes au groupe additif L^{n^2} , dont tous les sous-groupes compacts sont pro- p . Supposons alors que $A = L$, puis par un choix de réseau que $\rho(G) \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_L)$; par un raisonnement semblable au précédent, ρ est d'image pro- p si son image dans $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est un p -groupe. Revenant à notre problème, on conclut par le Lemme 1.7. \square

Proposition 1.9. *La liste ci-dessus est exhaustive : si $p \geq 11$, il existe une représentation galoisienne impaire*

$$\rho : G_{\mathbb{Q},\{\infty,p\}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p),$$

qui n'est pas déterminée par un groupe de décomposition en p .

Preuve — En effet, considérons la représentation $\overline{\rho}$ résiduelle (semisimple) mod p attachée à la forme modulaire Δ de Ramanujan. Un résultat de Swinnerton-Dyer [SD, Cor. Thm. 4] montre que $p = 2, 3, 5, 7, 23$, et 691 sont les seuls premiers exceptionnels de Δ , *i.e.* tels que l'image de $\overline{\rho}$ ne contienne pas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Comme ce dernier n'est pas résoluble, ρ n'est pas déterminée par son groupe de décomposition en p pour ces p . On élimine alors de même $p = 23$ et 691 en considérant l'unique forme parabolique propre Δ_{16} de poids 16 et niveau 1, pour laquelle Swinnerton-Dyer montre que 23 et 691 ne sont pas exceptionnels. \square

2. (φ, Γ) -MODULES SUR L'ANNEAU DE ROBBA

2.1. Notations et conventions. Soient p un nombre premier, \mathbb{Q}_p le corps des nombres p -adiques, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p munie de sa valuation telle que $v(p) = 1$, \mathbb{C}_p la complétion de $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et

$$G_p = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$$

le groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p . On note aussi $W_{\mathbb{Q}_p} \subset G_p$ le groupe de Weil de \mathbb{Q}_p . Normalisons l'isomorphisme

$$\mathrm{rec}_p : \mathbb{Q}_p^* \longrightarrow W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$$

de la théorie du corps de classes locale de sorte que Frobenius géométriques et uniformisantes se correspondent.

Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p . L'*anneau de Robba* à coefficients dans L est la L -algèbre \mathcal{R}_L des germes de fonctions analytiques

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-1)^n, \quad a_n \in L$$

convergeantes sur une couronne de \mathbb{C}_p de la forme $r_f \leq |z - 1| < 1$, r_f dépendant de f . D'après des résultats de Lazard, cette L -algèbre est un domaine de Bézout. Elle admet de plus une topologie localement convexe naturelle (limite inductive de limites projectives d'algèbres de Banach sur L). On définit une action de φ et $\Gamma := \mathbb{Z}_p^*$ sur \mathcal{R}_L par les formules

$$\varphi(f)(z) = f(z^p), \quad \gamma(f)(z) = f(z^\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

L'action de Γ ainsi obtenue est continue et commute avec celle de φ . Un élément important de \mathcal{R}_L est

$$t = \log(z) := \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

Cet élément converge sur toute la boule unité ouverte $\{z \in \mathbb{C}_p, |z - 1| < 1\}$, et s'annule à l'ordre 1 aux racines de l'unité de cette boule. Il vérifie de plus

$$\varphi(t) = pt, \quad \gamma(t) = \gamma t, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_p^*.$$

Par L -représentation V de G_p nous entendons toujours une représentation continue, L -linéaire, sur un L -espace vectoriel de dimension finie. Nous noterons Rep la catégorie tensorielle de ces représentations. Nous conviendrons que le caractère cyclotomique de G_p , *i.e* $\mathbb{Q}_p(1) = T_p(\mu_{p^\infty}) \otimes \mathbb{Q}_p$, a pour poids de Hodge-Tate -1 et polynôme de Sen $X + 1$.

2.2. (φ, Γ) -modules. Un (φ, Γ) -module (sous-entendu sur \mathcal{R}_L) est un \mathcal{R}_L -module libre de type fini D muni d'actions \mathcal{R}_L -semi-linéaires de φ et Γ telles que $\mathcal{R}_L \varphi(D) = D$, Γ agit continûment pour la topologie \mathcal{R}_L -linéaire de D , et φ et Γ commutent. Les (φ, Γ) -modules forment une \otimes -catégorie de manière naturelle. Des travaux de Kedlaya [Ke] définissent une théorie de pentes pour les φ -modules M libres de rang fini sur \mathcal{R}_L , φ -semi-linéaires, et satisfaisant $\mathcal{R}_L \varphi(M) = M$. Un (φ, Γ) -module est alors dit *étale* si son φ -module sous-jacent n'admet que des pentes nulles. Des travaux de Fontaine [Fo] et Cherbonnier-Colmez permettent de construire un foncteur de la catégorie Rep des L -représentations de dimension finie et continues de G_p vers la catégorie FG des (φ, Γ) -modules, que nous noterons $V \mapsto D_{\text{rig}}(V)$.

Proposition 2.3. (*Fontaine, Cherbonnier-Colmez, Kedlaya, [Co2, prop. 2.7]*) *Le foncteur D_{rig} induit une \otimes -équivalence de catégories entre Rep et la sous-catégorie pleine FG_{et} des objets étales de FG . De plus, $\dim_L(V) = \text{rg}_{\mathcal{R}_L}(D_{\text{rig}}(V))$ pour toute L -représentation V .*

Remarque 2.4. (i) Il faut prendre garde à ce que contrairement à sa sous-catégorie FG_{et} , FG ainsi définie n'est pas abélienne, car par exemple tD est toujours un sous-objet strict de D n'admettant pas de quotient. Cependant, si l'on inverse t ou si l'on rajoute les objets de torsion de présentation finie, elle devient abélienne. Un des intérêts à élargir FG en FG_{et} vient de ce que certains objets étales se dévissent naturellement dans FG et non dans FG_{et} .

(ii) Ainsi qu'il est observé dans [BCh2, Lemme 2.2.5], les travaux de Kedlaya montrent que la sous-catégorie FG_{et} est épaisse, *i.e* stable par extensions dans FG .

