CHAPITRE 6

L'espace des formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

Dans cette partie, on s'intéresse à la structure du $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$-module

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\,;\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}))$$

des formes automorphes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pour le sous-groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. En particulier, on se propose de démontrer que pour tout idéal de codimension finie I de $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$, le $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathcal{A}[I]$ est admissible.

Nous commencerons pour cela par introduire plusieurs espaces annexes, dont celui $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}} \subset \mathcal{A}$ des formes *paraboliques*, ainsi qu'un autre espace très concret $\mathcal{A}_P$ (espace des "termes constants") ; ils sont tels que l'on dispose d'une suite exacte naturelle de $(\mathfrak{g}, K)$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_P$$

L'admissibilité des $\mathcal{A}_P[I]$ est élémentaire, et ramène l'admissibilité de $\mathcal{A}[I]$ à celle des $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}[I]$. L'espace $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ lui-même admet une description très simple en terme de son sous-espace $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ des formes paraboliques invariantes par l'action du centre $\mathbb{R}^\times$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Une propriété importante des telles formes paraboliques est qu'elles sont bornées sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, ce que l'on démontrera dans une seconde partie.

On étudie ensuite l'espace homogène quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, ou plutôt le quotient $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}$ est le sous-groupe (encore discret) engendré par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et l'homothétie $e^{1/2}$. On montre que X est muni d'un mesure invariante naturelle héritée de la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (introduite concrètement au chapitre précédent) et surtout qu'il est de volume finie : ce volume vaut même $\zeta(2)$, un cas particulier de la célèbre formule du volume de Siegel.

Cette finitude entraîne que les éléments de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ sont de carré intégrable sur X, et permet l'utilisation de méthodes hilbertiennes. Le fait que l'espace $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}[I]_m$ est de dimension finie est alors conséquence du fait qu'il est fermé dans $\mathrm{L}^2(X)$ et constitué de fonctions bornées (critère de Godement). Le caractère fermé n'est pas immédiat : il requiert un argument de régularité elliptique. Le théorème principal est alors que $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ est une somme *directe* de $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles, chacun d'entre eux intervenant avec une multiplicité finie.

Références :

[B1], A. Borel, *Automorphic forms on* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Cambridge Tract in Math. 130 (1997),

[B2], A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Institut de Math. de l'université de Strasbourg (1969),

W. Casselman, *Analysis on* SL(2), notes de cours,

Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups* (1968),

L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential equations* (1983),

1. Formes paraboliques

On pose $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, $K = \mathrm{O}(2)$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$, $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\,;\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})).$$

On rappelle que P est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme p_τ avec $\tau \in \mathbb{H}$. Il contient comme sous-groupe le groupe

$$N = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\},$$

ce dernier étant naturellement isomorphe au groupe additif de $\mathbb{R}$ via l'application $x \mapsto \mathrm{n}_x$, où n_x désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On constate que n_1 n'est autre que l'élément noté $\mathrm{T} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ainsi que les égalités

$$N \cap \Gamma \ = \ \{n_x, x \in \mathbb{Z}\} \ = \ \langle T \rangle \ \overset{\sim}{\to} \ \mathbb{Z}.$$

Définition 6.1. *Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue vérifiant $f(\mathrm{T}g) = f(g)$ pour tout $g \in G$. Pour tout $g \in G$ on pose*

$$f_P(g) \ = \ \int_0^1 f(\mathrm{n}_x\, g)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $f_P : G \to \mathbb{C}$ est appelée terme constant de f le long de P. *C'est une fonction continue vérifiant $f_P(ng) = f_P(g)$ pour tout $n \in N$. On a aussi $(f_P)_P = f_P$.*

Supposons $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ et $f(\mathrm{T}g) = f(g)$ pour tout $g \in G$. À $g \in G$ fixé, la fonction $x \mapsto f(n_x\, g)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un "développement de Fourier" absolument convergent

$$f(n_x g) \ = \ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{c}_m(f;g) e^{2i\pi m x},$$

avec $\mathrm{c}_0(f;g) = f_P(g)$, d'où la terminologie.

Exemple 6.2. Si $f \in \mathrm{M}_k$ on a $\Phi_f(n_x \mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda) = \Phi_f(\mathrm{p}_{\tau+x}\mathrm{s}_\lambda) = \lambda^{-k} f(\tau + x) = \lambda^{-k}(\sum_{m \geq 0} \mathrm{a}_m(f) e^{2i\pi m\tau} e^{2i\pi m x})$. On a donc $\mathrm{c}_m(\Phi_f; \mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda) = \lambda^{-k}\mathrm{a}_m(f) e^{2i\pi m \tau}$, puis

$$(\Phi_f)_P(\mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda) = \lambda^{-k}\mathrm{a}_0(f).$$

Ce cas est atypique : en général, le terme constant d'un $f \in \mathcal{A}$ dépendra de τ.

Supposons toujours $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ et $f(\mathrm{T}g) = f(g)$ pour tout $g \in G$. La fonction $\mathbb{R} \times G \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(\mathrm{n}_x g)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a aussi $f_P \in \mathcal{C}^\infty(G)$. De plus, si $h \in G$ et $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, les fonctions $\mathrm{R}_h f$ et $\mathrm{R}_X f$ sont encore invariantes à gauche par T, et on a les relations

$$(\mathrm{R}_h f)_P \ = \ \mathrm{R}_h(f_P) \quad \text{et} \quad (\mathrm{R}_X f)_P \ = \ \mathrm{R}_X(f_P), \tag{39}$$

de sorte que l'on peut aussi remplacer R_X par un élément arbitraire de $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ dans la seconde relation ci-dessus.

Définition 6.3. *On note $\mathcal{A}_P$ le sous-espaces des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ qui sont K-finies (à droite), $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$-finies, invariantes à gauche par N et le sous-groupe $D \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ constitué des matrices diagonales.*

On a bien entendu $D \simeq \mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Remarquons que D normalise N, et que si f est continue et invariante à gauche par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, et que si $d = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$ on a $f(n_x dg) = f(n_{d_2/d_1 x}\, g)$ puis $f_P(dg) = f_P(g)$. Étant données les Formules (39) on a démontré le lemme suivant :

Lemme 6.4. *$\mathcal{A}_P$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $\mathrm{C}^\infty(G)_{K-\mathrm{fini}}$, et l'application $f \mapsto f_P$ est un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_P$.*

Corollaire-Définition 6.5. *Une forme automorphe $f \in \mathcal{A}$ est dite parabolique si l'on a $f_P = 0$. Les formes paraboliques forment un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $\mathcal{A}$ noté $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}} \subset \mathcal{A}$.*

La structure du $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathcal{A}_P$ est en fait relativement simple, de sorte que nous seront ramenés en première approche à l'étude de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$. Notons $A \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales de la forme $\mathrm{diag}(a_1, a_2)$ avec $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ (on ne demande pas $a_1 \geq a_2$ ici). Tout élément de G s'écrit alors sous la forme $n\,d\,a\,k$ avec $n \in N$, $d \in D$, $a \in A$ et $k \in \mathrm{SO}(2)$. On voit A comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de manière évidente. On considère la restriction

$$\rho : \mathcal{A}_P \to \mathcal{C}^\infty(A),\ \ f \mapsto (a \mapsto f(a)).$$

Pour $i = 1, 2$ on a clairement la relation

$$(40) \qquad \rho(\mathrm{R}_{E_{i,i}} f) \ = \ \mathrm{D}_i\, \rho(f) \ \text{ avec } \ \mathrm{D}_i = a_i \frac{\partial}{\partial a_i}.$$

Lemme 6.6. *(i) Pour tout $f \in \mathcal{A}_P$ on a $\rho(\mathrm{R}_{\mathrm{E}_{1,2}}\, f) = 0$.*

(ii) Soit $\xi : \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}[D_1, D_2]$ le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres envoyant Z sur $D_1 + D_2$ et C sur $D_1^2 + D_2^2 + D_2 - D_1$. On a $\rho(z\, f) = \xi(z)\rho(f)$ pour tout $f \in \mathcal{A}_P$ et tout $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$.

