Examen M2 "Introduction aux formes automorphes et aux conjectures de Langlands" — 2 Juin 2017

Documents autorisés : polycopié du cours et notes de cours. Durée : 3h.

Problème 1. (Congruence de Ramanujan) *On se propose de montrer, pour tout nombre premier p, la congruence* $\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \mod 691$.

(i) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{E}_{12} - \mathrm{E}_4^3 = \lambda\,\Delta$.

(ii) (suite) Montrer $\lambda = \frac{65520}{691} - 720$.

(iii) Conclure.

Données : on a respectivement $-\frac{2k}{\mathrm{B}_k} = 240$ et $65520/691$ *pour $k = 4$ et 12, où B_k désigne le $k$ème nombre de Bernoulli ; on a aussi* pgcd*(65520,691)=1.*

Problème 2. (Un critère de commutativité de l'anneau de Hecke) *Soient G un groupe et X un ensemble muni d'une action transitive de G. On suppose X admissible, c'est-à-dire que pour toute G-orbite $\Omega \subset X \times X$ (pour l'action diagonale), et tout $x \in X$, l'ensemble $\Omega \cap (X \times \{x\})$ est fini.*

(i) Montrer que pour toute G-orbite $\Omega \subset X \times X$, et tout $x \in X$, l'ensemble $\Omega \cap (\{x\} \times X)$ est fini.

(ii) En déduire que pour tout opérateur de Hecke $T \in \mathrm{H}(X)$ il existe un unique opérateur de Hecke $T^{\mathrm{opp}} \in \mathrm{H}(X)$ vérifiant $\mathrm{T}^{\mathrm{opp}}_{x,y} = \mathrm{T}_{y,x}$ pour tout $x, y \in X$.

(iii) Vérifier l'égalité $(\mathrm{T} \circ \mathrm{S})^{\mathrm{opp}} = \mathrm{S}^{\mathrm{opp}} \circ \mathrm{T}^{\mathrm{opp}}$ *pour tout $S, T \in \mathrm{H}(X)$.*

(iv) On suppose que pour tout $(x, y) \in X \times X$ on a $(y, x) \in G.(x, y)$. Montrer que l'anneau $\mathrm{H}(X)$ est commutatif.

(v) (Application) *On prend $G = \mathfrak{S}_n$, $1 \leq k \leq n$ un entier, et on fait agir G naturellement sur l'ensemble X des parties à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que l'anneau $\mathrm{H}(X)$ est commutatif.*

Problème 3. *Soient p un nombre premier et $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ l'ensemble des éléments $g = (g_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $g_{1,1} \in p^{\mathbb{Z}}$, $g_{i,i} = 1$ pour $i \neq 1$, et $g_{i,j} = 0$ pour $i > 1$ et $j \neq i$.*

(i) Montrer que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, puis que c'est un ℓ-groupe pour la topologie induite par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

(ii) Montrer que G n'est pas unimodulaire pour $n > 1$.

Notations : Dans les exercices suivants, G désignera le groupe de Lie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie, $Z \simeq \mathbb{R}^\times$ le sous-groupe de G constitué des homothéties, et $B \subset G$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Comme dans le cours, on pose $\mathrm{s}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda & -\mathrm{Im}\,\lambda \\ \mathrm{Im}\,\lambda & \mathrm{Re}\,\lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ et $\mathrm{s}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Enfin, $K^+ = \mathrm{SO}(2)$ désigne le sous-groupe de G constitué des s_λ avec $|\lambda| = 1$, et on pose $K = \mathrm{O}(2) = K^+ \cup s_0 K^+$. Pour $x \in \mathbb{R}^\times$, on pose $\mathrm{sign}(x) = x/|x|$; on a $\mathrm{sign}(x) = \pm 1$.

Problème 4. (Induites paraboliques pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$) *On fixe un morphisme de groupes continu $\chi : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}^\times$. On rappelle que χ est soit de la forme $x \mapsto |x|^s$, soit de la forme $x \mapsto \mathrm{sign}(x)|x|^s$, pour un unique $s \in \mathbb{C}$ noté $s(\chi)$.*

(i) Montrer que l'application $\widetilde{\chi} : B \to \mathbb{C}^\times$, définie par $\widetilde{\chi}(b) = \chi(b_{1,1}/b_{2,2})$ où l'on a posé $b = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$, est un morphisme de groupes.

(ii) Rappeler pourquoi tout élément $g \in G$ s'écrit sous la forme $g = bk$ avec $b \in B$ et $k \in K^+$. Est-ce qu'il y a unicité de l'écriture ?

On note $\mathrm{I}(\chi)$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ qui sont K-finies (pour les translations à droite) et qui vérifient $f(bg) = \widetilde{\chi}(b)f(g)$ pour tout $b \in B$ et tout $g \in G$.