3. (φ, Γ) -MODULES DE RANG 1 ET LEURS EXTENSIONS, D'APRÈS COLMEZ [Co2].

3.1. **Les (φ, Γ) -modules $\mathcal{R}_L(\delta)$.** Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^* \longrightarrow L^*$ un caractère continu, on lui associe suivant Colmez un (φ, Γ) -module $\mathcal{R}_L(\delta)$ de rang 1 sur \mathcal{R}_L comme suit : son \mathcal{R}_L -module sous-jacent est \mathcal{R}_L et on pose

$$\varphi(1) = \delta(p), \quad \gamma(1) = \delta(\gamma), \gamma \in \Gamma.$$

La pente de Kedlaya de ce (φ, Γ) -module est $v(\delta(p))$. Si cette pente est nulle, δ s'étend via l'isomorphisme du corps de classes local en un caractère continu $\delta' : G_p \longrightarrow L^*$, auquel cas on vérifie immédiatement que $\mathcal{R}_L(\delta) = D_{\text{rig}}(\delta')$.

Proposition 3.2. [Co2, prop. 4.2] *Tout (φ, Γ) -module de rang 1 est de la forme $\mathcal{R}_L(\delta)$ pour un unique δ .*

Cela découle par exemple immédiatement de l'équivalence de catégories plus haut et du cas étale, mais Colmez en donne aussi une preuve directe. Colmez calcule aussi la (φ, Γ) -cohomologie en degrés 0 et 1 des $\mathcal{R}_L(\delta)$, en terme du complexe à trois termes usuel. Ses résultats ont été étendus au degré 2, ainsi qu'en fait à tous les (φ, Γ) -modules par Liu dans [Liu, Thm. 0.2]. Soient $x : \mathbb{Q}_p^* \longrightarrow L^*$ l'inclusion naturelle, et $\chi : \mathbb{Q}_p^* \longrightarrow L^*$ le caractère tel que $\chi(p) = 1$ et $\chi|_{\mathbb{Z}_p^*} = x|_{\mathbb{Z}_p^*}$.

Proposition 3.3. [Co2, Thm. 3.9] *$\text{Ext}_{\text{FG}}(\mathcal{R}_L(\delta_2), \mathcal{R}_L(\delta_1))$ est de L -dimension 1, à moins que $\delta_1 \delta_2^{-1}$ ne soit de la forme $x^{-i}, \chi x^i$ pour $i \geq 0$ un entier, auquel cas il est de dimension 2.*

Dans le cas $v(\delta_1 \delta_2^{-1}(p)) = 0$, cela se déduit du théorème de Tate, de l'équivalence de catégorie plus haut, et du fait que $\text{FG}_{\text{ét}}$ est épaisse dans FG . Cependant, le calcul de Colmez est indépendant des résultats de Tate.

Remarque 3.4. Soit D une extension non triviale de $\mathcal{R}_L(\delta_2)$ par $\mathcal{R}_L(\delta_1)$. Si D est étale, le théorème de Kedlaya montre que $v(\delta_1 \delta_2(p)) = 0$ et que $v(\delta_1(p)) \geq 0$. Réciproquement, sous ces conditions, D est étale d'après Kedlaya à moins qu'il ne contienne un sous- (φ, Γ) -module D' de rang 1 (que l'on peut supposer saturé) de pente strictement négative. Un tel module est nécessairement en somme directe avec $\mathcal{R}_L(\delta_1)$ et D est donc scindé sur $\mathcal{R}_L[1/t]$, ceci se produit de manière exceptionnelle (voir [Co2] pour plus de détails).

3.5. **Critère de triangulation de Colmez en rang 2.** Fixons V une L -représentation continue de G_p de dimension 2. Suivant Colmez, on dit que V est *trianguline* si $D_{\text{rig}}(V)$ est une extension de $\mathcal{R}_L(\delta_2)$ par $\mathcal{R}_L(\delta_1)$ pour certains caractères δ_1, δ_2 . La proposition suivante est une version légèrement raffinée d'un résultat de Colmez.

Proposition 3.6. [Co2, prop. 5.3] *V est trianguline si, et seulement si, il existe un caractère continu $\psi : G_p \longrightarrow L^*$ et un élément $\lambda \in L^*$ tels que $D_{\text{cris}}(V \otimes \psi)^{\varphi=\lambda} \neq 0$. Sous cette dernière condition, fixons un $v \neq 0 \in D_{\text{cris}}(V \otimes \psi)^{\varphi=\lambda} \neq 0$. Alors $D_{\text{rig}}(V)$ est une extension de $\mathcal{R}_L(\delta_2)$ par $\mathcal{R}_L(\delta_1)$, où*

- (i) $\delta_1(p) = \lambda \psi^{-1}(p) p^{-s}$ et $\delta|_{\Gamma} = \psi^{-1} \chi^{-s}$, s étant le plus petit entier tel que $v \notin \text{Fil}^{s+1}(D_{\text{cris}}(V \otimes \psi))$.
- (ii) $\delta_2 = \delta_1^{-1} \det(V)$.

Preuve — Le résultat étant important pour la suite de cet article, nous redonnons la démonstration de Colmez. Précisément, montrons la condition suffisante de triangulation, la réciproque étant immédiate. On peut supposer que $\psi = 1$. On pose $D := D_{\text{rig}}(V)$.

Un théorème de Berger [Be] montre que le $L[\varphi]$ -module $D_{\text{cris}}(V)$ s'identifie naturellement avec $(D[1/t])^\Gamma$. On dispose ainsi d'un élément $v \neq 0 \in D[1/t]^\Gamma$. Quitte à multiplier v par t^{-s} pour un certain entier $s \in \mathbb{Z}$, $w := t^{-s}v \in D$. L'idéal I de \mathcal{R}_L engendré par les coefficients de w dans une \mathcal{R}_L -base fixée de D est alors stable par φ et Γ . Comme \mathcal{R}_L est de Bézout et que I est de type fini, I est principal, et une analyse de son diviseur montre alors que $I = (t^i)$ pour un certain entier $i \geq 0$. Ainsi, quitte à diminuer s , on peut supposer que $I = \mathcal{R}_L$, i.e. que $\mathcal{R}_L w$ est facteur direct comme \mathcal{R}_L -module, par la propriété de Bézout.