(iii) Si I est un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$, l'idéal de $\mathbb{C}[D_1, D_2]$ engendré par $\xi(I)$ est aussi de codimension finie.

(iv) Soient $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(A)$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ avec $P_1(D_1)(\varphi) = P_2(D_2)(\varphi) = 0$. Alors φ une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme

$$(a_1, a_2) \mapsto (\log a_1)^{n_1}\, a_1^{s_1}\, (\log a_2)^{n_2}\, a_2^{s_2},$$

où les n_i sont des entiers avec $0 \leq n_i < P_i$, et où les s_i sont des nombres complexes tels que $P_i(s_i) = 0$.

Démonstration — Si $a \in A$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $e^{t\mathrm{E}_{1,2}} = n_t$ et $a\, n_t = n_{a_1/a_2\, t}\, a$. Si $f \in \mathcal{A}_P$, la fonction $t \mapsto f(an_t)$ est donc constante, ce qui montre le (i).

Montrons le (ii). La relation $[\mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{1,2}] = \mathrm{E}_{2,2} - \mathrm{E}_{1,1}$ montre que l'on a

$$C = \mathrm{E}_{1,1}^2 + \mathrm{E}_{2,2}^2 + \mathrm{E}_{2,2} - \mathrm{E}_{1,1} + 2\,\mathrm{E}_{1,2}\mathrm{E}_{2,1}.$$

Si $f \in \mathcal{A}_P$ alors on a $\mathrm{R}_{E_{2,1}} f \in \mathcal{A}_P$, et donc $\rho(\mathrm{E}_{1,2}\mathrm{E}_{2,1} f) = 0$ d'après le (i). La formule (40) entraîne que pour tout $f \in \mathcal{A}_P$ on a les égalités $\rho(C\, f) = \xi(C)\rho(f)$ et $\rho(\mathrm{R}_Z f) = \xi(Z)\rho(f)$, qui entraîne le (ii) car C et Z engendrent $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$.

Le (iii) est un énoncé purement algébrique. Si I est un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}$, il existe des polynômes $Q_i \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ avec $Q_1(C) \in I$ et $Q_2(Z) \in I$. Soit J

l'idéal de $\mathbb{C}[X,Y]$ engendré par les polynômes $Q_1(X^2+Y^2+Y-X)$ et $Q_2(X+Y)$. Cet idéal est manifestement de codimension finie dans $\mathbb{C}[X,Y]$, puisque le lieu de ses zéros $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ est fini : les éléments $t=x+y$ et $x^2+y^2+y-x=y^2+2(1-t)y+t^2-t$ sont des racines respectives de Q_1 et Q_2 et ne prennent donc qu'un nombre fini de valeurs, ainsi donc que y et x.

Le (iv) est une équation différentielle linéaire ordinaire très classique. On se ramène par Bézout (lemme des noyaux) au cas $P_1=(X-s_1)^{n_1}$ et $P_2=(X-s_2)^{n_1}$. La fonction $\varphi(a_1,a_2)$, à a_2 fixé, est annulée par $(a_1\frac{\partial}{\partial a_1}-s_1)^{n_1}$, c'est donc une combinaison linéaire finie de la forme $\sum_{i=0}^{n_1-1}\lambda_i(a_2)(\log a_1)^i a_1^{s_1}$, avec $\lambda_i(a_2)\in\mathbb{C}$ uniquement déterminée. Les fonctions $a_2\to\lambda_i(a_2)$ sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et annulées par $(a_2\frac{\partial}{\partial a_2}-s_2)^{n_2}$, et on conclut par le même argument que précédemment. □

Corollaire 6.7. *Soit I un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$. Le $(\mathfrak{g},K)$-module $\mathcal{A}_P[I]$ est admissible. De plus, $\mathcal{A}[I]$ est admissible si, et seulement si, $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}[I]$ l'est.*

Démonstration — Soit $m\in\mathbb{Z}$. La décomposition $G=NDAK^+$ montre que l'application ρ induit une injection $(\mathcal{A}_P)_m\longrightarrow\mathcal{C}^\infty(A)$. Soit ξ comme dans l'énoncé du Lemme 6.6 (ii) et J l'idéal de $\mathbb{C}[D_1,D_2]$ engendré par $\xi(I)$; on en déduit que ρ induit une injection $(\mathcal{A}_P)_m[I]\longrightarrow\mathcal{C}^\infty(A)[J]$. Par le (iii) du même lemme, J est de codimension finie dans $\mathbb{C}[D_1,D_2]$, il existe donc $P_i\in\mathbb{C}[X]-\{0\}$ avec $P_i(D_i)\in J$ pour $i=1,2$. Par le point (iv), $\mathcal{C}^\infty(A)[J]$ est de dimension finie, ainsi donc que $(\mathcal{A}_P)_m[I]$, ce qui montre l'admissibilité de $\mathcal{A}_P[I]$. Le dernier point résulte alors de la suite exacte $0\to\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}[I]\to\mathcal{A}[I]\to\mathcal{A}_P[I]$ (tout sous-$(\mathfrak{g},K)$-module d'un $(\mathfrak{g},K)$-module admissible est admissible, et une extension d'un $(\mathfrak{g},K)$-module admissible par un $(\mathfrak{g},K)$-module admissible est admissible). □

Nous allons donc nous concentrer sur l'étude de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$.

2. Les formes paraboliques invariantes par $\mathbb{R}^\times$ sont bornées

Lemme 6.8. ("Estimée fondamentale") *Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(G)$ vérifiant $f(\mathrm{T}g)=f(g)$ pour tout $g\in G$. Soit $X_1,\ldots,X_4$ une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{g}$. Il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $g\in G$ on ait $|f(g)-f_P(g)|\leq c\,|\mathrm{Im}\,g.i|^{-1}\sum_{j=1}^4|\mathrm{R}_{X_j}f|_P(g)$.*

