Problèmes de révisions à rendre pour le 2 novembre.

PROBLÈME 1. *(i) Déterminer des représentants de* $\mathrm{Cl}(-132)$ *ainsi que ses classes ambiguës.*

(ii) Déterminer l'ensemble C *des carrés de* $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

(iii) Soit n *un entier. Montrer que si* $n \equiv 2 \bmod 3$, *alors* n *n'est pas représenté par les formes* x^2+33y^2 *et* $6x^2+6xy+7y^2$. *Montrer de même que si* $\left(\frac{n}{11}\right) = -1$ *alors* n *n'est pas représenté par* $3x^2+11y^2$.

(iv) En déduire que tout nombre premier $p \equiv 5 \bmod 12$ *tel que* $p \bmod 11 \notin C$ *est de la forme* $2x^2+2xy+17y^2$. *Vérifier ce résultat sur quelques exemples.*

PROBLÈME 2. (Théorème de Rabinowitz) *Soit* k *un entier* ≥ 2. *On se propose de démontrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :*

(a) x^2+x+k *est un nombre premier pour tout entier* $0 \leq x < k-1$,

(b) x^2+x+k *est un nombre premier pour tout entier* $0 \leq x < \sqrt{k/3}-1/2$,

(c) $|\mathrm{Cl}(1-4k)| = 1$.

(i) Montrer (b) $\Rightarrow$ (c) *(penser aux formes réduites).*

(ii) Soit $n \in \mathbb{Z}$ *non carré et représenté par la forme* $(1,1,k)$. *Montrer* $n \geq k$.

(iii) Montrer que si une forme q *représente primitivement l'entier* n, *et si* m *est un diviseur de* n, *alors il existe une forme* q' *de même discriminant que* q *et qui représente primitivement l'entier* m.

(iv) En déduire (c) $\Rightarrow$ (a).

(v) Conclure, puis expliquer l'observation d'Euler : les 40 *premières valeurs du polynôme* X^2+X+41 *sont des nombres premiers.*

PROBLÈME 3. *(i) Soient* A *un groupe abélien et* $u : A \to A$ *un morphisme de groupes. On suppose que* A *possède une* $\mathbb{Z}$*-base finie* $e_1, \ldots, e_n$ *et l'on note* $U = (u_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ *la matrice de* u *dans cette base, définie par les égalités* $u(e_j) = \sum_{i=1}^n u_{i,j} e_i$ *pour* $1 \leq j \leq n$. *On suppose enfin* $\det U \neq 0$. *Montrer que* $\mathrm{Im}\, u$ *est un sous-groupe de* A *d'indice fini et égal à* $|\det U|$.

(ii) (Application) *Soient* $D \in \mathbb{Z}$ *un discriminant* < 0 *et* $x \in A_D - \{0\}$. *Montrer que le groupe quotient* A_D/xA_D *est fini et de cardinal égal à* $\mathrm{N}(x) = x\overline{x}$.

PROBLÈME 4. Soient d un entier < 0 et $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. On se propose de démontrer que si l'anneau A est principal alors on a $d = -1$ ou -2. *Soient* $a, b \in \mathbb{Z}$ *avec* $a > 0$ *; on note* $\mathrm{I}_{a,b}$ *le sous-groupe* $a\mathbb{Z} + (b+\sqrt{d})\mathbb{Z} \subset A$.

(i) Montrer que $\mathrm{I}_{a,b}$ *est un idéal de* A *si, et seulement si,* a *divise* b^2-d.

(ii) Montrer $|A/\mathrm{I}_{a,b}| = a$.

(iii) Montrer que si I *est un idéal principal de* A, *alors* $|A/I|$ *est soit* $\geq |d|$, *soit un carré.*

(iv) Conclure.