Considérons le sous- (φ, Γ) -module $D' := \mathcal{R}_L w$. Clairement, $D' \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_L(\delta_1)$ où δ_1 satisfait les deux premières conditions de l'énoncé (i). La dernière condition vient de la recette pour la filtration dans l'isomorphisme de Berger, et précisément du Lemme [BCh2, Lemme 2.4.2].

Mais D/D' est alors libre de rang 1, et donc de la forme $\mathcal{R}_L(\delta_2)$ par la classification. On conclut (ii) en prenant le déterminant. \square

4. DÉFORMATIONS TRIANGULINES, D'APRÈS [BCh2].

4.1. **Les (φ, Γ) -modules $\mathcal{R}_A(\delta)$.** Dans cette section, A est une \mathbb{Q}_p -algèbre finie locale de corps résiduel $A/m_A \xrightarrow{\sim} L$. On définit l'anneau de Robba à coefficients dans A comme étant

$$\mathcal{R}_A := \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} A.$$

Nous appellerons ici (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_A la donnée d'un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$ muni d'une action de la \mathbb{Q}_p -algèbre A telle que le \mathcal{R}_A -module sous-jacent soit libre.

Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow A^*$ un caractère continu. On définit $\mathcal{R}_A(\delta)$ de manière évidente comme plus haut (cf. [BCh2, §2.3.1]). La remarque 2.4 (ii) montre que $\mathcal{R}_A(\delta)$ est isocline de pente $v(\bar{\delta}(p))$, où

$$\bar{\delta} : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow L^*$$

est la réduction modulo m_A de δ . Comme plus haut, $\mathcal{R}_A(\delta)$ s'identifie au D_{rig} du caractère galoisien naturel dans le cas étale. En fait, toujours par la même remarque 2.4 (ii), on montre comme plus haut la proposition suivante.

Proposition 4.2. [BCh2, prop. 2.3.1] *Tout (φ, Γ) -module de rang 1 sur \mathcal{R}_A est de la forme $\mathcal{R}_A(\delta)$ pour un unique δ .*

Proposition 4.3. *Soient $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow A^*$ deux caractères continus. Supposons que $\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2^{-1} \neq x^{-i}, \chi x^i$. Alors $\text{Ext}_{\text{FG}}(\mathcal{R}_A(\delta_2), \mathcal{R}_A(\delta_1))$ est un A -module libre de rang 1.*

Preuve — On peut supposer $\delta_2 = 1$, et on note $\delta := \delta_1$. Si $\bar{\delta} \neq x^{-i}, \chi x^i$ avec $i \geq 0$ entier, alors d'après [Co2, Thm. 3.9] et [Liu, Thm 0.2] on a $H^0(\mathcal{R}_L(\bar{\delta})) = H^2(\mathcal{R}_L(\chi \bar{\delta}^{-1})) = 0$, et $H^1(\mathcal{R}_L(\bar{\delta}))$ est de L -dimension 1. Un dévissage immédiat montre alors que $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ est de \mathbb{Q}_p -dimension $\dim_{\mathbb{Q}_p} A$.

Prouvons que ce A -module est libre de rang 1 par récurrence sur la longueur de A . C'est immédiat si A est un corps, on peut donc supposer qu'il existe un idéal $I \subset m_A$ de longueur 1. On regarde alors la suite exacte de (φ, Γ) -modules :

$$0 \longrightarrow I\mathcal{R}_A(\delta) \longrightarrow \mathcal{R}_A(\delta) \longrightarrow \mathcal{R}_A(\delta \otimes A/I) \longrightarrow 0,$$

où l'on a $I\mathcal{R}_A(\delta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_L(\bar{\delta})$. Cette suite reste exacte après passage aux H^1 par le paragraphe précédent. Ainsi, on voit que $IH^1(\mathcal{R}_A(\delta)) = H^1(I\mathcal{R}_A(\delta))$, et donc que comme A -module on a

$$H^1(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes_A A/I \simeq H^1(\mathcal{R}_{A/I}(\delta \otimes A/I)).$$

On conclut par induction et Nakayama que $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ est A -monogène, puis libre de rang 1. \square

Remarque 4.4. Supposons que $\delta : \mathbb{Q}_p^* \longrightarrow A^*$, $A = L[\epsilon]/(\epsilon^2)$, est non constant et satisfait $\bar{\delta} = x^{-i}$ ou $\bar{\delta} = \chi x^i$. Dans ce cas, on montre facilement que $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ est isomorphe à $L \oplus A$ comme A -module.

4.5. Critère de triangulation artinien en rang 2. Fixons maintenant une représentation A -linéaire continue V_A de G_p qui est libre de rang 2 comme A -module, on pose $D_A := D_{\text{rig}}(V_A)$. Alors D_A libre de rang 2 sur \mathcal{R}_A ([BCh2, Lemme 2.2.7]), c'est donc un (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_A au sens plus haut. On dira que V_A est *A -trianguline* si D_A est une extension de $\mathcal{R}_A(\delta_1)$ par $\mathcal{R}_A(\delta_2)$ pour certains caractères continus $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^* \longrightarrow A^*$. On pose $\bar{V} := V_A/m_A V_A$. Le critère de triangulation est un peu plus subtile dans le cas artinien que dans le cas ponctuel (Prop. 3.6) :

Proposition 4.6. [BCh2, Lemme 2.5.2] *Supposons que pour un $\lambda \in A^*$, il existe un A -module libre de rang 1 $A.v \subset D_{\text{cris}}(V_A)^{\varphi=\lambda}$, et que la filtration de Hodge induite sur $A.v$ n'ait qu'un seul saut, disons $s \in \mathbb{Z}$. Alors D_A est une extension de $\mathcal{R}_A(\delta_2)$ par $\mathcal{R}_A(\delta_1)$ où $\delta_1(p) = \lambda p^{-s}$ et $(\delta_1)_{\Gamma} = \chi^{-s}$, et $\delta_2 = \det(V_A)\delta_1^{-1}$. En particulier, V_A est A -trianguline.*