Démonstration — Fixons $g\in G$ et posons $\varphi(t)=f(g)-f(\mathrm{n}_t g)$ (c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). On a d'abord $\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t=f(g)-f_P(g)$. La majoration évidente $|\varphi(t)|\leq\int_0^s|\varphi'(s)|\mathrm{d}s\leq\int_0^1|\varphi'(s)|\mathrm{d}s$ (noter $\varphi(0)=0$) entraîne

$$|f(g)-f_P(g)|\leq\int_0^1|\varphi'(t)|\mathrm{d}t. \tag{41}$$

D'autre part, on a $\mathrm{n}_{t+h}\,g=\mathrm{n}_t\,g\,e^{h\,\mathrm{ad}_{g^{-1}}\mathrm{E}_{1,2}}$ pour tout $t,h\in\mathbb{R}$. Écrivons g sous la forme $\mathrm{p}_\tau\mu k$ avec $\tau=g.i=x+iy\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}_{>0}$ et $k\in\mathrm{SO}(2)$. On a $\mathrm{p}_\tau=\mathrm{n}_x\,\mathrm{diag}(y,1)$, $\mathrm{ad}_n\mathrm{E}_{1,2}=\mathrm{E}_{1,2}$ pour tout $n\in N$, et $\mathrm{ad}_{\mathrm{diag}(y,1)^{-1}}(\mathrm{E}_{1,2})=y^{-1}\mathrm{E}_{1,2}$. Si l'on pose $\mathrm{ad}_{k^{-1}}\mathrm{E}_{1,2} = \sum_{j=1}^4 a_j(k)X_i$, ce qui définit uniquement les fonctions $a_j : K \to \mathbb{R}$, on a donc une identité de la forme

$$\mathrm{ad}_{g^{-1}}\,\mathrm{E}_{1,2} \;=\; y^{-1}\sum_{j=1}^{4} a_j(k)X_j.$$

Les fonctions $|a_j|$ sont continue sur le compact $\mathrm{SO}(2)$; elles sont donc majorées par une même constante $c > 0$. Si l'on met tout bout-à-bout on a montré pour $t \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi'(t)| \;\leq c\,|\mathrm{Im}\, g.i|^{-1}\sum_{j=1}^{4} |\mathrm{R}_{X_j} f|(n_t g),$$

et on conclut par l'inégalité (41). □

Théorème 6.9. *Soit* $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$.

(i) (Décroissance rapide des formes cuspidales) *Pour tout entier* $N \geq 1$ *et tout* $A > 0$*, il existe un réel* $c > 0$ *tel que pour tout* $\tau \in \mathbb{H}$ *avec* $\mathrm{Im}\,\tau \geq A$*, et tout* $k \in \mathrm{SO}(2)$*, on ait* $|f(\mathrm{p}_\tau k)| \;\leq\; c\,|\mathrm{Im}\,\tau|^{-N}$.

(ii) Si on a $|f(zg)| = |f(g)|$ *pour tout* $z \in \mathbb{R}_{>0}$ *et tout* $g \in G$*, alors* $|f|$ *est bornée sur* G.

Démonstration — (Démonstration du Théorème 6.9) Observons que si f satisfait les hypothèses du Lemme 6.8, et si $f_P = 0$, la conclusion de ce lemme entraîne qu'il existe un réel $c = c_f > 0$ tel que $|f(ng)| \;\leq\; c_f\,|\mathrm{Im}\, g.i|^{-1}\sum_{j=1}^4 |\mathrm{R}_{X_j} f|_P(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $n \in N$ (noter $\mathrm{Im}\, ng.i = \mathrm{Im}\, g.i$). On en déduit

$$|f|_P(g) \;\leq\; c_f\,|\mathrm{Im}\, g.i|^{-1}\sum_{j=1}^{4} |\mathrm{R}_{X_j} f|_P(g), \quad \forall\, g \in G. \tag{42}$$

Mais les fonctions $\mathrm{R}_{X_j} f$ vérifient encore les hypothèses du lemme, et aussi $(\mathrm{R}_{X_j}\, f)_P \;=\; \mathrm{R}_{X_j}\, f_P \;=\; 0$, de sorte qu'ils vérifient une inégalité de la forme (42) (pour une autre constante que c_f à priori). On en déduit par récurrence que pour tout entier $m \geq 1$ on a

$$\sum_{j=1}^{4} |\mathrm{R}_{X_j} f|_P(g) \;\leq\; c_{f,m}\,|\mathrm{Im}\, g.i|^{1-m}\sum_{u\in B_m} |u.f|_P(g) \;\; \forall g \in G,$$

où $\mathrm{B}_m \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ désigne la famille des 4^m de monômes " de degré m" en les X_j. Supposons maintenant $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$. D'après le Corollaire 5.20, f est à croissance uniformément modérée : il existe $n \geq 0$ (fixé dans toute la suite) tel que pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ il existe $C(u, f) > 0$ avec $|u.f|(g) \leq C(u, f)||g||^n$ pour tout $g \in G$. En particulier on a

$$|u.f|_P(g) \;=\; \int_0^1 |u.f|(\mathrm{n}_x\, g)\mathrm{d}x \leq C(u, f)\,||g||^n M$$

avec $M = \int_0^1 ||\mathrm{n}_x||^n \mathrm{d}x$. On en déduit que pour tout $m \geq 1$ il existe $C_{f,m} > 0$ avec

$$|f(g)| \;\leq\; C_{f,m}\,|\mathrm{Im}\, g.i|^{-m}\,||g||^n \quad \forall g \in G, \tag{43}$$

(on peut prendre $C_m = c_f c_{f,m}(\sum_{u\in\mathrm{B}_m} C(u, f))M$.)

Montrons maintenant le (i). On peut supposer $|\mathrm{Re}\,\tau| \leq 1$ car $f(\mathrm{p}_\tau k) = f(\mathrm{T}\mathrm{p}_\tau k) = f(\mathrm{p}_{\tau+1} k)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. On a alors

$$||\mathrm{p}_\tau k||^2 \;=\; ||\mathrm{p}_\tau||^2 \;=\; |\tau|^2 + 1 + (\mathrm{Im}\,\tau)^{-2} \;\leq\; (\mathrm{Im}\,\tau)^2 + 2 + A^{-2} \;\leq\; \alpha\,(\mathrm{Im}\tau)^2,$$

avec $\alpha = (A^2 + 2 + A^{-2})A^{-2}$, pour $\mathrm{Im}\,\tau \geq A$. La majoration (43) entraîne donc

$$|f(\mathrm{p}_\tau k)| \;\leq\; \sqrt{\alpha}\, C_{f,m}\, |\mathrm{Im}\,\tau|^{n-m}.$$

On conclut en prenant $m > N + n$.

Montrons le (ii). Le (i) et l'hypothèse entraînent que $|f|$ est bornée sur l'ensemble Π des éléments de la forme $\mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda$ avec $\tau \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On conclut car $|f|$ est invariante à gauche par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et on a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).\Pi = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ d'après le Théorème 2.1. □

Remarque 6.10. Le (i) du Théorème 6.9 permet de montrer plus généralement que si $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ et $f' \in \mathcal{A}$ sont tels que la fonction $g \mapsto |f(g)f(g')|, G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, est $\mathbb{R}_{>0}$ invariante, alors $g \mapsto |f(g)f'(g)|$ est bornée sur G.

Définition 6.11. *On note $\mathcal{A}^{\mathrm{unit}} \subset \mathcal{A}$ le sous-espace des formes automorphes qui vérifient $f(zg) = f(g)$ pour tout $z \in \mathbb{R}_{>0}$ et tout $g \in G$. C'est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module. On pose aussi $\mathcal{A}^{\mathrm{unit}}_{\mathrm{cusp}} = \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{unit}}$.*

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $s \in \mathbb{C}$, on pose $e_{n,s}(g) \;=\; (\log|\det g|)^n\,|\det g|^{s/2}$. Le lemme facile suivant ramène la structure de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ à celle de $\mathcal{A}^{\mathrm{unit}}_{\mathrm{cusp}}$.

