CHAPITRE 5

Propriétés de finitude et $(\mathfrak{g}, K)$-modules

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés de finitude des espaces de formes automorphes $\mathrm{A}(G;\Gamma)$. Ces espaces sont munis d'actions naturelles de K et $\mathfrak{g}$ compatibles en un certain sens : c'est un exemple de $(\mathfrak{g}, K)$-module (ou *module de Harish-Chandra*). Dans une première partie, nous étudierons abstraitement ces $(\mathfrak{g}, K)$-modules et introduirons trois notions de finitude naturelles les concernant : admissibilité, engendrement fini, longueur finie. Un résultat dû à Harish-Chandra affirme l'équivalence de ces trois notions pour un $(\mathfrak{g}, K)$-module donné si ce dernier est annulé par un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Dans la seconde partie, nous démontrerons cet énoncé dans le cas $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, et nous classifierons essentiellement les $(\mathfrak{g}, K)$-modules admissibles irréductibles dans ce cas, un résultat fameux dû à Bargmann qui est un ingrédient important dans la classification du dual unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Fixons Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et I un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Un résultat central dû à Harish-Chandra est l'admissibilité du $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathrm{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R});\Gamma)[I]$ constitué des formes automorphes $f \in \mathrm{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R});\Gamma)$ annulées par I. Cet énoncé peut être vu comme une vaste généralisation du fait que les espaces M_k étudiés au chapitre 2 sont de dimension finie. Nous en donnerons une démonstration complète (et au chapitre suivant) que dans le cas $n = 2$ et $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, cas qui présentera toutefois déjà de nombreuses difficultés et idées du cas général. Un énoncé intermédiaire qui jouera un rôle important est le théorème "d'harmonicité" de Harish-Chandra, étudié ici en section 3. Il permet notamment de montrer que les formes automorphes sont à croissance uniformément modérée (et d'affaiblir substantiellement l'hypothèse (A4)).

Références :

[BK], T. Bailey, A. Knapp ed., *Representation theory and automorphic forms*, Edinburgh, AMS P.S.P.M. 61 (1996),

[B], A. Borel, *Automorphic forms on* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Cambridge Tract in Math. 130 (1997),

W. Casselman, *Analysis on* SL(2), notes de cours,

Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups* (1968),

L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential equations* (1983),

A. Knapp, *Representation Theory of semisimple Lie groups*, Princeton University Press (1986), Chapitres I, III et VIII.

1. $(\mathfrak{g}, K)$-modules et énoncés de finitude

Si G est un groupe, on rappelle qu'une représentation linéaire de G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, ou ce qui revient au même d'une structure de $\mathbb{C}[G]$-module sur V. Si $g \in G$ et $v \in V$ on note aussi $g.v$ pour $\rho(g).v$. Les représentations de G forment une catégorie de manière évidente : celle des $\mathbb{C}[G]$-modules. Une représentation (ρ, V) est dite irréductible (ou simple) si l'on a $V \neq 0$, et si les seuls sous-espaces de V stable par $\rho(G)$ sont $\{0\}$ et V, autrement dit si le $\mathbb{C}[G]$-module associé est simple.

On suppose désormais que G est un groupe topologique. On rappelle que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel *de dimension finie* est muni d'une topologie canonique (équivalence des normes). Une représentation (ρ, V) de G avec $\dim V < \infty$ est dite *continue* si ρ l'est en tant qu'application $G \to \mathrm{GL}(V)$, où $\mathrm{GL}(V)$ est vu comme un ouvert de l'espace de dimension finie $\mathrm{End}(V)$. Il est équivalent de demander que pour tout $v \in V$, l'application "orbite" $g \mapsto g.v$, $G \to V$, est continue. En effet, cette propriété est évidemment nécessaire, et pour la réciproque il suffit de l'appliquer aux vecteurs v d'une base donnée de V. On note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations continues et irréductibles de G sur des espaces de dimension finie (c'est évidemment un ensemble car on peut supposer que l'espace sous-jacent est $\mathbb{C}^n$ pour un entier $n \geq 0$).

Pour tout $\tau \in \mathrm{Irr}(G)$, et toute représentation linéaire (ρ, V) de G, on note $V_\tau \subset V$ le sous-espace engendré par les sous-représentations de V qui sont isomorphes à τ. Un argument à la Zorn montre que la représentation V_τ est isomorphe à une somme directe (éventuellement infinie) de représentations isomorphes à τ. L'égalité évidente $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_\tau, V'_\tau) = 0$ pour $\tau \neq \tau'$ entraîne que les sous-espaces V_τ avec $\tau \in \mathrm{Irr}(G)$ sont en somme directe dans V. Cette somme est toutefois strictement incluse dans V en général (donner un exemple avec $G = \mathbb{R}$ et $\dim V = 2$).

Proposition 5.1. *Soient G un groupe topologique compact et (ρ, V) une représentation de G. On a équivalence entre :*

(i) $V = \bigoplus_{\tau \in \mathrm{Irr}(G)} V_\tau$,

(ii) V est réunion de sous-représentations de dimension finie et continues,

(iii) pour tout $v \in V$, l'application $g \mapsto \rho(g).v$ prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension finie W de V, et induit une application continue $G \to W$.

Démonstration — Les conditions (ii) et (iii) sont trivialement équivalentes, et (i) implique (ii). Supposons (ii) vérifiée et montrons $V \subset \sum_{\tau \in \mathrm{Irr}(G)} V_\tau$ (la seule chose restant à monter par les rappels ci-dessus). Par le (ii), il suffit de voir que si $U \subset V$ est une sous-représentation de dimension finie et continue, on a $U \subset \sum_{\tau \in \mathrm{Irr}(G)} U_\tau$ (car on a $U_\tau \subset V_\tau$). On peut donc supposer que V est de dimension finie.

Rappelons que G étant compact, il possède une unique mesure borélienne de volume total 1 invariante par translation des deux côtés, notée $\mathrm{d}g$: c'est la mesure de Haar.[1] Cette mesure permet de munir V d'un produit hermitien (défini positif)

1. Nous n'utiliserons pas son unicité ici, et en ce qui concerne son existence, le seul exemple que nous considèrerons sérieusement ici est le cas ridiculement simple du groupe $G = \mathrm{SO}(2)$. Dans ce cas, le morphisme de groupes $\pi : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$, $x \mapsto s_{e^{2i\pi x}}$, est un revêtement surjectif de

pour lequel on a $G \subset \mathrm{U}(V)$ (groupe unitaire de V). En effet, on part d'un produit hermitien $\langle x, y\rangle$ arbitraire et on observe que la fomule

$$x.y \;=\; \int_G \langle\, g.x, g.y \,\rangle \;\mathrm{d}g$$

est bien définie et convient. Il en résulte que tout sous-espace U de V qui est G-stable admet un supplémentaire G-stable, à savoir l'orthogonal de U pour le produit hermitien ci-dessus. En particulier, V est somme directe de sous-représentations irréductibles, ce qui conclut. □