Preuve — D'après la recette de Berger pour la filtration, précisément par [BCh2, Lemme 2.4.2], on sait que $v \in t^s D_A$. De plus, le poids de $\bar{v} \subset Av$ étant aussi égal à s par hypothèse, $\mathcal{R}_L \bar{v} t^{-s}$ est saturé dans $D_{\text{rig}}(\bar{V})$. D'après [BCh2, Lemme 2.2.3], il vient que $\mathcal{R}_A t^{-s} v$ est saturé dans D_A et on conclut comme dans la preuve de la Proposition 3.6. \square

Remarque 4.7. (i) Pour qu'un (φ, Γ) -module de la forme $\mathcal{R}_A(\delta)$ soit cristallin, il faut et suffit que $\delta|_{\mathbb{Z}_p^*}$ soit constant et égal à x^i pour un certain entier $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Supposons que $A.v \subset D_{\text{cris}}(V_A)^{\varphi=\lambda}$ soit libre de rang 1 et que le poids de $L\bar{v} \subset D_{\text{cris}}(V)^{\varphi=\bar{\lambda}}$ soit le plus petit poids de Hodge-Tate (entier) de V , disons k . Dans ce cas, la filtration de Hodge sur $A.v$ a pour unique saut k . En effet, une récurrence sur la longueur de A montre que $\text{Fil}^{k+1}(Av) = 0$.

5. APPLICATION À LA COURBE DE HECKE DE GL_2 .

Dans cette section nous donnons une application des trois sections précédentes à la famille de représentations galoisiennes portée par les courbes de Hecke. Fixons p un nombre premier, $N \geq 1$ un entier premier à p , et \mathcal{C} la courbe de Hecke p -adique de niveau modéré $\Gamma_1(N)$ comme dans l'introduction (à ceci près que nous autorisons ici un niveau modéré N quelconque). Cette courbe dépend d'un choix d'algèbre de Hecke commutative \mathcal{H} , et il sera suffisant pour nos besoins de supposer que \mathcal{H} contient U_p et les T_l pour $(l, Np) = 1$. Les points $x \in \mathcal{C}$ sont encore en bijection naturelle avec les systèmes de valeurs propres de \mathcal{H} sur les espaces de formes modulaires p -adiques surconvergentes de niveau modéré N et de pente finie, et on désignera par $f_x \neq 0$ n'importe laquelle des formes propres de poids $\kappa(x)$ ayant le système de valeurs propres attaché à x .

D'après l'existence connue des représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires classiques (Eichler-Shimura, Igusa, Deligne), on peut définir un pseudocaractère continu, de dimension 2,

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{\{\infty, pN\}} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{C})$$

dont l'évaluation en tout point $z \in \mathcal{C}$ paramétrant une forme f_z qui est classique est la trace de la représentation galoisienne p -adique attachée à cette forme. En retour, on dispose pour tout $x \in \mathcal{C}$ d'une unique représentation galoisienne continue, semi-simple,

$$\rho_x : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{\{\infty, pN\}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(k(x)),$$

telle que la trace d'un Frobenius géométrique en un premier l ne divisant pas Np est $T_l(x)$ (il n'y a pas d'obstruction de Schur à cause de la conjugaison complexe, de sorte que ρ_x est définie sur le corps résiduel $k(x)$). Les propriétés connues en p des représentations attachées aux formes modulaires et des travaux de Sen, Kisin, montrent que le polynôme de Sen de ρ_x (sous-entendu restreinte à un groupe de décomposition en p) est

$$X(X - d\kappa(x) + 1).$$

Ici, $d\kappa(x)$ signifie la dérivée en 1 de $\kappa(x)$ vu comme caractère continu de \mathbb{Z}_p^* . De plus, on a (cf. [Ki, Thm 6.3])

$$(2) \quad D_{\mathrm{cris}}^+(\rho_x)^{\varphi=U_p(x)} \neq 0.$$

Enfin désignons par \mathcal{W}_N l'espace rigide analytique sur \mathbb{Q}_p paramétrant les caractères continus p -adiques de

$$\mathbb{Z}_p^* \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{\{\infty, pN\}}^{\mathrm{ab}}.$$

Ces caractères peuvent être vue de manière naturelle comme des caractères continus de \mathbb{Q}_p^* en étendant l'identité de \mathbb{Z}_p^* en un morphisme

$$\mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^* \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, \quad p \mapsto (1, p).$$

Par la théorie du corps de classes locale, on peut donc aussi voir les caractères de $\mathbb{Z}_p^* \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ comme des caractères de G_p .

5.1. Propriétés triangulines ponctuelles. Fixons L/\mathbb{Q}_p une extension finie et $x \in \mathcal{C}(L)$, correspondant donc à une forme modulaire $f_x \neq 0$ surconvergente de niveau modéré $\Gamma_1(N)$ propre pour \mathcal{H} et de pente finie, poids-caractère

$$\kappa_N(x) := (\kappa(x), \varepsilon(x)) \in \mathcal{W}_N(L).$$

Par construction, $\det(\rho_x) = \kappa_N^{-1}\chi$. Posons $k := d\kappa(x)$, $\lambda := U_p(x)$, $V = \rho_x$ restreinte à G_p , $D = D_{\text{rig}}(V)$ le (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_L attaché à V .

Proposition 5.2. *Il existe deux caractères continus $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow L^*$ et une suite exacte de (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_L*

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{R}_L(\delta_1) \longrightarrow D \longrightarrow \mathcal{R}_L(\delta_2) \longrightarrow 0$$

où $\delta_2 = \det(V)\delta_1^{-1}$ et δ_1 est comme suit. Définissons un caractère $\delta : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow L^*$ par $\delta(p) = \lambda$ et δ trivial sur \mathbb{Z}_p^* .