Lemme 6.12. *Pour tout entier $N \geq 0$ et tout $s \in \mathbb{C}$ on a*

$$\mathcal{A}[(\mathrm{R}_Z - s)^N] = \bigoplus_{0 \leq n \leq N} e_{n,s}\,\mathcal{A}^{\mathrm{unit}}.$$

En particulier, on a $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0, s \in \mathbb{C}} e_{n,s}\,\mathcal{A}^{\mathrm{unit}}$ (et idem en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$).

Démonstration — Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ annulée par $(\mathrm{R}_Z - s)^n$. Pour $h \in G$ on constate que la fonction $t \mapsto f(th)$, $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$, est annulée par $(t\frac{\partial}{\partial t} - s)^N$. Il existe donc des uniques scalaires $\lambda_n(h)$ tels que pour tout $t > 0$ on a $f(th) \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} (\log t)^n\, t^s\, \lambda_n(h)$. On conclut aisément en prenant $t = |\det g|^{1/2}$ et $h = g/|\det(g)|^{1/2}$ (et donc $th = g$). □

3. Digression sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Considérons temporairement le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 1$ quelconque. Il sera peu élégant mais commode de considérer le sous-groupe

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

engendré par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et l'homothétie $e^{1/n}$ ("e" comme "étendu"). C'est un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: si U désigne un voisinage de 1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ assez petit de sorte que l'on ait $1/e < |\det g| < e$ et $|g_{i,j} - \delta_{i,j}| < 1$ pour tout $g \in U$, on constate que l'on a $U \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}} = \{1\}$. Quitte à remplacer U par un sous-ensemble ouvert contenant 1, on peut même supposer $UU^{-1} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}} = \{1\}$. On en déduit que

pour tout $g \in G$ la réunion $\bigcup_{\gamma\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}} \gamma\, U\, g$ est disjointe, et donc que la projection naturelle
$$\pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$
est un revêtement. Cela permet l'espace quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (un espace topologique manifestement localement compact, séparé, et réunion dénombrable de compacts) d'une mesure $\overline{\lambda} = \mathrm{d}\overline{g}$ héritée de la mesure de Haar $\lambda = \mathrm{d}g$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ introduite au §3 Chap. 5 :

Lemme 6.13. *Il existe une unique mesure borélienne $\overline{\lambda}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout borélien $X \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\lambda(X \cap \gamma X) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma - \{1\}$ on ait $\overline{\lambda}(\pi(X)) = \lambda(X)$. La mesure $\overline{\lambda}$ est invariante par translations à droite par G.*

Démonstration — On pose $\Gamma = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}$ et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Un argument de compacité montre que $\Gamma\backslash G$ est réunion dénombrable de compacts, disons K_n avec $n \geq 1$, au dessus desquels le revêtement π est trivial. En particulier, il existe un compact $U_n \subset G$ avec $\pi^{-1} K_n = \coprod_{\gamma\in\Gamma} \gamma\, U_n$. Les boréliens $K'_n = K_n - \cup_{1\leq k<n} K_k$ avec $n \geq 1$ forment une partition dénombrable de $\Gamma\backslash G$, et si l'on pose $U'_n = \pi^{-1}K'_n \cap U_n$, on a

$$G = \coprod_{\gamma\in\Gamma} \gamma U', \quad \text{avec } U' = \coprod_{n\geq 1} U'_n. \tag{44}$$

Si $\overline{\lambda}$ existe avec la propriété du lemme, on a pour tout borélien Y de $\Gamma\backslash G$ l'égalité

$$\overline{\lambda}(Y) = \sum_{n\geq 1} \overline{\lambda}(Y \cap K'_n) = \sum_{n\geq 1} \lambda(\pi^{-1}(Y) \cap U'_n) = \lambda(\pi^{-1}(Y) \cap U') \tag{45}$$

ce qui montre son unicité. Réciproquement, définissons $\overline{\lambda}$ par cette formule, i.e.
$$\overline{\lambda}(Y) = \lambda(\pi^{-1}(Y) \cap U')$$
pour tout borélien Y de $\Gamma\backslash G$. Pour voir qu'elle satisfait la condition de l'énoncé, observons que si A et B sont deux boréliens de G avec $\lambda(A\cap\gamma A) = \lambda(B \cap \gamma B) = 0$ pour tout $\gamma \neq 1$, et si on a $C \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma A = C \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma B$ avec C négligeable, alors on a $\lambda(A) = \lambda(B)$. En effet, la dénombrabilité de Γ et l'invariance de λ à gauche par Γ entraînent

$$\lambda(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda(A \cap \gamma B) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda(\gamma^{-1}A \cap B) = \lambda(B). \tag{46}$$

Soient $B \subset G$ un borélien quelconque et $A = (\pi^{-1}\pi(B)) \cap U'$. On a $\pi(A) = \pi(B)$ d'après (44), i.e.
$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma A = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma B.$$
Si $B = X$ est comme dans l'énoncé du lemme, on a donc $\lambda(X) = \lambda(A) = \overline{\lambda}(\pi(X))$ (par définition de $\overline{\lambda}$), comme affirmé dans l'énoncé. L'invariance par translations à droite découle de la même propriété pour λ : pour $g \in G$, Y borélien de $\Gamma\backslash G$, et $X = \pi^{-1}Y \cap U'$, on a $\overline{\lambda}(Yg) = \overline{\lambda}(\pi(Xg)) = \lambda(Xg) = \lambda(X) = \overline{\lambda}(Y)$. □

On note $\overline{\lambda} = \mathrm{d}\overline{g}$ la mesure définie par le lemme ci-dessus sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Nous appellerons *domaine fondamental* pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_e$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tout borélien $X \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\lambda(X \cap \gamma X) = 0$ pour $\gamma \in \Gamma - \{1\}$ et tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) - \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma X$ est négligeable. La démonstration ci-dessus montre qu'un tel domaine existe toujours : par exemple, la partie U' définie dans la démonstration ci-dessus en est un d'après (44). De plus, nous avons aussi montré (Formule (46)) que tous les domaines fondamentaux ont même mesure, à savoir $\overline{\lambda}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

Théorème 6.14. *L'espace* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est de mesure finie. Mieux, on a*

$$\overline{\lambda}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \prod_{k=2}^{n}\zeta(k).$$