Considérons le cas du groupe compact $G = \mathrm{SO}(2)$. Il sera commode de noter $\epsilon : \mathrm{SO}(2) \to \mathbb{C}^\times$ le morphisme de groupes vérifiant $\epsilon(\mathrm{s}_\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ avec $|\lambda| = 1$, c'est un isomorphisme (topologique) sur son image qui est le cercle unité S^1. C'est un groupe commutatif, donc ses représentations irréductibles de dimension finie (continues ou non) sont de dimension 1 (noter que si ρ est de dimension finie alors $\rho(G)$ est "co-trigonalisable", donc possède une droite stable). L'ensemble $\mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(2))$ est donc en bijection avec l'ensemble des morphismes continus $\mathrm{SO}(2) \to \mathbb{C}^\times$ (ou "caractères"). C'est un exercice classique de vérifier que les caractères de S^1 sont les $\lambda \mapsto \lambda^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, on a donc

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(2)) = \{\epsilon^m, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Si V est une représentation linéaire de $\mathrm{SO}(2)$, et si $m \in \mathbb{Z}$, on notera

$$V_m := V_{\epsilon^m} = \{v \in V,\ g.v \;=\; \epsilon(g)^m\, v \ \ \forall g \in \mathrm{SO}(2)\}.$$

On a démontré le corollaire suivant (qui s'applique en particulier aux représentations linéaires de $\mathrm{O}(2)$ qui sont réunion de sous-représentations continues de dimension finie) :

Corollaire 5.2. *Si V est une représentation linéaire de* $\mathrm{SO}(2)$ *qui est réunion de sous-représentations continues de dimension finie, alors on a $V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_m$.*

La définition ci-dessous aurait un sens (et un intérêt) pour tout groupe de Lie G et tout sous-groupe fermé $K \subset G$. Nous ne l'utiliserons que dans le cas $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{O}(n)$, ce que l'on suppose désormais pour fixer les idées. On pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ et note $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ le sous-espaces des matrices $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ avec $e^{tX} \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, i.e. des matrices antisymétriques (c'est l'algèbre de Lie de K). On pose aussi $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition 5.3. *Un* $(\mathfrak{g}, K)$-module *(ou* module de Harish-Chandra*) est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni à la fois d'une structure de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$*-module et d'une représentation linéaire de K telles que :*

(HC1) en tant que représentation de K on a $V = \bigoplus_{\tau\in\mathrm{Irr}(K)} V_\tau$,

groupe $\mathbb{Z}$. Ainsi, si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lambda([0,1[) = 1$, l'invariance par translation de λ entraîne immédiatement que la mesure borélienne sur $\mathrm{SO}(2)$ définie par $\mu(X) = \lambda(\,[0,1[\cap\pi^{-1}(X)\,)$ est une mesure de Haar sur $\mathrm{SO}(2)$ (c'est ce que l'on fait en analyse de Fourier traditionnelle !). Si G est un groupe de Lie, comme $G = \mathrm{O}(n)$ ou (d'après Cartan) tout sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on dispose également d'un construction assez simple de la mesure de Haar à l'aide des formes volumes.

(HC2) pour tout $X \in \mathfrak{k}$ et tout $v \in V$, l'application $t \mapsto e^{tX}.v$ est dérivable en $t = 0$ et de dérivée $X.v$,

(HC3) pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$ et $v \in V$ on a $k \cdot (X \cdot v) = \mathrm{ad}_k(X) \cdot (k \cdot v)$.

La condition (HC2) a bien un sens car d'après (i) l'application $t \mapsto e^{tX}.v$ prend ses valeurs dans un espace de dimension finie. En fait, l'existence de la dérivée en question est automatique : c'est un exercice [2] de voir que tout morphisme de groupes continu $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $t \mapsto e^{At}$ pour un unique $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Les $(\mathfrak{g}, K)$-modules forment une catégorie de manière évidente : un morphisme est une application $\mathbb{C}$-linéaire commutant aux actions de K et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, on a des sommes directes évidentes, une notion de sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module (=un sous-espace vectoriel stable par K et $\mathfrak{g}$), etc.. C'est une catégorie abélienne, qui est même munie d'un produit tensoriel (voir l'exemple (d) ci-dessous). Un $(\mathfrak{g}, K)$-module V est dit irréductible s'il est non nul et s'il ne possède pas de sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module autre que 0 et V.

Exemple 5.4. (a) Le sous-espace $\mathcal{C}^\infty(G)_{K-\mathrm{fini}}$ des éléments K-finis de $\mathcal{C}^\infty(G)$ pour les translations à droite est un $(\mathfrak{g}, K)$-module (bien entendu, pour la représentation de $\mathfrak{g}$ donnée par les R_X et la Proposition 4.1). Pour vérifier l'axiome (HC2), on pourra observer que si $W \subset \mathcal{C}^\infty(G)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, on peut trouver un nombre fini d'éléments $g_i \in G$ tels que les formes linéaires $f \mapsto f(g_i)$ engendrent W^*.

(b) Pour tout sous-groupe discret $\Gamma \subset G$, l'espace des formes automorphes $\mathrm{A}(G; \Gamma)$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $\mathcal{C}^\infty(G)_{K-\mathrm{fini}}$ (Proposition 4.18).

(c) Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors l'espace V est muni d'une structure naturelle de $(\mathfrak{g}, K)$-module noté $\mathrm{d}V$: l'action de K est celle donnée par ρ, et l'action $\mathrm{d}\rho$ de $\mathfrak{g}$ est définie par $\mathrm{d}\rho(X)v = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} e^{tX}.v$. La Proposition 4.1 appliquée aux coefficients matriciels de ρ, i.e. aux fonctions $g \mapsto \varphi(\rho(g).v)$ avec $v \in V$ et $\varphi \in V^*$, montre que $\mathrm{d}\rho$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ et que $\mathrm{d}V$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module.

(d) Si V_1 et V_2 sont des $(\mathfrak{g}, K)$-modules, il existe une unique structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module sur $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, tout $k \in K$, et tout $v, w \in V$ on ait $k.(v \otimes w) = (k.v) \otimes (k.w)$ et $X.(v \otimes w) = (X.v) \otimes w + v \otimes (X.w)$.

Remarque 5.5. (Remarques informatives mais non utilisées dans la suite)

(i) On peut montrer la réciproque suivante de l'exemple (c) : tout $(\mathfrak{g}, K)$-module W *de dimension finie* provient d'une et une seule représentation $G \to \mathrm{GL}(W)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (plutôt que seulement du revêtement simplement connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ comme le donnerait la théorie de Lie). Un fait trivial mais utile est l'égalité $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ K$.

2. En effet, soit f un tel morphisme. On choisit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact telle que l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t) \mathrm{d}t$ est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation $f(x) I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(x+t) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t-x) f(t) \mathrm{d}t$, qui montre que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut donc dériver l'égalité $f(t+x) = f(t) f(x)$ en $t = 0$, et on obtient $f'(x) = A f(x)$ avec $A = f'(0) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, puis $f(x) = e^{Ax}$.

(ii) La construction donnée au (c) s'étend avec peu de modifications aux *représentations unitaires* $\rho : G \to \mathrm{U}(V)$ sur un espace de Hilbert V (rappelons que cela signifie que pour tout $v \in V$ l'application $g \mapsto \rho(g).v$ est continue). On prend dans ce cas pour espace sous-jacent à $\mathrm{d}V$ le sous-espace $V' \subset V$ constitué des vecteurs v qui sont K-finis et tels que $g \mapsto \rho(g).v$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (en tant que fonction sur G à valeurs dans V), et les mêmes actions de K et de $\mathfrak{g}$. Un argument basé sur de la convolution montre que V' est dense dans V (Gärding, Peter-Weyl). Harish-Chandra montre que $V \mapsto \mathrm{d}V$ est une bijection entre classe d'isomorphisme de représentations unitaires de G et classes d'isomorphisme de $(\mathfrak{g}, V)$-modules unitaires (en un sens assez évident). Nous renvoyons à l'introduction de l'article de Casselman sus-cité, à l'article de W. Baldoni dans le livre [BK] référencé pour un survol de la théorie, et aux chapitres I,III, et VI du livre de Knapp référencé pour un exposé complet. La Proposition 5.21 de ce chapitre est un énoncé clef dans ces directions.