(i) *Si $k \notin \mathbb{Z}$, ou $k \in -\mathbb{N}$, ou k est un entier ≥ 1 et $v(\lambda) < k - 1$, alors $\delta_1 = \delta$. De plus, dans ce cas :*

- *Si $v(\lambda) = 0$, alors V contient une L -droite non ramifiée sur laquelle le Frobenius géométrique agit par multiplication par λ .*
- *Si $v(\lambda) \neq 0$, alors l'extension (3) n'est pas scindée et est unique, à moins que $k \geq 2$ soit un entier, $\kappa(x) = \chi^k$, $\lambda^2\varepsilon(p) = p^{k-2}$, auquel cas V est semi-stable et uniquement déterminée par la donnée supplémentaire de son invariant L de Fontaine.*

(ii) *Si k est un entier ≥ 1 et $v(\lambda) > k - 1$, alors $\delta_1 = x^{1-k}\delta$ et l'extension (3) est non scindée et unique. De plus D n'est pas De Rham.*

(iii) *Si k est un entier ≥ 1 et $v(\lambda) = k - 1 \geq 0$, alors V est réductible. Soit ψ le caractère non ramifié de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur lequel le Frobenius géométrique agit par multiplication par $p^{k-1}/\lambda\varepsilon_N(p)$. Alors,*

- *soit $\text{Fil}^{k-1}(D_{\text{cris}}(V))^{\varphi=\lambda} \neq 0$, auquel cas V contient $L(1-k) \otimes_L \psi^{-1}$.*
- *soit $\text{Fil}^{k-1}(D_{\text{cris}}(V))^{\varphi=\lambda} = 0$, auquel cas $k > 1$ et V est une représentation ordinaire non scindée contenant ψ comme sous-représentation non ramifiée.*

Preuve — On obtient une triangulation explicite de D en utilisant (2) et la Proposition 3.6, modulo la détermination de l'entier $s \in \mathbb{Z}$. Déterminons ce s . Par (2), on sait que $s \geq 0$. De plus, s étant un saut de la filtration de Hodge, c'est un poids de Hodge-Tate de V . Ainsi, $s = 0$ sauf peut-être si k est un entier > 1 , auquel cas s peut être égal à $k - 1$. Supposons maintenant que $k > 1$ est un entier. Notons que d'après [BCh2, prop. 2.3.4], on sait que si $s = 0$ alors V est de De Rham (donc potentiellement semistable).

Supposons tout d'abord que $v(\lambda) < k - 1$. Par un théorème de Coleman, on sait que f_x est classique, et donc le polygone de Hodge de $D_{\text{cris}}(V)^{\varphi=\lambda}$ est en dessous de son polygone de Newton, ce qui montre que $s = 0$. Une autre manière de raisonner est de dire que si $s = k - 1$, D contient un sous-objet de pente $v(\lambda) + 1 - k < 0$, ce qui contredit le théorème de Kedlaya.

Si maintenant $v(\lambda) > k - 1$, alors V n'est pas De Rham, i.e. non potentiellement semi-stable, car (2) contredirait la faible admissibilité de $D_{\text{pst}}(V)$. Ainsi, $s = k - 1$.

Enfin, si $v(\lambda) = k - 1$, les deux possibilités peuvent se produire (et se produisent en pratique). Si $s = 0$, V est de De Rham, et l'inspection des polygones de Hodge et Newton du foncteur de Fontaine montre que V est ordinaire non scindée. Si $s = k - 1$, il vient que V est réductible et contient une droite sur laquelle G_p agit par un twist non ramifié de $L(1 - k)$, de quotient un caractère non ramifié.

Les assertions d'unicité découlent alors de la Proposition 3.3. \square

Remarque 5.3. Les points x de \mathcal{C} tels que $\rho_x = \chi_1 + \chi_2$ est (globalement) réductible peuvent être déterminés tout comme dans [BCh1, §4.2], ils sont tous attachés à des séries d'Eisenstein classiques si $v(U_p(x)) \neq 0$ (resp. dans les familles Eisenstein ordinaires sinon).

5.4. Propriétés triangulines infinitésimales. Fixons $x \in \mathcal{C}$ comme dans la section précédente, et fixons de plus un épaissement infinitésimal d'anneau A de x dans \mathcal{C} . L'anneau A est donc local artinien de corps résiduel L . Supposons que :

- ρ_x est irréductible (hypothèse globale),
- si $v(\lambda) = 0$, alors⁸ $k \neq 1$.

Dans ce cas, par la première hypothèse, il existe une représentation canonique

$$\rho_A : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{\{\infty, pN\}} \rightarrow \text{GL}_2(A)$$

de trace la composée

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{\{\infty, pN\}} \xrightarrow{\text{Tr}} \mathcal{O}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\text{can}} A.$$

Notons encore V_A la restriction de ρ_A à un groupe de décomposition en p , $V = V_A/m_A V_A$.

Proposition 5.5. *Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow A^*$ le caractère trivial sur \mathbb{Z}_p^* et tel que $\delta(p) = U_p$.*

- (i) *Supposons que l'on est dans le cas (i) de la Proposition 5.2. Alors V_A est une déformation trianguline de V . Précisément, $D_{\text{rig}}(V_A)$ est une extension de $\mathcal{R}_A(\delta_2)$ par $\mathcal{R}_A(\delta_1)$ relevant la triangulation (3) loc. cit. de $D_{\text{rig}}(V)$, où $\delta_1 = \delta$ et $\delta_1 \delta_2 = \kappa_N^{-1} \chi$. Si de plus x n'est pas spécial et $v(\lambda) \neq 0$, alors une telle extension est unique.*
- (ii) *Supposons que l'on est dans le cas (ii) de la Proposition 5.2. Alors V_A est A-trianguline si, et seulement si, $\text{Spec}(A)$ est dans la fibre de κ au dessus du point fermé $\kappa(x) \in \mathcal{W}$. Si tel est le cas, $D_{\text{rig}}(V_A)$ est une extension de $\mathcal{R}_A(\delta_2)$ par $\mathcal{R}_A(\delta_1)$ relevant la triangulation de $D_{\text{rig}}(V)$, où $\delta_1 = x^{1-k} \delta$ et $\delta_1 \delta_2 = \kappa_N^{-1} \chi$. Une telle extension est unique.*

Preuve — La théorie de Sen montre que le polynôme de Sen de V_A est $X(X - d\kappa + 1) \in A[X]$. Les travaux de Kisin montrent que

$$D_{\text{cris}}^+(V_A)^{\varphi=U_p}$$

est libre de rang 1 sur A dès que $D_{\text{cris}}^+(V)^{\varphi=\lambda}$ est de L -dimension 1 (en ces termes, voir par exemple [BCh2, Thm. 3.3.2]). C'est toujours le cas à moins que V ne soit cristalline de poids $(0, 0)$ (i.e. non ramifiée), ce qui est exclu par hypothèse sur x .