On ne va démontrer ce résultat que pour $n \leq 2$. Pour $n = 1$, l'ensemble $[1, e] \subset \mathbb{R}^\times$ est un domaine fondamental, et on a donc $\overline{\lambda}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})) = \int_1^e \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1$ (conformément à la formule ci-dessus). Dans le cas $n = 2$, notons $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ la partie introduite au Chapitre 2 §1, et $\mathcal{F}_0$ son intérieur. Le Théorème 6.14 et la Proposition 4.19 montrent que l'ouvert

$$\Pi_0 = \{\mathrm{p}_\tau\,\mathrm{s}_\lambda \mid \tau \in \mathcal{F}_0,\ 1 < |\lambda| < e^{1/2},\ 0 < \arg\lambda < \pi\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \tag{47}$$

est un domaine fondamental. En effet, l'ensemble $C \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ constitué des éléments de la forme $\mathrm{p}_\tau\mathrm{s}_\lambda$ avec $\tau \in \partial\mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est négligeable pour dg (ce sera particulièrement évident une fois démontré le Lemme 6.15 ci-dessous). Pour déterminer son volume, nous aurons besoin d'une formule pour $\mathrm{d}g$ adaptée à la décomposition $G = NAZK$. On considère la variété différentielle $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ munie de la mesure

$$\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t}{z\,y^2}.$$

On pose $\mathrm{a}_y = \mathrm{diag}(y, 1)$ pour $y \in \mathbb{R}^\times$. On a déjà justifié que l'application

$$\varphi : M \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ (x, y, z, t) \mapsto \mathrm{n}_x\,\mathrm{a}_y\,z\,\mathrm{s}_{e^{it}},$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Lemme 6.15. *Soit* $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. *On a* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{d}g)$ *si, et seulement si,* $f \circ \varphi \in \mathrm{L}^1(M, \mathrm{d}m)$, *et si ces assertions sont satisfaites on a l'égalité*

$$\int_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} f(g)\,\mathrm{d}g = \int_M f \circ \varphi(x, y, z, t)\ \mathrm{d}m.$$

Démonstration — On pose $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (vu comme ouvert de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$). Le théorème du changement de variables montre que pour toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ la fonction $f(g)\,|\det g|^{-2}$ sommable sur G pour la mesure $\prod_{i,j}\mathrm{d}g_{i,j}$ si, et seulement si, $f(\varphi(x, y, z, t))\,y^{-2}\,z^{-4}\,\mathrm{Jac}_\varphi(x, y, z, t)$ est sommable sur M, et qu'alors on a l'égalité

$$\int_G f(g)\,|\det g|^{-2}\prod_{i,j}\mathrm{d}g_{i,j} = \int_M f(\varphi(x, y, z, t))\,z^{-4}\,y^{-2}\,\mathrm{Jac}_\varphi(x, y, z, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t,$$

En particulier, on a

$$\mathrm{d}g = J(x, y, z, t)\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{|y|}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad J(x, y, z, t) = \mathrm{Jac}_\varphi(x, y, z, t)\,|y|^{-1}\,z^{-3}.$$

On pourrait calculer de manière directe le Jacobien ci-dessus pour conclure, mais ce n'est pas nécessaire par le raisonnement suivant. En effet, $\mathrm{d}g$ est invariante à droite par $\mathrm{SO}(2)$, mais multiplier à droite par $e^{2i\pi t'}$ sur G revient à appliquer le changement de variables $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, t + t')$; comme $\mathrm{d}t$ est invariante par translations, la fonction J est indépendante de t. De même, comme $\mathrm{d}g$ est invariante à gauche, et puisque la multiplication à gauche par $\mathrm{n}_{x'}z'$ revient à appliquer le changement de variables $(x,y,z,t) \mapsto (x+x',y,zz',t)$, J est également indépendante de x et z. Mais pour $y' \in \mathbb{R}^\times$ on a

$$\mathrm{a}_{y'}\,\varphi(x,y,z,t) = \varphi(y'x,y'y,z,t).$$

Comme $\mathrm{d}y/|y|$ est invariante par translations sur $\mathbb{R}^\times$, et comme on a $\mathrm{d}(y'x) = |y'|\mathrm{d}x$, on a donc $J(y'x,y'y,z,t)|y'| = J(x,y,z,t)$ pour tous x,y,y',z,t, puis (avec $y' = 1/y$)

$$J(x,y,z,t) \;=\; J(0,1,1,0)\,|y|^{-1} \quad \text{avec} \quad J(0,1,1,0) = \mathrm{Jac}_\varphi(0,1,1,0).$$

La différentielle en de φ en $(0,1,1,0)$ (d'image $1 \in G$) est l'application linéaire

$$(u,v,w,t) \mapsto \begin{pmatrix} w+v & u-t \\ t & w \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire $J(0,1,1,0) = 1$. □

Il ne reste qu'à montrer le :

Lemme 6.16. *On a* $\lambda(\Pi_0) \;=\; \pi^2/6 \;= \zeta(2)$.

Démonstration — Par définition, Π_0 est l'ensemble des $\mathrm{n}_x\,\mathrm{a}_y\,z\,\mathrm{s}_{e^{it}}$ avec $x+iy \in \mathring{\mathcal{F}}$, $1 < z < e^{1/2}$ et $0 < t < \pi$. Le Lemme 6.15 appliqué à la fonction caractéristique de Π_0 entraîne donc

$$\lambda(\Pi_0) \;=\; \int_1^{e^{1/2}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \;\times\; \int_0^\pi \mathrm{d}t \;\times\; \int_{|x|<1/2,\,\sqrt{1-x^2}<y} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$
$$=\; \frac{\pi}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right)\mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on conclut car on a $\arcsin(1/2) - \arcsin(-1/2)) \;=\; 2\pi/6 \;=\; \pi/3$. □

Remarque 6.17. Le Théorème 6.14 est dû à Siegel ; sa démonstration pour n général ne repose pas sur la détermination d'un domaine fondamental explicite. La finitude de $\overline{\lambda}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})_e\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ peut se démontrer assez simplement en utilisant les domaines fondamentaux "approchés" aussi introduits par Siegel ("domaines de Siegel", voir le premier chapitre du livre de Borel "Introductions aux groupes arithmétiques").

4. Structure de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$

Nous sommes enfin en mesure de démontrer le :

Théorème 6.18. *Si I est un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}$ alors $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}[I]$ est admissible. En outre, $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}[I]$ et $\mathcal{A}[I]$ sont également admissibles.*

La dernière assertion résulte de la première, du Corollaire 6.7 et du Lemme 6.12 (noter que I contient toujours un polynôme non nul en Z). Montrons la première. Pour cela, on munit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_e\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la mesure $\overline{\lambda}$ définie dans le Lemme 6.13. C'est une mesure invariante pour les translations à droite de volume total fini. En particulier, toute fonction continue et bornée sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_e\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est de carré intégrable pour cette mesure. Le Théorème 6.9 (ii) entraîne donc :

$$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}} \subset \mathrm{L}^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})). \tag{48}$$

Lemme 6.19. *(Godement) Soit (X,μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$ et $\mu(X) < \infty$. Soit $V \subset \mathrm{L}^2(X)$ un sous-espace fermé. Si tout élément de V est essentiellement borné alors V est de dimension finie.*

Démonstration — (preuve de Hörmander) Comme $\mu(X)$ est fini on a $||f||_2 \leq \mu(X)||f||_\infty$ pour tout $f \in \mathrm{L}^2(X)$. Observons que V est complet pour $||.||_\infty$. En effet, si f_n est une suite de Cauchy pour $||.||_\infty$ avec $f_n \in V$ pour tout n, alors il existe $f : X \to \mathbb{C}$ telle que f_n converge uniformément vers f hors d'un sous-ensemble de X de mesure 0. L'inégalité $||f||_2 \leq \mu(X)||f||_\infty$ montre $f \in \mathrm{L}^2(X)$ et $||f_n - f||_2 \to 0$, donc $f \in V$ car V est fermé dans L^2 par hypothèse. Ainsi, V est un Banach pour $||.||_\infty$ et $||.||_2$, et l'identité $(V, ||.||_2) \to (V, ||.||_\infty)$ est continue (de norme $\leq \mu(X)$). Le théorème de l'application ouverte implique alors que c'est un homéomorphisme, i.e. qu'il existe $c > 0$ avec

$$||f||_\infty \leq c\,||f||_2 \quad \forall v \in V.$$

Soit $f_1, \ldots, f_n$ une base orthonormée dans le Hilbert $(V, ||.||_2)$. Nous allons montrer $n \leq c^2\mu(X)$. Pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ donné, on a