Définition 5.6. *Un $(\mathfrak{g}, K)$-module V est dit admissible si on a $\dim V_\tau < \infty$ pour tout $\tau \in \mathrm{Irr}(K)$.*

On véifie aisément qu'un sous-module (resp. un quotient) d'un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible est encore admissible (voir l'exercice 5.2). Avant d'énoncer le premier théorème de finitude dont nous aurons besoin, nous devons faire deux observations. Soient V un $(\mathfrak{g}, K)$-module et $v \in V$.

(a) La propriété (HC3) montre que le sous-espace $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \cdot \mathbb{C}[K] \cdot v$ est stable par K (et évidemment par $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$) : c'est le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module *engendré* par v. Le plus petit sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de V contenant une famille d'éléments v_i de V est donc $\sum_i \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \cdot \mathbb{C}[K] \cdot v_i$ ("sous $(\mathfrak{g}, K)$-module engendré par les v_i").

(b) Il est équivalent de demander que v est $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-fini, et de demander qu'il existe un idéal de codimension finie $I \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ tel que $I.v =$. En effet, on a un isomorphisme $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}).v \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/I_v$ où $I_v = \{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}), zv = 0\}$ est l'idéal annulateur de v dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. En utilisant d'une part que l'action de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ commute à K et à $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, et d'autre part qu'une intersection finie d'idéaux de codimension finie est de codimension finie, on constate que si V est engendré par un nombre fini d'éléments $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-finis, alors il existe un idéal $I \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ de codimension finie tel que $IV = 0$ (i.e. I annule tout élément de V).

Théorème 5.7. (Harish-Chandra) *Soit V un $(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n))$-module annulé par un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) V est de longueur finie : il existe une suite finie de sous-$(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n))$-module $V_0 = 0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$ avec V_i/V_{i-1} irréductible pour $i = 1, \ldots, m$,

(ii) V est engendré par un nombre fini d'éléments,

(iii) V est admissible.

La seule implication évidente dans ce théorème est (i) $\Rightarrow$ (ii). De plus, le théorème tout entier est facile et laissé en exercice au lecteur dans le cas $n = 1$. Nous le démontrerons pour $n = 2$ dans la section suivante.

Le second résultat de finitude suivant, également dû à Harish-Chandra, est central en théorie des formes automorphes. Si I est un idéal de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, on pose $V[I] = \{v \in V,\, I\, v = 0\}$. C'est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de V (utiliser, encore, que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-commute avec K et $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$).

Théorème 5.8. (Harish-Chandra) *Si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, et si I est un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, alors $\mathrm{A}(G;\Gamma)[I]$ est admissible (et donc de longueur finie).*

La démonstration de ce théorème est difficile (sauf pour $n = 1$, où c'est un exercice !). Dans ce cours, on se propose de le démontrer complètement uniquement dans le cas $n = 2$ et $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Nous renvoyons au chapitre 1 du livre de Harish-Chandra référencé pour le cas général. Harish-Chandra démontre en fait *loc. cit.* un énoncé encore plus général, dans lequel on a $G = \underline{G}(\mathbb{R})$ et Γ d'indice fini dans $\underline{G}(\mathbb{Z})$, où $\underline{G}$ est un schéma en groupes affine et de type fini sur $\mathbb{Z}$ supposé réductif sur $\mathbb{C}$.

Terminons par un énoncé général et utile dont la démonstration est élémentaire.

Proposition 5.9. *Soit V un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible et irréductible. Il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\eta : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$ tel que $z.v = \eta(z)\, v$ pour tout $v \in V$ et tout $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.*

Démonstration — Soit τ avec $V_\tau \neq 0$. L'action de $\mathfrak{z}$ commute à K (axiome (HC3) et Proposition 4.8), elle préserve donc V_τ et forme une famille commutative d'endomorphismes de ce dernier. Comme V_τ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ par hypothèse, il existe un vecteur $e \in V_\tau - \{0\}$ propre pour tous les éléments de $\mathfrak{z}$ ("cotrigonalisation"). On pose $z.e = \eta(z)\, e$. Le sous-$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-module $\mathrm{U}(\mathfrak{g}).V_\tau$ est stable par K (axiome (HC3)), c'est donc V tout entier, et z y agit par multiplication par $\eta(z)$. □

Définition 5.10. *Soit V un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible et irréductible. L'homomorphisme $\eta : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$ de la proposition 5.9 est appelé caractère infinitésimal de V. On le notera η_V.*

Remarque 5.11. Observons que si V est irréductible admissible, alors $\ker \eta_V$ est un idéal de codimension finie de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ annulant V, on a même $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/(\ker \eta_V) \simeq \mathbb{C}$. On en déduit que tout $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible de longueur finie est annulé par un idéal de codimension finie dan $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. En effet, soit $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$ une suite croissante de sous-$(\mathfrak{g}, K)$-modules avec V_i/V_{i-1} irréductibles pour $i = 1, \ldots, m$. L'admissibilité de V entraîne celle des V_i/V_{i-1}. On pose $I_i = \ker \eta_{V_i/V_{i-1}}$. L'idéal $\prod_{i=1}^m I_i$ annule V ; il est de codimension finie car $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est de type fini sur $\mathbb{C}$ (fait que nous n'avons montré entièrement que pour $n \leq 2$).

2. $(\mathfrak{g}, K)$-modules pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Dans toute cette partie on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{O}(2)$. On pose aussi $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$. On se propose de démontrer dans ce cas le Théorème 5.7. Au passage nous classifierons, suivant Bargmann, les $(\mathfrak{g}, K)$-modules admissibles irréductibles pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Fixons un $(\mathfrak{g}, K)$-module V. On a la décomposition

$$V_{|\mathrm{SO}(2)} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m, \tag{32}$$

qui découle de l'axiome (HC1) et du Corollaire 5.2. On rappelle aussi la base Z, h', e', f' de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ introduite au chapitre pécédent, on les renomme ici simplement Z, h, e, f pour ne pas multiplier les "primes". Faisons quelques observations élémentaires :

(O1) $h.\, v \,=\, m\, v$ pour tout $v \in V_m$,

En effet, c'est une conséquence directe de l'axiome (HC2).

(O2) $e\, V_m \,\subset\, V_{m+2}$ et $f\, V_m \,\subset V_{m-2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

En effet, la relation $[h, e] = 2e$ montre que pour $v \in V_m$ on a $hev \,=\, (eh + [h, e])\, v \,=\, eh\, v \,+\, 2\, ev \,=\, (m+2)v$ et donc $v \in V_{m+2}$ par la formule (32) et (O1). L'argument est similaire pour $f\, V_m \subset V_{m-2}$ en utilisant $[h, f] = -2f$.

(O3) Posons $C' = C - Z^2/2 \in \mathfrak{z}$ et notons P le polynôme $P(X) = X^2/2 + X = \frac{1}{2}((X+1)^2 - 1)$. On a les égalités suivantes dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$:

$$2\, fe \,=\, C' - P(h) \;\text{ et }\; 2\, ef \,=\, C' - P(h-2). \tag{33}$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $v \in V_m$, on a

$$2\, fe\, v \,=\, (C' - P(m))\, v \;\text{ et }\; 2\, ef\, v \,=\, (C' - P(m-2))\, v. \tag{34}$$

(O4) Si s_0 désigne l'élément $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{O}(2)$, on a $\mathrm{O}(2) \,=\, \mathrm{SO}(2) \coprod s_0\, \mathrm{SO}(2)$ et $s_0 \mathrm{s}_\lambda s_0^{-1} = \mathrm{s}_{\overline{\lambda}}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, et $\mathrm{ad}(s_0)$ échange e et f. En particulier, on a $s_0(V_m) \,=\, V_{-m}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Pour $v \in V$, on pose $W(v) \,=\, \sum_{n \geq 1} \mathbb{C} e^n v + \mathbb{C} v + \sum_{n \geq 1} \mathbb{C} f^n v$. On a $\mathrm{s}_0(W(v)) \,=\, W(\mathrm{s}_0(v))$ par (O4).

Lemme 5.12. *Soient V un $(\mathfrak{g}, K)$-module engendré un élément $v_{m_0} \in V_{m_0}$, et $W = W(v_{m_0})$. Alors $\mathfrak{z}W$ est stable par $\mathrm{SO}(2)$ et $\mathfrak{g}$, et on a $V \,=\, \mathfrak{z}\, W \,+\, \mathfrak{z}\, s_0\, W$.*

Démonstration — $\mathfrak{z}W$ est évidemment stable par Z. Les identités (O1) et (O2) montrent de plus qu'il est stable par h et $\mathrm{SO}(2)$. L'identité (O3) montre que pour $v \in V_m$, on a $ef\, v \in \mathbb{C}[C'].v \subset \mathfrak{z}v$, et aussi $fe\, v \in \mathfrak{z}v$. Cela implique que pour $n \geq 1$ on a $fe^n v_{m_0} \subset \mathbb{C}[C, Z] e^{n-1} v_{m_0}$, et un énoncé similaire en échangeant e et f : on a bien $eW \subset \mathfrak{z}W$ et $fW \subset \mathfrak{z}W$. □

Corollaire 5.13. *L'implication (ii) ⇒ (iii) du Théorème 5.7 est vraie pour $n = 2$.*

Démonstration — Supposons V finiment engendré et annulé par l'idéal de codimension finie $I \subset \mathfrak{z}$. Comme une somme directe finie de $(\mathfrak{g}, K)$-modules admissible est admissible, et comme un quotient d'un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible est admissible, on peut supposer que V est engendé par un seul élément, et même que cet élément dans V_{m_0} pour un certain $m_0 \in \mathbb{Z}$, on le note v_{m_0}. Lemme montre que pour $m \in \mathbb{Z}$ on a $V_m \,\subset\, \mathfrak{z}W_m + \mathfrak{z}W_{-m}$, où $W \,=\, W(v_0)$. Mais on constate sur la définition de $W(v_0)$ que W_m est de dimension ≤ 1 pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Comme W_m est annulé par l'idéal de codimension finie $I \subset \mathfrak{z}$, on a bien $\dim \mathfrak{z} W_m < \infty$. □

Corollaire-Définition 5.14. *Si V est un $(\mathfrak{g}, K)$-module, on note $\mathrm{m}(V)$ l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{Z}$ avec $V_m \neq 0$. Si V est irréductible, ou plus généralement si V est engendré par un élément $v \in V_m$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$, alors on a $\mathrm{m}(V) \subset m+2\mathbb{Z}$.*

Démonstration — C'est une conséquence immédiate du Lemme 5.12 si l'on remarque que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\mathfrak{z}V_n \subset V_n$ et $\mathrm{s}_0(V_n) = V_{n-2n}$. □

Proposition 5.15. *Soient V un $(\mathfrak{g}, K)$-module. On suppose qu'il existe un entier $k > 0$ et un élément $v \in V_{-k}$ engendrant V et vérifiant les relations : $ev = 0$ et $Zv = sv$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$.*

Alors V est irréductible et sa classe d'isomorphisme est uniquement déterminée par s et k. De plus, on a $\dim V_m \leq 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{m}(V)$ et l'ensemble de tous les entiers $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $m \equiv k \bmod 2$ et $|m| \geq k$.

Démonstration — Les relations $hv = -kv$, $ev = 0$ et $C' = P(h) + 2fe$ entraînent $C'v = P(-k)v$. En particulier, on a $z.v = \eta(z)v$ avec η l'unique morphisme d'algèbres $\mathfrak{z} = \mathbb{C}[C', Z] \to \mathbb{C}$ tel que $\eta(Z) = s$ et $\eta(C') = P(-k)$. L'égalité $z.w = \eta(z)w$ vaut alors pour tout $w \in V$ car v engendre V. On a manifestement $W(v) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{C} f^n v$, ainsi donc que $\mathrm{s}_0 W(v) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{C} e^n \mathrm{s}_0(v)$ par (O4), et aussi $V = W(v) \oplus W(\mathrm{s}_0\, v)$ par le lemme 5.12. D'après (O3), on a pour tout $n \geq 0$,

$$2\, e f^n\, v \;=\; (\eta(C') - P(-k-2n))\, f^{n-1}\, v. \tag{35}$$

Cette formule et l'inégalité $P(a) > P(b)$ pour $a < b \leq -1$ montrent que $f^n v$ est non nul pour tout $n \geq 0$ (par récurrence sur n). L'assertion sur $\mathrm{m}(V)$ et les $\dim V_m$ s'en déduisent. On observe aussi que la classe d'isomorphisme de V est entièrement déterminée par k et s. L'assertion d'irréductibilité est évidente : tout sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module $U \subset V$ vérifie $U_m \neq 0$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$, et l'on peut même supposer $m \leq 0$ à cause de s_0 ; contient donc $f^n v$ pour un certain entier $n \geq 0$, il contient donc $e^n f^n v$ qui est un multiplie non nul de v par la formule (35). □

Cette proposition s'applique par exemple au $(\mathfrak{g}, K)$-module engendré par la fonction $\Phi_f(g)|\det(g)|^{(k+s)/2} \in \mathcal{C}^\infty(G)$ pour tout $f \in \mathrm{M}_k$ et tout $s \in \mathbb{Z}$, par le Théorème 4.25. Cela montre que pour tout k pair > 2, et tout $s \in \mathbb{C}$, il existe un $(\mathfrak{g}, K)$-module satisfaisant les hypothèses de l'énoncé ci-dessus (prendre $f = \mathrm{E}_k$). Il ne serait pas difficile de montrer qu'un tel $(\mathfrak{g}, K)$-module existe dans tous les autres cas (i.e. k impair et $k = 2$) ; on note $\mathrm{D}_{k,s}$ ce $(\mathfrak{g}, K)$-module. Noter en particulier que deux formes modulaires de même poids engendrent des $(\mathfrak{g}, K)$-modules isomorphes (à savoir $\mathrm{D}_{k,-k}$).

Théorème 5.16. (Bargmann) *Soit V un $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$-module admissible irréductible. On pose $\eta = \eta_V$ et $s = \eta(Z)$. On est dans un, et un seul, des cas suivants :*

(i) $\eta(C')$ est de la forme $P(-k)$ avec $k \geq 1$.