⁸En fait, nos arguments fonctionnent verbatim sous l'hypothèse plus faible « $\rho_x|_{G_p}$ est ramifiée ».

Supposons que l'on est dans le cas (i), la Proposition 4.6 conclut à l'aide de la remarque 4.7 .

Supposons que l'on est dans le cas (ii), et que $\text{Spec}(A)$ est inclus dans la fibre de κ en x . Dans ce cas, la théorie de Sen montre que

$$(V_A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(k-1))^{G_p}$$

est libre de rang 1 sur A . Les théorèmes de Tate sur la cohomologie de $\mathbb{C}_p(i)$ assurent alors ($k-1$ étant le plus grand poids de Hodge-Tate de V) que

$$\text{Fil}^{k-1} D_{\text{DR}}(V_A)$$

est libre de rang 1 sur A . Mais comme d'autre part $D_{\text{DR}}(V)$ est de L -dimension 1, cela montre que

$$D_{\text{cris}}(V_A)^{\varphi=U_p} = \text{Fil}^{k-1}(D_{\text{DR}}(V_A)).$$

Ainsi, la Proposition 4.6 conclut la triangulation de V_A dans ce cas. Vérifions maintenant la réciproque, *i.e.* supposons que l'on dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}_A(\delta_1) \longrightarrow D_{\text{cris}}(V_A) \longrightarrow \mathcal{R}_A(\delta_2) \longrightarrow 0.$$

En réduisant modulo l'idéal maximal de A , on obtient une triangulation de V qui est nécessairement⁹ la triangulation donnée par la Proposition 5.2. En particulier, le Frobenius cristallin de $D_{\text{cris}}(\mathcal{R}_L(\bar{\delta}_2))$ agit par multiplication par

$$p^{k-1}/\lambda\varepsilon_N(p) \neq \lambda$$

(car $v(\lambda) > k-1$). Ainsi, il vient aisément que $D_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta_1)) = D_{\text{cris}}(V_A)$ est libre de rang 1 sur A , et donc que $d\kappa - k + 1$ est constant dans A par la remarque 4.7 (i).

Les assertions d'unicité dans (i) et (ii) découlent alors de la Proposition 4.3. \square

6. PREUVE DU THÉORÈME

Dans cette section, on prouve le théorème énoncé dans l'introduction. On commence par expliquer le fait suivant, admis dans l'introduction, qui vaut pour tout p (mais $N = 1$) :

Lemme 6.1. *Le morphisme κ est étale aux points spéciaux.*

Preuve — Soient $x \in \mathcal{C}$ un point spécial, $L := k(x)$ le corps résiduel de x , et $k := d\kappa(x) \geq 2$. Comme $v(U_p(x)) = k/2 - 1 < k - 1$, un théorème de Coleman [C] assure que l'espace caractéristique de f_x sous l'action de l'algèbre de Hecke \mathcal{H} coïncide avec son espace caractéristique dans l'espace des formes modulaires classiques de poids k et niveau $\Gamma_0(p)$. Mais cet espace est de dimension 1 sur L par le principe du q -développement, car tous les opérateurs de Hecke (y compris U_p) y sont semisimples, ce qui conclut par [BCh1, Prop. 1]. \square

⁹En effet, sinon $D_{\text{rig}}(V)[1/t]$ serait scindé, donc cristallin d'après la Proposition 5.2, ce qui est absurde car V n'est pas De Rham par la même proposition.

Nous utiliserons librement les notations du §5. Un point $x \in \mathcal{C}$ est dit *ordinaire* si $v(U_p(x)) = 0$, *réductible* si ρ_x l'est. Nous renvoyons à [BCh1, §4] pour l'étude des points réductibles de \mathcal{C} : ce sont les points Eisenstein.

Lemme 6.2. *Supposons $p \leq 7$.*

- (i) *Le lieu ordinaire de \mathcal{C} coïncide avec la droite Eisenstein ordinaire.*
- (ii) *Si $x \in \mathcal{C}$ est un point non ordinaire, ρ_x est réductible restreinte à un groupe de décomposition en p si, et seulement si, f_x est une série d'Eisenstein critique. En un tel point, \mathcal{C} est lisse et κ est étale. De plus, les points Eisenstein critiques sont les seuls points $x \in \mathcal{C}$ en lesquels on a une égalité $v(U_p(x)) = d\kappa(x) - 1 > 0$.*

Preuve — Le premier point vient de la théorie de Hida et de ce qu'il n'y a pas de forme modulaire parabolique ordinaire de poids 2 sur $X_1(p)$ pour ces premiers, et sur $X_1(4)$: ces courbes sont de genre 0 par le Lemme 1.6.

Le second point vient de ce que les points non ordinaires x tels que ρ_x est réductible sont les points Eisenstein critiques, qui sont lisses et étales sur \mathcal{W} pour ces premiers (cf. [BCh1, §4.1], car p est régulier), et que si $p \leq 7$ alors pour tout x , ρ_x est déterminée par sa restriction à un groupe de décomposition en p d'après la Proposition 1.8. Ainsi, ρ_x est réductible si, et seulement si, il l'est restreint à un groupe de décomposition en p . La dernière assertion de (ii) découle alors de la Proposition 5.2 (iii). □

Commençons tout d'abord par un lemme sur le corps de définition des ρ_x , $x \in \mathcal{C}$. Rappelons que si x est spécial, $\mathcal{L}_F(x)$ est l'invariant L de Fontaine de la représentation semistable non cristalline $V_x = \rho_x|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$.