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)| \leq c\,(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2)^{1/2}$$

pour presque tout x. Soit $C \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble dense et dénombrable. Il existe donc un ensemble négligeable $Z \subset X$ tel que pour tout $x \in X - Z$, et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in C^n$, on ait l'inégalité ci-dessus. Mais du coup cette inégalité vaut pour tout $x \in X - Z$ et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. On l'applique à $x \in X - Z$ arbitraire et à $\lambda_i = \overline{f_i(x)}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leq c^2 \quad \forall x \in X - Z,$$

puis en intégrant $n \leq c^2\mu(X)$. On a donc $\dim V \leq c^2\mu(X)$. □

Compte tenu du Théorème 6.9 (ii) et du Théorème 6.14 (et donc de l'inclusion (48)), il suffit de montrer le :

Lemme 6.20. *Soit $I \subset \mathfrak{z}$ un idéal de codimension finie et $m \in \mathbb{Z}$. Alors $(\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}})_m[I]$ est fermé dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.*

L'ingrédient important pour démontrer ce lemme sera un énoncé de régularité elliptique. Sa formulation nécessite quelques remarques préliminaires. Fixons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide ; on note $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ les fonctions $\Omega \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ son sous-espace des fonctions à support compact. Soit $m \geq 0$ un entier. Un *opérateur différentiel* (linéaire, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$) d'ordre $\leq m$ sur Ω est un endomorphisme P de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de la forme

$$P(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha\, \partial^\alpha f, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega). \tag{49}$$

Dans cette formule, α parcourt les multi-indices $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| := \sum_i \alpha_i \leq m$, et les a_α sont des éléments de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ indépendants de f. Bien sûr, ∂^α désigne aussi l'opérateur usuel $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. Les coefficients a_α sont uniquement déterminés par P (appliquer P aux monômes x^β évidents). On dit que P est *elliptique* d'ordre m s'il est d'ordre $\leq m$ et si la fonction $\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$

$$(x,y)\mapsto\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)y^\alpha,$$

où y^α désigne le monôme $\prod_i y_i^{\alpha_i}$, ne s'annule pas sur $\Omega\times(\mathbb{R}^n-\{0\})$ (observer que cette fonction est un polynôme homogène de degré m en les y_i, à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$). Par exemple, l'opérateur différentiel $\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}$ est elliptique d'ordre 2 si, et seulement si, la matrice symétrique $(a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ est définie (positive ou négative) pour tout $x\in\Omega$. Observons aussi que si P est elliptique il en va de même de $Q(P)$ pour tout $Q\in\mathbb{C}[X]$.

Les opérateurs différentiels agissent par définition sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Ils agissent aussi naturellement sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des distributions sur Ω par la formule suivante, dans laquelle P est un opérateur différentiel sur Ω, $D\in\mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\langle P(D),\varphi\rangle := \langle D, P^*(\varphi)\rangle$$

où P^* désigne l'opérateur "adjoint", i.e. $P^*(f) = \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}\,\partial^\alpha(a_\alpha f)$ lorsque P est donné par (49). Si D est la distribution associée à une fonction $f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors $P(D)$ est la distribution associée à $P(f)$ (cela résulte du cas $P=\frac{\partial}{\partial x_i}$ et d'une intégration par partie). On rappelle enfin que toute (classe de) fonction $f\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ définit une distribution par la formule $\varphi\mapsto\int_\Omega f\,\varphi\,dx$.

Lemme 6.21. (Théorèmes de régularité elliptique) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, P un opérateur différentiel elliptique sur Ω, $f\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, et D la distribution associée à f. On suppose* $\mathrm{P}(D)=0$. *Alors :*

(i) (la classe de) f est dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$,

(ii) si les coefficients de P sont des fonctions analytiques réelles, alors f est analytique réelle.

Démonstration — Le (i) est le Théorème 8.3.1 du livre de Hörmander référencé (la démonstration est très courte et auto-contenue). Le (ii), plus difficile, est démontré quelques pages plus loin dans ce même livre (Théorème 8.6.1). □

Démonstration — (du Lemme 6.20) Supposons que f_n est une suite d'éléments de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}[I]_m$ qui converge dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ vers une limite f. On peut représenter (la classe de) f par une fonction borélienne $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ invariante à gauche par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_e$, de carré intégrable sur tout domaine fondamental (par exemple sur Π_0). En particulier, f est dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(G)$ (Cauchy-Schwarz).

On considère l'espace des distributions $\mathcal{D}(G)$ sur l'ouvert $G\subset\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $F\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(G)$ on note $\mathrm{D}_F\in\mathcal{D}(G)$ la distribution $\mathrm{D}_F(\varphi)=\int_G F(g)\varphi(g)\mathrm{d}g$ pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(G)$ (autrement dit, la distribution associée traditionnellement à $F|\det g|^{-n}$). Les actions de G et $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ induisent des actions naturelles correspondantes sur $\mathcal{D}(G)$: pour $D\in\mathcal{D}(G)$, $g\in G$ et $X\in\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ on définit R_gD et

$\mathrm{R}_X D$ par les formules suivantes, dans lesquelles φ est une “fonction test” arbitraire dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ (fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact)

$$\langle \mathrm{R}_g D, \varphi\rangle = \langle D, \mathrm{R}_{g^{-1}}\varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathrm{R}_X D, \varphi\rangle = \langle D, \mathrm{R}_{-X}\varphi\rangle. \tag{50}$$

On alors bien $\mathrm{R}_g D_F = D_{\mathrm{R}_g F}$ et $\mathrm{R}_X D_F = \mathrm{D}_{\mathrm{R}_X F}$ pour $F \in \mathcal{C}^\infty(G) \cap \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(G)$, par invariance à droite de $\mathrm{d}g$. L'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{D}(G)$ ainsi définie est aussi une représentation, et définit donc une structure de $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$-module sur $\mathcal{D}(G)$. On constate que l'on a $\langle uD, \varphi\rangle = \langle D, u^*\varphi\rangle$ pour tout D et tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$, où $u \mapsto u^*$ est l'unique anti-automorphisme de l'algèbre enveloppante vérifiant $X^* = -X$ pour $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ (la propriété universelle de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ montre son existence pour toute k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: c'est *l'anti-automorphisme de Chevalley*).

La convergence de f_n vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ entraîne celle de $\langle D_{f_n}, \varphi\rangle$ vers $\langle D_f, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, car tout compact de G est inclus dans une réunion finie de domaines fondamentaux pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_e$ (voir la Remarque 6.22). On en déduit $\mathrm{R}_k D_f = \epsilon(k)^m \mathrm{D}_f$, puis $H^2\,\mathrm{D}_f = -m^2\,\mathrm{D}_f$ avec $H = \mathrm{E}_{1,2} - \mathrm{E}_{2,1}$, et $ID_f = 0$ par les propriétés analogues des D_{f_n}. En particulier, l'espace vectoriel $\mathfrak{z}[H^2].\mathrm{D}_f$ est de dimension finie, de sorte que D_f est annulée par un polynôme non nul en l'élément

$$u = C + H^2 = \sum_{1\leq p,q\leq 2} \mathrm{E}_{p,q}^2.$$

On a vu expliqué dans le Lemme 5.23 que l'opérateur différentiel u sur G est elliptique dans un voisinage de $1 \in G$. Cela implique qu'il l'est au voisinage de tout point car il commute aux translations à gauche. Le théorème de régularité elliptique (Lemme 6.21 (i)) affirme alors que D_f, a priori seulement $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(G)$, est représentée par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, autrement dit on peut supposer $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$. Mais alors les relations prouvées sur D_f entraînent d'une part $\mathrm{R}_k\, f = \varepsilon(k)^m\, f$ pour tout $k \in K$, et d'autre part $I.f = 0$. Comme f est de carré intégrable sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, cela entraîne en fait que f est à croissance modérée : nous reportons à la Proposition 6.25 la vérification de cette propriété.

Il ne reste qu'à voir $f_P = 0$. À l'aide de la formule du Lemme 6.15, il suffit de voir que pour toute fonction $\psi = \psi(y,z,t)$ continue à support compact $\Omega \subset \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, on a

$$\int_{[0,1]\times\Omega} f(\mathrm{n}_x\, \mathrm{a}_y\, z\, \mathrm{s}_{e^{it}})\, \psi(y,z,t)\, \mathrm{d}m = 0.$$

Mais une telle identité vaut avec f remplacée par f_n pour tout entier n car on a $(f_n)_P = 0$. Justifions que cette annulation passe à la limite en n. L'image dans G du compact $[0,1] \times \Omega$ de M est incluse dans une réunion finie, disons $N \geq 1$, de domaines fondamentaux (Remarque 6.22). On a alors pour tout entier n

$$\int_{[0,1]\times\Omega} |f - f_n| \circ \varphi\, \mathrm{d}m \leq N \int_X |f - f_n|\, \overline{\lambda} \leq C\, N\, \overline{\lambda}(X)^{1/2} (\int_X |f - f_n|^2\, \overline{\lambda})^{1/2},$$

la seconde inégalité résultant de Cauchy-Schwarz. On conclut car ψ est bornée. □

Remarque 6.22. Nous avons utilisé à deux reprises que toute partie compacte de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est incluse dans une réunion finie de domaines fondamentaux de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_e$. Cela se déduit en effet d'un argument de compacité et du fait que pour tout $g \in G$ il existe un domaine fondamental (borélien) $X \subset G$ tel que g est dans l'intérieur de X (considérer un translaté à droite convenable de Π_0 par un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$).

Théorème 6.23. *Le* $(\mathfrak{g}, K)$*-module* $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ *est une somme directe de* $(\mathfrak{g}, K)$*-modules irréductibles, chacun d'entre eux intervenant avec une multiplicité finie.*

Nous ferons usage du fait que l'espace $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ est muni d'un produit hermitien

$$\langle f, f' \rangle = \int_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}} \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} \overline{f(g)} f'(g)\, \overline{\lambda},$$

(appelé *produit de Petersson*), d'après l'inclusion (48). On vérifie immédiatement que l'invariance de $\overline{\lambda}$ pour les translations à droite entraîne pour tout $f, f' \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ les relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \mathrm{R}_k f, \mathrm{R}_k f' \rangle = \langle f, f' \rangle, & \forall k \in K, \\ \\ \langle \mathrm{R}_X f, f' \rangle = -\langle f,\ \mathrm{R}_X f' \rangle, & \forall X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}). \end{array} \right. \tag{51}$$

(c'est la notion naturelle de produit hermitien *invariant* sur un $(\mathfrak{g}, K)$-module).

Démonstration — Fixons tout d'abord un idéal $I \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ de codimension finie et considérons le $(\mathfrak{g}, K)$-module $V = \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}[I]$. On a démontré que V est admissible (Théorème 6.18). Montrons qu'il est semi-simple, i.e. que pour tout sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module $U \subset V$ il existe un supplémentaire U' de U dans V qui est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module. Les relations (51) montrent que l'orthogonal $U^{\perp}$ de U dans V est stable par $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ et K, et il est clair que l'on a aussi $U \cap U^{\perp} = 0$, de sorte qu'il ne reste qu'à vérifier $V = U + U^{\perp}$. Ce n'est pas immédiat car V n'est pas complet pour le produit de Petersson en général. Soit $m \in \mathbb{Z}$. L'espace V_m est de dimension finie car on sait que V est admissible, de sorte qu'on a $V_m = U_m \oplus (U_m^{\perp} \cap V_m)$. Mais les relations (51) montrent que V_m et $V_{m'}$ sont orthogonaux pour $m \neq m'$, et donc $U_m^{\perp} \cap V_m = U^{\perp} \cap V_m$, puis $V_m \subset U_m + (U^{\perp})_m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, ce qui conclut.

Un argument classique du type "modules semisimples" (voir Algebra de Lang Chapitre XIII) montre alors que V est somme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles, ainsi donc que $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ (réunion de V), puis que ce dernier est somme directe de $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles. Si un facteur irréductible W apparaît une infinité de fois, et si $I = \ker \eta_W$, cela contredit l'admissibilité de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}[I]$. □

Terminons par quelques remarques. Tout d'abord, l'invariance des éléments de $\mathcal{A}^{\mathrm{unit}}$ par le sous-groupe central $\mathbb{R}^{\times}$ (noter que -1 est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$) montre que si un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible V intervient dans la décomposition de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$, on a $\eta_V(Z) = 0$ et $V_m = 0$ pour $m \equiv 1 \bmod 2$ (i.e. V est de poids pairs). Suivant la classification de Bargmann (Théorème 5.16), les cas possibles sont donc :

(i) $V \simeq \mathrm{D}_{k,0}$ avec $k \geq 2$ pair,

(ii) $V \simeq \mathrm{P}_{\eta,\epsilon}$,

(iii) $\dim V$ est finie (et impaire).

(1) D'après le Théorème 4.25 et la Proposition 5.15, la multiplicité du $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathrm{D}_{k,0}$ dans $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ est exactement $\dim \mathrm{M}_k$ (considérer les $\Phi_f(g)|\det g|^{k/2}$ avec $f \in \mathrm{M}_k$).

(2) De même, d'après la Remarque 5.17, la multiplicité du $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathrm{P}_{\eta,\epsilon}$ est exactement la dimension de l'espace de formes de Maass de type (η, ϵ) (espace qui est donc de dimension finie). On sait montrer que cet espace est non nul pour une infinité dénombrable de (η, ϵ), mais un fait remarquable est que l'on connaît aucune valeur exacte de (η, ϵ) intervenant.

(3) Le cas (iii) ne se produit pas. En effet, il n'est pas difficile de voir que l'existence d'un produit hermitien invariant sur V rajoute quelques contraintes supplémentaires dans les cas (ii) et (iii) (voir par exemple les notes de Casselman Ch. I §5). Par exemple, si V est de dimension finie, alors $\dim V = 1$, et donc V est le $(\mathfrak{g}, K)$-module associé à la représentation triviale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Mais un tel V serait engendré par une fonction non nulle $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ annulée par R_X pour tout X, et donc serait constante sur chaque composante connexe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, puis sur tout $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-invariance à gauche. Mais les fonctions constantes non nulles ne sont pas paraboliques (car elles sont égales à leur terme constant).

Remarque 6.24. Le Théorème 6.23 et le Lemme 6.12 décrivent entièrement la structure du $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$. D'après la remarque 6.10, le produit de Petersson $\langle f, f' \rangle$ est bien défini plus généralement pour $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ et $f' \in \mathcal{A}^{\mathrm{unit}}$. L'argument ci-dessus montre alors que l'orthogonal $\mathcal{E}^{\mathrm{unit}}$ de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$ dans $\mathcal{A}^{\mathrm{unit}}$ est un supplémentaire $(\mathfrak{g}, K)$-stable, puis que l'on a une décomposition naturelle

$$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}} \oplus \mathcal{E} = \mathcal{A}$$

où $\mathcal{E}$ désigne le sous-espace engendré par les fonctions $|\det g|^s (\log|\det(g)|)^n f$ avec $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{E}^{\mathrm{unit}}$. Pour étudier la structure de $\mathcal{E}$, il aurait fallu examiner les séries d'Eisenstein Φ_f avec $f = \mathrm{G}_{k,s}$ définies au chapitre 2, qui en sont des éléments naturels, ainsi que leur terme constant et leur prolongement analytique comme fonction de s. La structure de $\mathcal{E}^{\mathrm{unit}}$ est plus subtile que celle de $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{unit}}$: il n'est pas semi-simple.

5. L'intégrabilité entraîne la croissance modérée

Lors de la démonstration de Lemme 6.20, nous avons utilisé le résultat suivant :

Proposition 6.25. (Harish-Chandra) *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ une fonction K-finie à droite et $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$-finie. On suppose que f est invariante à gauche par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}}$ et de carré intégrable sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})_{\mathrm{e}} \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Alors f est une forme automorphe (i.e. f est à croissance modérée).*

Cette proposition résultera du théorème d'harmonicité de Harish-Chandra et de l'éstimée ci-dessous (due à Borel).

Lemme 6.26. *Il existe des constantes $c, N > 0$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$ on ait*

$$|\{\, \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),\ ||\gamma|| \leq t \,\}| \ \leq \ c t^N.$$

Démonstration — Posons $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et $G_t = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), ||g|| \leq t\}$ pour t réel > 0. On cherche à majorer $|\Gamma \cap G_t|$. On a $G_t = \emptyset$ pour $t < 1$, on peut donc supposer

$t \geq 1$. Soient $\mu = \mathrm{d}g$ la mesure de Haar déjà introduite sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, V un voisinage compact de 1 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ avec $VV^{-1} \cap \Gamma = \{1\}$, de sorte que la réunion des γV, portant sur les $\gamma \in \Gamma$, est disjointe, et soit enfin $m = \sup_{v \in V} ||v||$. Le sous-ensemble $\coprod_{\gamma \in \Gamma \cap G_t} \gamma V$ est de mesure $|\Gamma \cap G_t| \mu(V)$ et il est inclus dans G_{mt}. Il suffit donc de montrer qu'il existe des constantes $c, N > 0$ avec $\mu(G_t) \leq ct^N$.

Rappelons que tout élément $g \in G$ s'écrit de manière unique sous la forme $g = \mathrm{n}_x \, \mathrm{a}_y \, z \, \mathrm{s}_{e^{it}}$ avec $(x, y, z, t) \in M$ (§3). Dans ces coordonnées, on a

$$||g||^2 = ||\mathrm{p}_{x+iy} z||^2 = z^2(x^2 + y^2 + 1) + z^{-4} y^{-2}.$$

Donc l'inégalité $||g|| \leq t$ entraîne $|z|, |zx|, |zy| \leq t$ et $|z^{-2} y^{-1}| \leq t$, puis $|z^{-1}| \leq t^2$, $|x|, |y|^{\pm 1} \leq t^3$, et $t^{-2} \leq z \leq t$. La formule d'intégration du Lemme (6.15) entraîne donc l'inégalité

$$\mu(G_t) \leq 2\pi \, (\int_{|x| \leq t^3} \mathrm{d}x \,) \, (\int_{t^{-3} \leq |y| \leq t^3} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \,) \, (\int_{t^{-2} \leq z \leq t} \frac{\mathrm{d}z}{z}).$$

L'intégrale de droite vaut $2\pi \cdot 2t^3 \cdot 2(t^3 - t^{-3}) \cdot 3 \log t$, qui est bien $\leq ct^7$ pour une constante $c > 0$ adéquate. $\square$

Démonstration — Démontrons maintenant la Proposition 6.25. On pose encore $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. D'après le théorème d'harmonicité de Harish-Chandra, il existe une fonction continue et à support compact φ sur G vérifiant $f = f * \varphi$. Considérons la fonction

$$\psi : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}, \ \ (h, g) \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(h^{-1} \gamma g).$$

Soit $\Omega \subset G$ un compact hors duquel φ est nulle. À $g, h \in G$ donnés, la somme ci-dessus est nulle pour γ qui n'est pas dans $h\Omega g^{-1}$. Mais $\Gamma \cap h\Omega g^{-1}$ est fini, car discret et compact : la somme ci-dessus est finie, et ce même uniformément lorsque g et h restent dans un compact de G, de sorte que ψ est bien définie et continue. On a pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned} f(g) \ &= \ \int_G f(h)\varphi(h^{-1}g)\mathrm{d}h \ = \ \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma \Pi_0} f(h)\varphi(h^{-1}g)\mathrm{d}h \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Pi_0} f(h)\varphi(h^{-1}\gamma^{-1}g)\mathrm{d}h \ = \ \int_{\Pi_0} f(h)\psi(h, g)\mathrm{d}h. \end{aligned}$$

L'échange des sommations est justifié car d'une part f est intégrable sur Π_0, car de carré intégrable et $\mu(\Pi_0) < \infty$, et d'autre part $h \mapsto \psi(h, g)$ est continue et bornée. En effet, nous allons montrer plus précisément la majoration

(52) Il existe $c, N > 0$ avec $\psi(h, g) \leq c||g||^N$.

Elle entraînera $|f(g)| \leq c||g||^N (\mu(\Pi_0) \int_{\Pi_0} |f(h)|^2 \mu)^{1/2}$, et donc la proposition.

Notons M un majorant de $|\varphi|$ sur G. Observons que si on a $h^{-1}\gamma g \in \Omega$ et $h^{-1}\gamma' g \in \Omega$ avec $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $h, g \in G$, alors on a $g^{-1}\gamma^{-1}\gamma' g \in \Omega^{-1}\Omega$. En particulier, si ω désigne le sup des $||a||$ avec a variant dans le compact $\Omega^{-1}\Omega$ de G, on a

$$|\gamma^{-1}\gamma'| \ \leq \ ||g|| \, ||g^{-1}|| \, \omega.$$

Rappelons qu'il existe des réels $c_0, N_0 > 0$ avec $||g^{-1}|| \leq c_0||g||^{N_0}$ pour tout $g \in G$. On en déduit que pour tout $h, g \in G$ on a

$$\psi(h, g) \leq M(1 + |\{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), ||\gamma|| \leq c_0||g||^{N_0+1}\}|).$$

La relation (52) découle alors du Lemme 6.26. $\square$