Dans ce cas, soit V est isomorphe à $\mathrm{D}_{k,s}$, soit on a $k \geq 2$ et V est le $(\mathfrak{g}, K)$-module associé à la représentation $(\mathrm{Sym}^{k-2}\,\mathbb{C}^2) \otimes |\det|^{(s-k)/2}\chi$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, où χ est l'un des deux caractères $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$.

(ii) $\eta(C')$ n'est pas de la forme $P(m)$ avec $m \in \mathrm{m}(V)$.

Dans ce cas on a soit $\mathrm{m}(V) = 2\mathbb{Z}$ *(cas "pair"), soit* $\mathrm{m}(V) = 2\mathbb{Z}+1$ *(cas "impair"), ainsi que* $\dim V_m \leq 1$ *pour tout* $m \in \mathbb{Z}$. *La classe d'isomorphisme de* V *est uniquement déterminée par* η_V *et par une donnée supplémentaire définie ci-dessous qui ne peut prendre que deux valeurs. Dans le cas pair, cette donnée est simplement la valeur propre de* s_0 *sur la droite* V_0 *(un signe* ± 1*).*

Démonstration — Supposons d'abord que la multiplication par e est injective dans V. La relation $\mathrm{ad}_{\mathrm{s}_0} e = f$ montre qu'il en va de même de la multiplication par f, et donc de celle par ef, qui préserve V_m pour tout m. Les Formules (33) montrent que $\eta(C')$ n'est pas de la forme $P(m)$ avec $m \in \mathrm{m}(V)$ et que les multiplications par e et f sont bijectives dans V. En particulier, on a $\mathrm{m}(V) \cap \{0,1\} \neq \emptyset$.

Si $0 \in \mathrm{m}(V)$, i.e. $V_0 \neq 0$, on peut choisir un élément $v \in V_0 - \{0\}$ vecteur propre de s_0 ; on a alors $\mathrm{s}_0(v) = \pm v$. On constate que $W(v)$ est stable par $\mathrm{O}(2)$ et $\mathfrak{g}$, donc $V = W(v)$, et on en déduit le (ii) dans le cas pair.

Si $1 \in \mathrm{m}(V)$, on choisit cette fois-ci $v \in V_1$ vecteur propre de l'endomorphisme bijectif $\mathrm{s}_0 f : V_1 \to V_1$. Le carré de cet endomorphisme est $\mathrm{s}_0 f \mathrm{s}_0 f = ef$ (car $\mathrm{ad}_{s_0}(f) = e$), et (35) montre que $2ef$ coincide avec la multiplication par $\lambda := \eta(C') - P(-1)$ sur V_1, un scalaire qui est non nul par hypothèse. On a donc $\mathrm{s}_0 f v = \mu v$ avec $2\mu^2 = \lambda$ (au plus deux possibilités pour μ, et $V = W(v)$: on conclut comme précédemment.

Faisons maintenant l'hypothèse, restante, que la multiplication par e n'est pas injective dans V. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $v \in V_m - \{0\}$ avec $ev = 0$. La formule $C' = 2fe + P(h)$ montre $C'v = P(m)v$. Si $m = -k$ avec $k \geq 1$, la Proposition 5.15 montre $V \simeq \mathrm{D}_{k,s}$ avec $s = \eta(Z)$. On peut donc supposons que l'on a $m \geq 0$.

Les relations $\eta(C') = P(m)$, $2ef^{m+1}v = (\eta(C') - P(-m-2))\, f^m v$ et $P(X) = P(-X-2)$ montrent $2\,ef^{m+1}v = 0$. La Proposition 5.15 appliquée au sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module U engendré par l'élément $f^{m+1}v$ de V_{-m-2} montre $U_k = 0$ pour $|k| \leq m$ et donc $v \notin U$. On en déduit $U = 0$ par irréductibilité de V, i.e. $f^{m+1}v = 0$. Cela montre que $W(v)$ est de dimension finie, et aussi $e\mathrm{s}_0 f^m v = \mathrm{s}_0 f^{m+1} v = 0$. Les Formules (34) montrent enfin $f^i v \neq 0$ pour $0 \leq i \leq m$. En particulier, on a montré que $u(x) := \mathrm{s}_0 f^m x$ est un automorphisme du sous-espace (non nul) de V_m constitué des vecteurs annulés par e. On peut donc choisir $v \in V_m - \{0\}$ vecteur propre de u pour une certaine valeur propre μ, i.e. vérifiant $\mathrm{s}_0 f^m v = \mu v$. Mais u^2 n'est autre que la multiplication par $e^m f^m$, i.e. par le scalaire non nul $2^{-m}\lambda = \prod_{n=1}^{m}(P(m) - P(m-2n))$, de sorte qu'il n'y a que deux choix pour μ. Au final, on a $U = W(v)$. Posons $k - 2 = m$. Alors U est manifestement irréductible de dimension $k-1$, vérifie $\nu(C') = P(m) = P(-k)$, et sa structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module ne dépend que de l'entier $k \geq 2$, du complexe $\eta(Z) \in \mathbb{C}$, et de la racine carrée μ de λ. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les représentations de l'énoncés fournissent effectivement de tels $(\mathfrak{g}, K)$-modules, le choix de χ correspondant à celui de μ. □

Il ne serait pas difficile de montrer que les $(\mathfrak{g}, K)$-modules suggérés par le (ii) du théorème ci-dessus existent vraiment (voir, par exemple, les notes de Casselman référencées). Par exemple, pour tout morphisme d'algèbre $\eta : \mathfrak{z} \to \mathbb{C}$ avec $\eta(C') \notin P(2\mathbb{Z})$, et pour tout signe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, il existe un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible admissible $\mathrm{P}_{\eta,\varepsilon}$ (unique à isomorphisme près d'après le théorème ci-dessus) ayant les propriétés suivantes : son caractère infinitésimal est η, V_0 est de dimension 1 et s_0 y agit par multiplication par ε, et $\mathrm{m}(V) = 2\mathbb{Z}$. On voit que tout $(\mathfrak{g}, K)$-module V est engendré par un vecteur $v \in V_0 - \{0\}$ tel que $\mathrm{s}_0 v = \epsilon v$, et tel que $z.v = \eta(z)v$ avec $\eta(C') \notin P(2\mathbb{Z})$, est irréductible et isomorphe à $\mathrm{P}_{\eta,\varepsilon}$.

Remarque 5.17. (Formes de Maass) Soient $\eta : \mathfrak{z} \to \mathbb{C}$ avec $\eta(C') \notin P(2\mathbb{Z})$ et $\epsilon = \pm 1$; on pose $s = \eta(Z)$. Supposons que $\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est une forme automorphe pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ invariante par $\mathrm{SO}(2)$ et engendrant un $(\mathfrak{g}, K)$-module isomorphe à $\mathrm{P}_{\eta,\varepsilon}$. La fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $\tau \mapsto \Phi(\mathrm{p}_\tau)$ a les propriétés suivantes :

(i) f est modulaire de poids $|\cdot|^s$ et vérifie $f(-\overline{\tau}) = \epsilon f(\tau)$,

(ii) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $-2(\mathrm{Im}\,\tau)^2 \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\overline{\tau}} f(\tau) = \eta(C) f(\tau)$ (Corollaire 4.24),

(iii) il existe une constante $N > 0$ telle que l'on ait $|f(\tau)| = \mathrm{O}(\mathrm{Im}\,\tau)^N$ quand $\mathrm{Im}\,\tau$ tend vers l'infini.

Une telle fonction est appelée *forme de Maass*. Un argument similaire à celui du paragraphe §5 Chap. 4 montrerait réciproquement que pour toute forme de Maass f, la fonction Φ_f engendre un $(\mathfrak{g}, K)$-module isomorphe à $\mathrm{P}_{\eta,\varepsilon}$.

Théorème 5.18. *Il n'existe qu'un nombre fini de $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$-modules admissibles irréductibles ayant un caractère infinitésimal donné (en fait, il y en a au plus 3). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) du Théorème 5.7 est vraie pour $n = 2$.*

Démonstration — Le premier point résulte par inspection du théorème précédent. Pour le second, un dévissage simple (voir l'exercice 5.3) permet de supposer que le $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible V admet un caractère infinitésimal η (et on veut montrer que V est de longueur finie). Il en va alors de même de tous ses sous-quotients. Étant donné qu'il n'y a qu'un nombre fini de $(\mathfrak{g}, K)$-modules admissibles irréductibles de caractère infinitésimal η d'après le premier point du théorème, il ne reste qu'à voir que tout $(\mathfrak{g}, K)$-module non nul U admet un sous-quotient irréductible. Soit $u \in U - \{0\}$, on considère d'une part $U' \subset U$ le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module engendré par u, et d'autre part $U'' \subset U'$ un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module maximal ne contenant pas u (existence assurée par Zorn) : le $(\mathfrak{g}, K)$-module U'/U'' est manifestement irréductible (cet argument est très similaire à celui montrant que tout module sur un anneau admet un sous-quotient simple). $\square$

3. Le théorème d'harmonicité de Harish-Chandra

Soient $n \geq 1$ est un entier, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $K = \mathrm{O}(n) \subset G$, $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Comme tout groupe topologique localement compact, le groupe G admet des mesures de Haar des deux côtés. L'existence d'une telle mesure dans le cas d'espèce est très simple. En effet, la multiplication par g, aussi bien à droite qu'à gauche, est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme (linéaire !) de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, dont le Jacobien est constant et manifestement égal à $|\det g|^n$. En effet, chacune des n colonnes C de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel G-stable (pour les translations à gauche), et on a $C \simeq \mathbb{R}^n$ en tant que représentation de G. La mesure borélienne > 0 sur G définie par la formule

$$\mathrm{d}g = \frac{\prod_{i,j} \mathrm{d}g_{i,j}}{|\det g|^n}$$

est donc invariante par multiplication à droite et à gauche par des éléments de G : c'est une mesure de Haar (à droite et à gauche), et G est *unimodulaire*. Lorsque $n = 1$, c'est la mesure invariante bien connue $\frac{\mathrm{d}x}{|x|}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^\times$.

Soient $f, f' : G \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues avec f' à support compact. On peut définir le *produit de convolution*

$$(f * f')(g) = \int_G f(gh)f'(h^{-1})\mathrm{d}h = \int_G f(h)f'(h^{-1}g)\mathrm{d}h.$$

Il suffirait même de supposer que f est intégrable sur G pour la convergence absolue de la première intégrale, et l'égalité avec la seconde résulte de l'invariance de dh par $h \mapsto gh$ pour tout $g \in G$. Pour tout $g \in G$ on a manifestement :

$$\mathrm{R}_g(f * f') = f * (\mathrm{R}_{g'} f'). \tag{36}$$

La multiplication $G \times G \to G$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on observe de manière classique que si f ou f' est dans $\mathcal{C}^\infty(G)$, alors on a $f * f' \in \mathcal{C}^\infty(G)$. De plus, pour tout $f' \in \mathcal{C}^\infty(G)$ et tout $X \in \mathfrak{g}$, on a la formule

$$\mathrm{R}_X(f * f') = f * (\mathrm{R}_X f'). \tag{37}$$

Par récurrence sur le degré, on en déduit que cette égalité vaut encore si l'on remplace R_X par un élément quelconque de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.

On notera $\mathrm{I}_c^K(G) \subset \mathrm{C}^\infty(G)$ le sous-espace des fonctions φ à support compact, et invariante par conjugaison par K, c'est-à-dire vérifiant $\varphi(kgk^{-1}) = \varphi(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $k \in K$. Le résultat suivant affirme que les fonctions K-finies et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-finie se comportent un peu comme des fonctions harmoniques.

Théorème 5.19. (Harish-Chandra) *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$. On suppose que :*

(i) f est K-finie (pour les translations à droite),

(ii) f est $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-finie.

Alors pour tout voisinage U de 1 dans G, il existe $\varphi \in \mathrm{I}_c^K(G)$ nulle en dehors de U vérifiant $f = f * \varphi$.

Avant de discuter la démonstration de ce théorème, mentionnons la conséquence importante suivante pour les formes automorphes. Elle montre d'une part qu'il suffit de supposer f à croissance modérée dans l'axiome (AF4) de la définition des formes automorphes, et d'autre part que l'exposant de croissance peut être choisi de manière uniforme tout les $u.f$ avec $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$: on dit parfois que les formes automorphes sont à croissance *uniformément modérée*. Ce second point jouera un rôle crucial pour voir que les formes automorphes "cuspidales unitaires" sont bornées.

Corollaire 5.20. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ une fonction K-finie (à droite) et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-finie. On suppose qu'il existe des réels $c, N > 0$ tels que $|f(g)| \leq c\,||g||^N$ pour tout $g \in G$. Alors pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ il existe un réel $c(u) > 0$ telle que l'on ait*

$$|(u.f)(g)| \leq c(u)\,||g||^N, \quad \forall\, g \in G.$$

En particulier, $u.f$ est à croissance modérée pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.

Démonstration — Soit $\psi : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support dans un compact $\Omega \subset G$. L'inégalité $||gh|| \leq ||g||||h||$ montre

$$|f * \psi(g)| \leq \int_{\Omega} |f(gh)\psi(h^{-1})| \mathrm{dg} \,\leq\, \mathrm{vol}(\Omega)\, M_1\, M_2\, c\, ||g||^N,$$

où on a posé $M_1 = \sup_{h\in\Omega}|\psi(h)|$ et $M_2 = \sup_{h\in\Omega}||h||$. Autrement dit, $f*\psi$ est à croissance modérée, avec le même exposant que f, et pour la constante $\mathrm{vol}(\Omega)\, M_1\, M_2\, c$. Écrivons maintenant $f = f*\varphi$ avec $\varphi \in \mathrm{I}_c^K(G)$ à support dans un voisinage compact U de 1. Pour $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ on a $u \cdot f = f * (u.\varphi)$ par la formule 37, et $u \cdot \varphi$ est bien entendu continue à support compact (par définition, elle est nulle hors d'un ouvert arbtraire contenant U). On conclut en appliquant le premier paragraphe à $\psi = u\cdot\varphi$. □

La démonstration du Théorème 5.19 est difficile. La méthode que nous suivons est inspirée de l'exposition de Borel dans le chapitre 2 de [B]. Un ingrédient important de l'argument est l'assertion (ii) ⇒ (iii) du Théorème 5.7 (que nous n'avons démontré que pour $n \leq 2$). Un autre est le suivant, dans lequel l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(G)$ est muni de sa structure naturelle d'espace de Fréchet (on n'utilise ici que la structure de G comme variété différentielle, en l'occurence un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$). On rappelle que sa topologie est métrisable et qu'une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}^\infty(G)$ converge si, et seulement si, elle converge uniformément sur tout compact de G, ainsi que ses dérivées partielles de tout ordre (par exemple, relativement aux n^2 coordonnées $m_{i,j}$).

Proposition 5.21. *Soient $W \subset \mathcal{C}^\infty(G)_{\mathrm{K-fini}}$ un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module et V l'adhérence de W dans $\mathcal{C}^\infty(G)$.*

(i) Si W est annulé par un idéal de codimension finie dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, alors V est stable par R_g pour tout $g \in G$.

(ii) Si W est admissible alors tout vecteur K-fini de V est dans W.

Démonstration — Le point (i), le plus délicat, sera démontré plus bas. Vérifions le (ii). Pour $f : G \to \mathbb{C}$ continue, $m \in \mathbb{Z}$ et $g \in G$, on pose $\mathrm{P}_m(f)(g) = \int_{\mathrm{SO}(2)} \epsilon(k)^{-m}\, f(gk)\, \mathrm{d}k$ (où $\mathrm{d}k$ est la mesure de Haar évidente sur $\mathrm{SO}(2)$). Il est clair que P_m définit un endomorphisme continu de $\mathcal{C}^\infty(G)$ qui est un projecteur d'image $\mathrm{C}^\infty(G)_m$. Par définition de V, $\mathrm{P}_m(V)$ est dans l'adhérence de $\mathrm{P}_m(W) = W_m$. Mais comme W_m est de dimension finie par hypothèse, il est fermé dans le Fréchet $\mathcal{C}^\infty(G)$, et donc $\mathrm{P}_m V \subset W_m$. □

Montrons que cette proposition implique le Théorème 5.19. On l'applique au $(\mathfrak{g}, K)$-module W engendré par la fonction f ; et on note encore V l'adhérence de W dans $\mathcal{C}^\infty(G)$. Comme l'application $G \times \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty(G)$, $(g, v) \mapsto \mathrm{R}_g v$, est manifestement continue, et comme $\mathcal{C}^\infty(G)$ est espace de Fréchet, il y a un sens à définir l'intégrale[3] $\int_G \psi(h^{-1})\mathrm{R}_h.v\, \mathrm{d}h$ pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(G)$. Cette intégrale n'est

3. On se ramène par exemple au cas de l'inégration à valeurs dans un Banach, traité par Lang dans son cours "Real and functional analysis" à $\mathcal{C}^\infty(G)$ en raisonnant dans les Banach des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un compact arbitraire Ω de G, pour un entier k arbitraire. La formation de cette intégrale commute aux applications linéaires continues sur l'image. Nous renvoyons à l'exposé de Garrett pour des références ainsi qu'un autre point de vue sur ces questions.

autre que $v * \psi$ comme on le constate en l'évaluant en tout $g \in G$, et elle est par construction dans l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les $\mathrm{R}_h.v$ avec $h \in G$. On en déduit en particulier que V est stable par $v \mapsto v*\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G)$ continue à support compact. En particulier, pour tout $\varphi \in \mathrm{I}_c^K(G)$ on a $f * \varphi \in V$.

Observons maintenant que pour tout $\varphi \in \mathrm{I}_c^K(G)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(G)_m$, alors on a $\psi * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(G)_m$. En effet, si $k \in \mathrm{SO}(2)$ cela découle des égalités suivantes

$$\int_G f(gkh)\varphi(h^{-1})dh = \int_G f(gh)\varphi(h^{-1}k)dh$$
$$= \int_G f(gh)\varphi(kh^{-1})dh = \int_G f(ghk)\varphi(h^{-1})dh,$$

la première résultant du changement de variables $h \mapsto k^{-1}h$, la seconde de la propriété de φ, et la troisième du changement de variables $h \mapsto hk$. Mais W est admissible d'après le Théorème 5.7 (ii) $\Rightarrow$ (iii). La seconde partie de la Proposition 5.21 s'applique donc et montre

$$W_m * \varphi \subset W_m \ \ \forall m \in \mathbb{Z}, \ \ \forall \varphi \in \mathrm{I}_c^K(G). \tag{38}$$

Fixons un entier $N \geq 0$ assez grand de sorte que la fonction f soit dans l'espace $W' = \oplus_{|n| \leq N} W_n$; W' est de dimension finie par admissibilité de W. L'observation ci-dessus affirme que la convolution par $\mathrm{I}_c^K(G)$ préserve W'. Considérons une suite de Dirac en l'élément $1 \in G$ constituée de fonctions φ_n dans $\mathrm{I}_c^K(G)$. Une telle suite existe bien :

Lemme 5.22. *Soit U un voisinage ouvert de 1 dans G. Il existe $\varphi \in \mathrm{I}_c^K(G)$ à valeurs ≥ 0, à support dans U, et vérifiant $\int_G \varphi(h^{-1})\mathrm{d}h = 1$.*

Démonstration — C'est un résultat classique si l'on n'impose pas à φ d'être invariante par conjugaison par K (G est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$). On se ramène à ce cas de la manière suivante. L'application $K \times G \to G$, $(k, g) \mapsto kgk^{-1}$ étant continue, en particulier aux points de la forme $(k, 1)$, la compacité de K montre que l'on peut trouver un voisinage $1 \in U' \subset U$ vérifiant $kU'k^{-1} \subset U$ pour tout $k \in K$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_\infty(G)$ une fonction ≥ 0, à support dans U', vérifiant $\psi(1) > 0$. La fonction $\varphi(g) = \int_K \psi(kgk^{-1})\mathrm{d}k$, multipliée éventuellement par une constante > 0, a toutes les conditions requises. $\square$

Pour $\varphi \in \mathrm{I}_c^K(G)$ notons enfin $u(\varphi) \in \mathrm{End}(W')$ l'endomorphisme $w \mapsto w * \varphi$. Les φ_n formant une suite de Dirac, on constate que pour tout $w \in W'$ et tout $g \in G$, la suite des $u(\varphi_n)(w)(g)$ converge vers $w(g)$. L'espace W' étant de dimension finie, on en déduit que $u(\varphi_n)$ converge vers l'identité dans $\mathrm{End}(W')$. Le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(W')$ constitué des $u(\varphi)$ est trivialement fermé (dimension finie), contient donc $\mathrm{id}_{W'}$ dans son adhérence : il contient donc $\mathrm{id}_{W'}$. Cela terminer la démonstration du théorème, admettant le (i) de la Proposition 5.21. $\square$

Démonstration — (Démonstration de la Proposition 5.21) D'après le théorème de Hahn-Banach (valable dans tout Fréchet), il suffit de montrer que si Λ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ qui est nulle sur V (i.e. sur W), alors elle est nulle sur $\mathrm{R}_g V$ pour tout $g \in G$. Par continuité des endomorphismes R_g de $\mathcal{C}^\infty(G)$, il suffit de voir que Λ est nulle sur $\mathrm{R}_g W$. Soit $w \in W$. Pour des raisons générales (voir l'exercice 5.5), la fonction $\varphi_w : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \Lambda(\mathrm{R}_g w)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'on a

$$\mathrm{R}_g \, \varphi_w \; = \; \varphi_{\mathrm{R}_g w} \;\text{ et }\; \mathrm{R}_X \, \varphi_w \; = \; \varphi_{\mathrm{R}_X \, w}$$

pour tous $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ (ces assertions valent pour tout $w \in \mathcal{C}^\infty(G)$ et toute forme linéaire continue Λ sur $\mathcal{C}^\infty(G)$). On en déduit que la fonction φ_w est K-finie car w l'est, et aussi que l'on a

$$(u.\varphi_w)(1) = \varphi_{u.w}(1) = \Lambda(u.w) = 0,$$

pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$). On en déduit (par exemple en contemplant la formule (22)) que toutes les dérivées partielles (d'ordre quelconque) en $g = 1$ de la fonction φ_w sont nulles. Mais d'après le lemme 5.23 suivant, φ_w est analytique réelle : elle est donc nulle sur la composante connexe de 1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, i.e. sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$. Mais cela vaut pour tout $w \in W$, donc $\mathrm{R}_k(\varphi_w) = \varphi_{\mathrm{R}_k w}$ est également nulle sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, i.e. φ_w est nulle sur $\mathrm{O}(n)\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ = G$. □

Il ne reste qu'à démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.23. (Analyticité des fonctions K-finies et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-finies)*Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ supposée K-finie (à droite) et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-finie. Alors f est une fonction analytique réelle.*

Démonstration — On suppose $n = 2$ (mais la démonstration donnée s'adapterait aisément au cas où n est quelconque). Comme les hypothèses sont encore satisfaites par $\mathrm{L}_g f$ pour tout $g \in G$, il suffit de voir que f est analytique (=donnée par une série entière normalement convergente) dans un voisinage de 1. On peut supposer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(G)_m$. Si l'on pose $X = \mathrm{E}_{2,1} - \mathrm{E}_{1,2}$, cela entraîne $\mathrm{R}_X f \; = \; i\, m\, f$, et donc $X^2.f = -m^2 f$. Contemplons l'opérateur

$$D := C + X^2 = \mathrm{E}_{1,1}^2 + \mathrm{E}_{2,2}^2 + \mathrm{E}_{2,1}^2 + \mathrm{E}_{1,2}^2 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}).$$

En tant qu'opérateur différentiel sur $\mathrm{C}^\infty(G)$, il est de la forme

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 4} a_{i,j} \, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + D'$$

où les $x_i : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ sont les coordonnées affines centrées en 1 déjà utilisées dans la démonstration de la Proposition 4.2, où $a_{i,j}$ est un polynôme en les x_k vérifiant $a_{i,j}(1) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker), où $D' \in \mathbb{C}[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}]$ est un opérateur différentiel de degré ≤ 1. La matrice des $(a_{i,j}(x))$ est donc symmétrique définie positive pour x dans un voisinage assez petit de 1 : D est un *opérateur différentiel elliptique* dans un voisinage de $1 \in G$. Ses coefficients, dans les coordonnées x_i, sont polynomiaux, et donc en particulier analytiques réels. Le *théorème de régularité elliptique* (qui sera rappelé plus tard dans le cours : voir le lemme 6.21 (ii) et les rappels qui le précèdent) montre alors que toute équation de la forme $P(D).u = 0$ avec $P \in \mathbb{C}[T]$ non nul entraîne que u est analytique dans un voisinage de 1. Mais comme l'ensemble des $P(D).f$ est contenu dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}).f$ qui est de dimension finie, il existe un polynôme non nul vérifiant $P(D).f = 0$. □

4. Exercices

Exercice 5.1. *Pour* $n \in \mathbb{Z}$ *on pose* $\mathrm{I}_n = \mathrm{Ind}_{\mathrm{SO}(2)}^{\mathrm{O}(2)} \epsilon^n$ *(une représentation linéaire continue de dimension* 2 *de* $\mathrm{O}(2)$*). On note* $\det : \mathrm{O}(2) \to \mathbb{C}^\times$ *le morphisme déterminant.*

(i) *Montrer que l'on a* $\mathrm{I}_n \simeq \mathrm{I}_{-n}$, $\mathrm{I}_0 \simeq 1 \oplus \det$, *et que* I_n *est irréductible pour* $n \neq 0$.

(ii) *Montrer toute représentation irréductible, continue, de dimension finie de* $\mathrm{O}(2)$ *est isomophe à* 1, det, *où à* I_n *pour un unique entier* $n \geq 1$.

Exercice 5.2. *Soit* G *un groupe topologique compact et* V *une représentation de* G *réunion de sous-représentations continues de dimension finie. Soit* $U \subset V$ *une sous-représentation de* V.

(i) *Monter que* U *et* V/U *sont réunion de sous-représentations continues de dimension finie de* G.

(ii) *Montrer qu'il existe une sous-représentation* $W \subset V$ *telle que* $V = U \oplus W$. *En déduire qu'il existe un isomorphisme de représentations* $V \simeq U \oplus V/U$.

Exercice 5.3. *Soient* V *un* $(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n))$*-module,* $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$, *et* $I \subset \mathfrak{z}$ *un idéal de co-dimension finie. On suppose que l'on a* $IV = 0$.

(i) *En raisonnant dans la* $\mathbb{C}$*-algèbre (artinienne) de dimension finie* $\mathfrak{z}/I$ *montrer qu'il existe une suite d'idéaux maximaux* $m_1, m_2, \ldots, m_r \subset \mathfrak{z}$ *avec* $m_1 m_2 \ldots m_r \subset I$ *et* $\mathfrak{z}/m_i \simeq \mathbb{C}$ *pour tout* i.

(ii) *On pose* $V_0 = 0$ *et* $V_i = m_i V_{i-1}$ *pour* $i = 1, \ldots, r$. *Montrer que l'on a* $V_r = 0$ *et que* V_{i-1}/V_i *admet un caractère infinitésimal pour tout* $i = 1, \ldots r$.

(iii) *Montrer que si les* V_i/V_{i-1} *pour* $i = 1, \ldots, r$ *sont de longueur finie, il en va de même de* V.

(iv) *En utilisant l'exercice 5.2, montrer que si les* V_i/V_{i-1} *pour* $i = 1, \ldots, r$ *sont admissibles, il en va de même de* V.

(v) *Montrer que si* V *est engendré comme* $(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n))$*-module par un nombre fini d'éléments, il en va de même des* V_i/V_{i-1} *pour* $i = 1, \ldots, r$ *(on pourra observer que* $m_i/(m_i \cap I)$ *est de dimension finie sur* $\mathbb{C}$*).*

Exercice 5.4. *Donner un exemple de* $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$*-module* V *non admissible et engendré par un élément* $v \in V_0$.

Exercice 5.5. *Soit* $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *C'est un ouvert de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, *de sorte que* $\mathcal{C}^\infty(G)$ *est un espace de Fréchet de manière naturelle.*

(i) *Montrer que l'application* $G \times \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty(G)$ *est continue.*

(ii) *Soient* $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ *et* Λ *une forme linéaire continue sur* $\mathcal{C}^\infty(G)$. *Montrer que la fonction* $\varphi_f : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \Lambda(\mathrm{R}_g f)$ *est dans* $\mathcal{C}^\infty(G)$, *et que l'on a*

$$\mathrm{R}_g\,\varphi_f \;=\; \varphi_{\mathrm{R}_g f} \ \text{ et } \ \mathrm{R}_X\,\varphi_f \;=\; \varphi_{\mathrm{R}_X f}$$

pour tous $g \in G$ *et* $X \in \mathfrak{g}$.