Lemme 6.3. *Pour tout $x \in \mathcal{C}$, ρ_x est défini sur $\mathbb{Q}_p(U_p(x), \kappa(x))$ si x n'est pas un point spécial, sur $\mathbb{Q}_p(U_p(x), \mathcal{L}_F(x))$ sinon.*

Preuve — On peut supposer que x n'est pas réductible. D'après la Proposition 5.2, $D_{\text{rig}}(V_x)$ est défini sur le corps de l'énoncé, ainsi donc que V_x , puis ρ_x par la Proposition 1.8 (ii). □

Désignons par

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Z}(U_p)},$$

le morphisme défini dans l'introduction, grâce au Lemme 6.1.

Lemme 6.4. *π est bijectif sur les points (fermés).*

Preuve — La surjectivité de π étant évidente par construction, vérifions son injectivité.

Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p . Par construction de \mathcal{C} , deux points x, y de $\mathcal{C}(L)$ sont égaux si, et seulement si, $U_p(x) = U_p(y)$ et $\rho_x \simeq \rho_y$. Par la Proposition 1.8 (iii), ce dernier isomorphisme équivaut à $V_x \simeq V_y$.

Soient $x, y \in \mathcal{C}(L)$ tels que $\pi(x) = \pi(y)$. En particulier, $U_p(x) = U_p(y)$, $\kappa(x) = \kappa(y)$ et il faut voir que $V_x \simeq V_y$. Posons $\lambda = U_p(x)$, $w = \kappa(x)$. Comme $\kappa(x) = \kappa(y)$, on sait déjà que $\det(V_x) = \det(V_y)$.

On peut supposer que $v(\lambda) > 0$ car sinon x et y sont sur le lieu ordinaire, *i.e.* sur la droite Eisenstein ordinaire par le Lemme 6.2, auquel cas il est clair que $x = y$. Pour la même raison, d'après le point (ii) du Lemme 6.2 on peut supposer que ni x , ni y , n'est Eisenstein critique, auquel cas le même lemme montre que $v(\lambda) \neq dw - 1$ et que V_x et V_y sont irréductibles. Mezalor la Proposition 5.2 (dont la disjonction des cas ne fait intervenir que $v(\lambda)$ et w) assure qu'à moins que x et y ne soient tous les deux spéciaux, $V_x \simeq V_y$.

Supposons donc maintenant que x et y sont spéciaux de même poids-caractère w , et tels que $\lambda = U_p(x) = U_p(y) = \pm p^{k/2-1}$. Rappelons qu'en x et y , κ est étale par le Lemme 6.1, de sorte que \mathcal{C} est localement isomorphe à une boule ouverte dans \mathcal{W} de centre w : localement sur cette boule, U_p est une fonction analytique de κ . Le théorème principal de Colmez dans [Co1] assure que pour $z = x, y$, l'invariant de Fontaine $\mathcal{L}_F(z)$ de V_z vaut

$$(4) \quad \mathcal{L}_F(z) = -2\lambda^{-1} \left(\frac{\partial U_p}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=w} = 2\lambda \left(\frac{\partial U_p^{-1}}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=w}.$$

Ainsi, la Proposition 5.2 (i) conclut que $V_x \simeq V_y$. \square

Puisque nous nous plaçons en niveau modéré 1, rappelons que les courbes \mathcal{C} , $\mathcal{Z}(U_p)$, et donc $\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}$, sont réduites. Un morphisme entre \mathbb{Q}_p -espaces rigides réduits qui est bijectif sur les points fermés n'étant pas nécessairement un isomorphisme¹⁰, il nous faut encore montrer que π est une immersion fermée, ce qui conclura le premier point du théorème. Le second point découle déjà des Lemmes 6.1, 6.4 et de la formule (4).

Soit $z \in \mathcal{C}$ un point fermé. Par le Lemme 6.3, π induit un isomorphisme entre les corps résiduels de z et de $\pi(z)$, il ne reste donc qu'à montrer que l'application naturelle

$$d\pi_z : T_z(\mathcal{C}) \longrightarrow T_{\pi(z)}(\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)})$$

est injective. C'est immédiat lorsque κ est étale en z , car c'est alors vrai après composition par $T_{\pi(z)}(\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}) \rightarrow T_{\pi(z)}(\mathcal{W})$. On peut donc supposer que z n'est pas un point Eisenstein, *i.e.* par le Lemme 6.2 (ii) que ρ_z et $V_z := \rho_z|_{\mathbb{G}_p}$ sont irréductibles, et aussi que z n'est pas spécial.

Alors que le Lemme 6.4 reposait sur les résultats de Colmez ([Co1],[Co2]), le lemme suivant utilise la théorie développée dans [BCh2].

Lemme 6.5. (i) À moins que $k := d\kappa(z)$ ne soit un entier ≥ 1 et que $v(U_p(z)) > k-1$, $d\pi_z$ est injective.

(ii) Si $k := d\kappa(z)$ est un entier ≥ 1 et si $v(U_p(z)) > k-1$, $d\pi_z$ est injective sur le sous-espace de $T_z(\mathcal{C})$ correspondant aux vecteurs tangents dans la fibre de $\kappa : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{W}$ au dessus de $\kappa(z)$.

Ainsi, dans tous les cas, $d\pi_z$ est injective sur le sous-espace défini par $d\kappa_z = 0$.

¹⁰Penser par exemple à la normalisation d'un cusp.