(iii) Montrer que $\mathrm{I}(\chi)$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $\mathcal{C}^\infty(G)_{K-\mathrm{fini}}$.

(iv) Soit $m \in 2\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\phi_m \in \mathrm{I}(\chi)$ vérifiant $\phi_m(1) = 1$ et $\phi_m(\mathrm{s}_\lambda) = \lambda^m$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ avec $|\lambda| = 1$. En déduire $\mathrm{I}(\chi)_m = \mathbb{C}\,\phi_m$.

(v) Montrer $\mathrm{I}(\chi) = \bigoplus_{m\in 2\mathbb{Z}} \mathbb{C}\,\phi_m$.

On considère la $\mathbb{C}$-base z, e, f, h de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ définie par

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ ih = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \text{ et } f = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} = \overline{e}.$$

Dans les questions (vi)—(viii), on fixe $m \in 2\mathbb{Z}$.

(vi) Vérifier l'égalité $\exp(ith) = \mathrm{s}_{e^{it}}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et montrer $\mathrm{R}_h\,\phi_m = m\,\phi_m$.

(vii) En utilisant l'égalité $2e = h + \mathrm{E}_{1,1} - \mathrm{E}_{2,2} - 2i\mathrm{E}_{1,2}$, montrer $(\mathrm{R}_e\,\phi_m)(1) = s(\chi) + \frac{m}{2}$.

(viii) En déduire $\mathrm{R}_e\,\phi_m = (s(\chi) + \frac{m}{2})\,\phi_{m+2}$, et par la même méthode $\mathrm{R}_f\,\phi_m = (s(\chi) - \frac{m}{2})\,\phi_{m-2}$.

(ix) On suppose $s(\chi) \notin \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{I}(\chi)$ est irréductible. Quelle précision est-ce que cela apporte au Théorème 5.16 du cours ?

(x) Déterminer $\mathrm{R}_{\mathrm{s}_0}\phi_0$. En déduire que si $\mathrm{I}(\chi)$ et $\mathrm{I}(\chi')$ sont isomorphes, on a $\chi(-1) = \chi'(-1)$.

(xi) Montrer que l'élément de Casimir $C \in \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ agit par multiplication par $2s(\chi)(s(\chi) - 1)$ sur $\mathrm{I}(\chi)$.

(xii) En déduire que si $u : \mathrm{I}(\chi) \to \mathrm{I}(\chi')$ est un morphisme non nul de $(\mathfrak{g}, K)$-modules, alors on a $s(\chi) = s(\chi')$ ou $s(\chi) = 1 - s(\chi')$.

Dans les questions qui suivent on suppose $s(\chi) \in \mathbb{Z}$ et on note $\mathrm{J}(\chi)$ le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $\mathrm{I}(\chi)$ engendré par ϕ_{-m} avec $m = 2s(\chi)$.

(xiii) On suppose $s(\chi) > 0$. Montrer que $\mathrm{J}(\chi)$ est l'unique sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $\mathrm{I}(\chi)$ distinct de 0 et $\mathrm{I}(\chi)$, qu'il est isomorphe à $\mathrm{D}_{2s(\chi),0}$ (notation du cours), et que le quotient $\mathrm{I}(\chi)/\mathrm{J}(\chi)$ est irréductible et de dimension $2s(\chi) - 1$.

(xiv) Que se passe-t-il pour $s(\chi) \leq 0$?

On rappelle que $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ désigne l'espace des formes automorphes paraboliques f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ relativement au sous-groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, qui vérifient $f(zg) = f(g)$ pour tout $z \in Z$ et tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On rappelle également que l'on a muni dans le cours l'espace topologique quotient $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}} \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ d'une mesure borélienne $\overline{\lambda}$ qui est invariante par translations à droite par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Problème 5. *On se propose de montrer que l'on a $\int_X f\,\overline{\lambda} = 0$ pour tout $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$.*

(i) Montrer que l'application $\Lambda : \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}} \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_X f\,\overline{\lambda}$, est bien définie et $\mathbb{C}$-linéaire.

(ii) Montrer que pour tout $k \in K$, tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$, on a

$$\Lambda(\mathrm{R}_k f) = \Lambda(f) \quad \text{et } \Lambda(\mathrm{R}_X f) = 0.$$

(iii) En déduire que si l'on munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module en posant, pour $z \in \mathbb{C}, k \in K$ et $X \in \mathfrak{g}$, $k.z = z$ et $X.z = 0$ (justifier), alors Λ est un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}} \to \mathbb{C}$.

(iv) Montrer que si Λ est non nulle alors $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ contient un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module isomorphe à $\mathbb{C}$.

(v) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ vérifie $\mathrm{R}_X f = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, alors f est constante sur chaque composante connexe de G.

(vi) Conclure.