Preuve — Soient $A = k(z)[\epsilon]/(\epsilon^2)$, et x, y deux A -points épaississements de z dans \mathcal{C} ayant même image dans $T_{\pi(z)}(\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m)$, supposés de plus dans la fibre de κ vers \mathcal{W} dans le cas (ii). Nous voulons montrer qu'ils sont égaux dans $T_z(\mathcal{C})$. Rappelons que comme ρ_z est irréductible, il y a un sens à considérer ρ_x et ρ_y comme dans la Proposition 5.5, ainsi que V_x et V_y leur restriction respective à un groupe de décomposition en p . Par le même argument que dans le Lemme 6.4, il faut montrer que $V_x \simeq_A V_y$. Mais cela découle de la Proposition 5.5 (noter que z n'est pas spécial et que de plus on n'est jamais dans le cas (iii) du Lemme 5.2 à cause du Lemme 6.2). \square

Terminons maintenant la démonstration du théorème. Soit $z \in \mathcal{C}$, on dispose d'un diagramme commutatif naturel :

$$\begin{array}{ccc} T_z(\mathcal{C}) & \xrightarrow{d\pi_z} & T_{\pi(z)}(\widetilde{\mathcal{Z}(U_p)}) \\ & \searrow d\kappa_z & \swarrow d\text{pr}_1 \pi(z) \\ & T_{\kappa(z)}(\mathcal{W}) & \end{array}$$

de sorte que $\text{Ker}(d\pi_z) \subset \text{Ker}(d\kappa_z)$, d'où l'injectivité de $d\pi_z$ par la dernière assertion du Lemme 6.5. \square

Démontrons maintenant le corollaire du théorème énoncé dans l'introduction.

Preuve — Soit $M_\kappa^\dagger[\lambda] \subset M_\kappa^\dagger$ l'espace caractéristique de U_p de valeur propre λ . Supposons d'abord (κ, λ^{-1}) non spécial. D'après le théorème principal, $\mathcal{H} \otimes \mathbb{Q}_p(\kappa)$ et $\mathbb{Q}_p(\kappa)[U_p]$ ont même image dans $\text{End}_{\mathbb{Q}_p(\kappa)}(M_\kappa^\dagger[\lambda])$. En particulier, un vecteur propre pour U_p y est propre pour tous les $T \in \mathcal{H}$. Par le « principe du q -développement », un tel vecteur propre est uniquement déterminé à un scalaire près par son système de valeurs propres, du moins s'il est p -adiquement parabolique, ce que l'on peut supposer ici par le Lemme 6.2 (i). Cela montre le premier point de (i) et de (iii). Le second point de (i), ainsi que (ii) et le reste de (iii), découlent des Lemmes 6.3 et 6.4. \square

Remarque 6.6. (i) Le théorème admet sans doute des généralisations partielles à d'autres niveaux modérés N (plutôt que $N = 1$) et premiers p ; nous n'avons pas cherché à les incorporer par souci de clarté. Ainsi, si $N = 2$ et $p = 3, 5$, $N = 3, 5$ et $p = 2$, $N = 4$ et $p = 3$, la courbe modulaire $X_1(Np)$ est de genre 0 et il existe une variante du théorème principal. On peut imaginer aussi d'autres variantes spécifiant certaines composantes connexes de \mathcal{W}_N , exploitant le fait que pour une poignée supplémentaire de couples $(\text{niveau}, \text{caractère}) = (M, \chi)$ on a $S_2(\Gamma_0(M), \chi) = 0$ (dans tous les cas, $M \leq 32$ comme on pourrait le vérifier par les formules de [CohOe] et les tables de Stein [St]).

(ii) Une autre direction possible, disons encore en niveau modéré 1 pour simplifier, serait de fixer une représentation modulaire

$$r : G_{\mathbb{Q}, \{\infty, p\}} \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

par exemple irréductible, soumise à la condition supplémentaire que

$$H^1(\mathbb{Z}[1/p], \text{ad}(r)) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, \text{ad}(r))$$

est injective. On pourrait alors montrer que l'ouvert fermé $\mathcal{C}(r) \subset \mathcal{C}$ correspondant à r s'immerge encore dans l'éclatement de $\mathcal{W} \times \mathbb{G}_m$ aux points spéciaux, du moins hors du lieu ordinaire.

RÉFÉRENCES

- [BCh1] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Lissité de la courbe de Hecke de $GL(2)$ aux points Eisenstein critiques*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), 333–349.
- [BCh2] J. Bellaïche & G. Chenevier, *p -adic families of Galois representations and higher rank Selmer groups*. Prépublication.
- [Be] L. Berger, *Représentations p -adiques et équations différentielles*, Invent. Math. **148** (2002), 219–284.
- [BuCa] K. Buzzard & F. Calegari, *Slopes of overconvergent 2-adic modular forms*, Compositio Math. **141** (2005), 591–604.
- [BuK] K. Buzzard & L. Kilford, *The 2-adic eigencurve at the boundary of the weight-space*, Compositio Math. **141** (2005), 605–619.
- [C] R. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. **124** (1996), 214–241.
- [CM] R. Coleman & B. Mazur, *The eigencurve*, dans *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254**, Durham (1998), 1–113.
- [CohOe] H. Cohen & J. Oesterlé, *Dimension des espaces de formes modulaires*, dans *Modular Functions in One Variable VI*, Springer Verlag, Lecture notes in math. **627** (1977), 69–78.
- [Col1] P. Colmez, *Invariants L et dérivées de valeurs propres de Frobenius*. Prépublication (2003).
- [Co2] P. Colmez, *Série principale unitaire pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2*. Prépublication (2005).
- [Fo] J.-M. Fontaine, *Représentations p -adiques des corps locaux*, dans *The Grothendieck Festschrift. Vol. II*, Progr. Math. **87**, Birkhäuser, Boston (1990), 249–309.
- [Ki] M. Kisin, *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.
- [Ke] K. Kedlaya, *A p -adic local monodromy theorem*, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.
- [Liu] R. Liu, *Cohomology and duality for (φ, Γ) -modules over the Robba ring*. Prépublication (2007).
- [Mi] T. Miyake, *Modular forms*, Springer Verlag (1989).
- [St] W. Stein, *The modular form database*, <http://modular.fas.harvard.edu:8080/mfd>.
- [SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On l -adic representations and congruences for coefficients of modular forms II*, in *Modular functions of one variable V*, Lecture Notes in Math. **601** (1977), 63–90.

E-mail address: chenevie@math.univ-paris13.fr

C.N.R.S., LABORATOIRE ANALYSE GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, INSTITUT GALILÉE, UNIVERSITÉ PARIS 13, 99 AV. J.-B. CLÉMENT, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE