CHAPITRE 4

Formes automorphes pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de forme automorphe, au sens donné par Harish-Chandra (voir la référence ci-dessous). Dans un cadre très général, on fixe un groupe de Lie réel G qui est linéaire et réductif, ce que l'on peut traduire en disant que G se plonge comme sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ stable par $g \mapsto {}^t g$, ainsi qu'un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ d'origine arithmétique. La problématique à laquelle s'intéresse Harish-Chandra, tout comme d'autres mathématiciens de l'époque comme Selberg, Gelfand, Piatetski-Shapiro et Langlands, est de décrire "à la Fourier" l'espace des fonctions de carré intégrable $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash G)$ (pour la mesure de Haar), en tant que représentation du groupe G pour les translations à droite. Les formes automorphes sont les fonctions spéciales qui interviennent dans la description finale du résultat. C'est en étudiant l'exemple important des séries d'Eisenstein que Langlands a découvert les conjectures très générales qui portent sont nom entre formes automorphes et fonctions L.

La définition précise d'une forme automorphe est relative à un choix (inessentiel) d'un sous-groupe compact maximal K de G. Une forme automorphe de G pour le sous-groupe Γ est alors une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $f(\gamma g) = f(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $g \in G$ (invariance à gauche sous Γ),

(2) les translatés à droite de f par tous les éléments de K engendrent un sous-espace de dimension finie (symétrie "maximale" vis-à-vis de l'action de K),

(3) les fonctions $z.f$, où z parcourt les opérateurs différentiels bi-invariants sur G, forment un sous-espace de dimension finie (système d'équations différentielles),

(4) f et toutes ses dérivées par rapport à $\mathrm{Lie}\, G$ sont à croissance modérée (condition de croissance).

Pour éviter trop de rappels en théorie de Lie, théorie qui ne sera pas supposée ici, nous nous restreindrons au cas (essentiel) du groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La première partie du chapitre aura alors pour but principal de déchiffrer la condition (3) dans ce contexte. Dans la seconde partie du chapitre, nous montrerons que les formes modulaires étudiées aux chapitres 2 et 3 ne sont rien d'autre que des formes automorphes particulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pour le sous-groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Références : D. Bump, *Automorphic forms and representations* (1996),

W. Casselman, *Analysis on* SL(2), notes de cours.

Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups* (1968),

J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes* (1974),

J.-L. Waldspurger, *Formes automorphes pour* GL_n, notes d'un cours de M2.

1. Le groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère le groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. C'est un groupe topologique, et même un groupe de Lie, de manière naturelle. En effet, c'est une variété différentiable en tant qu'ouvert de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (défini par $\det \neq 0$), et la multiplication $(g,h) \to gh$ et l'inversion $g \to g^{-1}$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$: elles sont même polynomiales en les coefficients $g_{i,j}$ de g, et en la fonction $g \mapsto \det(g)^{-1}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G s'identifie de manière naturelle à l'espace des matrices $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, muni de son crochet de Lie usuel $[X,Y] = XY - YX$. En particulier, l'exponentielle de matrices $X \mapsto e^X = \sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!}, \mathfrak{g} \to G$, est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert assez petit de $0 \in \mathfrak{g}$ sur un voisinage ouvert de 1 dans G (une réciproque étant donnée par le logarithme matriciel, sur un voisinage assez petit de 1).

On note $\mathcal{C}^\infty(G)$ l'espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{C}$ qui sont de classes $\mathcal{C}^\infty$. Si $g \in G$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, la fonction $h \mapsto f(hg)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(G)$, on la note $\mathrm{R}_g f$. L'application $(g,f) \mapsto \mathrm{R}_g f$ définit une représentation linéaire de G sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ ("translations à droite"). On définit de même une autre représentation de G sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ par $(g,f) \mapsto \mathrm{L}_g f$ ("translations à gauche") où $\mathrm{L}_g f$ désigne la fonction $h \mapsto f(g^{-1}h))$. Ces opérations commutent manifestement : on $\mathrm{R}_g \circ \mathrm{L}_h = \mathrm{L}_h \circ \mathrm{R}_g$ pour tous $g,h \in G$.

Par différenciation, on en déduit des actions de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ de la manière suivante. Il nous suffira dans la suite de considérer l'action par translations à droite (l'autre cas étant de toutes façons similaire). Soient $X \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ et $g \in G$. La fonction d'une variable réelle $t \mapsto f(ge^{tX})$ est $\mathcal{C}^\infty$ (comme composée !) et on pose

$$(\mathrm{R}_X f)(g) = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} f(ge^{tX}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ge^{tX}) - f(g)}{t}.$$

La fonction $G \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (g,t) \mapsto f(ge^{tX})$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $\mathrm{R}_X f \in \mathcal{C}^\infty(G)$. Pour $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la formule $ge^{tX} = g + tgX + O(t^2)$ quand $t \to 0$ montre que l'on a en fait

$$\mathrm{R}_X f(g) = \mathrm{d}f_g(gX), \tag{22}$$

où $\mathrm{d}f_g : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ désigne la différentielle de f au point g.

Proposition 4.1. *L'application $\mathfrak{g} \times \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty(G)$, $(X,f) \mapsto \mathrm{R}_X f$ définit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{C}^\infty(G)$: c'est une application bilinéaire, et l'on a pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ la relation $\mathrm{R}_X \circ \mathrm{R}_Y - \mathrm{R}_Y \circ \mathrm{R}_X = \mathrm{R}_{[X,Y]}$. De plus, pour tout $g \in G$ et tout $X \in \mathfrak{g}$ on a les identités*

$$\mathrm{L}_g \circ \mathrm{R}_X = \mathrm{R}_X \circ \mathrm{L}_g \text{ et } \mathrm{R}_g \circ \mathrm{R}_X \circ \mathrm{R}_g^{-1} = \mathrm{R}_{gXg^{-1}}.$$

Démonstration — La $\mathbb{R}$-bilinéarité de $(X,f) \mapsto \mathrm{R}_X f$ est claire sur la formule (22). Vérifions l'égalité $\mathrm{R}_X\mathrm{R}_Y - \mathrm{R}_Y\mathrm{R}_X = \mathrm{R}_{[X,Y]}$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$. Fixons pour cela $g \in G$ ainsi que $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Regardons l'application $\varphi_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (u,v) \mapsto f(ge^{uX}e^{vY})$. Elle est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par définition $(\mathrm{R}_X\mathrm{R}_Y f)(g)$ est la dérivée en $u = 0$ de la fonction $u \mapsto (\mathrm{R}_Y f)(ge^{uX}) = \frac{\partial \varphi_{X,Y}}{\partial v}(u, 0)$. On a donc

$$(\mathrm{R}_X \mathrm{R}_Y f)(g) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \varphi_{X,Y}(0,0). \tag{23}$$

Écrivons maintenant le développement de Taylor de f au point $g \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$f(g+H) = f(g) + \mathrm{d}f_g(H) + \mathrm{Q}f_g(H) + \mathrm{o}(||H||^2)$$

pour $H \to 0$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, où $\mathrm{Q}f_g : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est la $\mathbb{R}$-forme quadratique Hessienne au point g. Posons $P_{X,Y}(u,v) = uv\,XY + \frac{u^2}{2}X^2 + \frac{v^2}{2}Y^2$, c'est un polynôme homogène de degré 2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$; il vérifie la relation $e^{uX}e^{vY} = 1 + uX + vY + \mathrm{q}_{X,Y}(u,v) + o(||(u,v)||^2)$ pour $(u,v) \to (0,0)$. On peut donc écrire :

$$\varphi_{X,Y}(u,v) = f(g) + \mathrm{d}f_g(u\,gX + v\,gY + g\,\mathrm{P}_{X,Y}(u,v)) + \mathrm{Q}f_g(u\,gX + v\,gY) + \mathrm{o}(||(u,v)||^2).$$

L'identité $P_{X,Y}(u,v) - P_{Y,X}(u,v) = uv[X,Y]$ entraîne au final

$$\varphi_{X,Y}(u,v) - \varphi_{Y,X}(u,v) = uv\,(\mathrm{R}_{[X,Y]}f)(g) + \mathrm{o}\,(||(u,v)||^2),$$

ce qui conclut l'égalité $\mathrm{R}_X\mathrm{R}_Y - \mathrm{R}_Y\mathrm{R}_X = \mathrm{R}_{[X,Y]}$ par la Formule (23). Les deux identités de la dernière assertion découlent trivialement de la définition. □

Notons que l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ ainsi définie est très concrète. Pour $1 \leq p, q \leq n$, notons $\mathrm{E}_{p,q} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire d'indice (p,q) : on a $\mathrm{E}_{p,q} = (m_{i,j})$ avec $m_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (p,q)$ et $m_{p,q} = 1$. La relation $e^{tE_{p,q}} = 1 + tE_{p,q} + o(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et une application directe de la définition, montrent que dans les coordonnées $(m_{i,j})$ évidentes sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a pour $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$

$$\mathrm{R}_{E_{p,q}} f = \sum_{i=1}^{n} m_{i,p} \frac{\partial f}{\partial m_{i,q}}. \tag{24}$$

L'endomorphisme $f \mapsto \mathrm{R}_{E_{p,q}}f$, ainsi donc que tous les R_X qui ne sont que des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{R}$ de ceux-ci, est un opérateur différentiel de degré 1 à coefficients polynomiaux en les $(m_{i,j})$, qui a la propriété remarquable d'être invariant par translations à gauche comme on l'a vu.

Proposition 4.2. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Soient $X_1, \ldots, X_r$ les $r := n^2$ éléments de $\mathfrak{g}$ de la forme $\mathrm{E}_{p,q}$, ordonnés de manière arbitraire. Alors les éléments $\mathrm{R}_{X_\alpha} := \mathrm{R}_{X_1}^{\alpha_1} \circ \mathrm{R}_{X_2}^{\alpha_2} \circ \cdots \circ \mathrm{R}_{X_r}^{\alpha_r}$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$, sont des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéairement indépendants de $\mathcal{C}^\infty(G)$.*

Démonstration — Pour tout $i = 1, \ldots, r$, il existe un unique (p,q) tel que $X_i = \mathrm{E}_{p,q}$, et l'on note x_i la fonction $G \to \mathbb{C}$ définie par $x_i(g) = g_{p,q} - \delta_{p,q}$. Autrement dit, les x_i ne sont autres que les fonctions coordonnées naturelles sur G (coefficients matriciels) translatées de sorte que l'on ait $x_i(1) = 0$ pour tout i. La formule (24) montre que l'on a une expression de la forme

$$\mathrm{R}_{X_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + D_i$$

où D_i est une somme finie d'opérateurs de la forme $x_k \frac{\partial}{\partial x_l}$. Introduisons le sous-anneau $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r] \subset \mathcal{C}^\infty(G)$ (fonctions polynomiales en les coefficients matriciels), ainsi que son idéal $I = (x_1, \ldots, x_r)$ des fonctions dans A qui s'annulent en $1 \in G$. L'anneau A est manifestement préservé par R_{X_i} pour tout i. Mieux, on a

$$D_i(I^k) \subset I^k \ \mathit{et} \ \frac{\partial}{\partial x_i} I^k \subset I^{k-1}$$

pour tout $i = 1, \ldots, r$ et pour tout $k \geq 0$ (en posant $I^0 = I^{-1} = A$). On en déduit que pour des indices arbitraires $1 \leq i_1, \ldots, i_h \leq d$, et pour $f \in I^k$ avec $k \geq h$, on a

$$\mathrm{R}_{X_{i_1}} \circ \mathrm{R}_{X_{i_2}} \circ \cdots \circ \mathrm{R}_{X_{i_h}} f - \frac{\partial^h}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_h}} f \ \in \ I^{k-h+1}. \tag{25}$$

Supposons enfin que l'on ait une relation de dépendance linéaire finie de la forme

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \mathrm{R}_{X_\alpha} = 0$$

dans les endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(G)$. Soit $h \geq 0$ l'entier maximal tel qu'il existe un multi-indice α avec $\lambda_\alpha = 0$ et $h = \sum_i \alpha_i$. Soit β un multi-indice arbitraire tel que $\sum_i \beta_i \leq h$. On applique la formule (25) à R_{X_β}, $k = h$ et $f = \prod_i x_i^{\alpha_i}$. On en déduit $\mathrm{R}_{X_\beta} f \in I$ pour $\beta \neq \alpha$, et $\mathrm{R}_{X_\alpha} f - \prod_i (\alpha_i!) \in I$. On en tire que la constante $\lambda_\alpha \prod_{i=1}^r (\alpha_i!)$ est dans I, puis $\lambda_\alpha \prod_{i=1}^r (\alpha_i!) = 0$ (évaluation en 1) : une contradiction. $\square$

Ce résultat a des conséquences intéressantes sur la structure de la sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(G))$ engendrée par les R_X avec $X \in \mathfrak{g}$.

2. Algèbres enveloppantes

Dans cette partie, k désignera un corps de caractéristique 0. On rappelle qu'une k-algèbre de Lie sur est la donnée d'un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application k-bilinéaire $(x, y) \to [x, y], \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (appelée *crochet de Lie*) vérifiant $[x, x] = 0$ et $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (*identités de Jacobi*). On dispose d'une notion évidente de sous-algèbre de Lie (=sous-espace vectoriel stable par le crochet), de somme directe d'algèbres de Lie (somme directe des espaces munie de la somme des crochets), de morphisme $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ entre k-algèbres de Lie (=application k-linéaire f vérifiant $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$) etc...

Pour toute k-algèbre associative A, $[x, y] := xy - yx$ munit le k-espace vectoriel A d'une structure de k-algèbre de Lie ; qui sera notée $\underline{A}$. En particulier, V est un k-espace vectoriel, on dispose de la k-algèbre de Lie $\underline{\mathrm{End}_k(V)}$, souvent notée $\mathfrak{gl}(V)$, et même $\mathfrak{gl}_n(k)$ si $V = k^n$. Bien entendu, $\mathfrak{gl}_n(k)$ n'est autre que le k-espace vectoriel $\mathrm{M}_n(k)$ des matrices carrées de taille n, munie répétons-le du crochet $(x, y) \mapsto xy - yx$.

Une *représentation* de la k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Par définition, il est équivalent de se donner un tel morphisme et une application k-bilinéaire $(x, v) \mapsto xv$ vérifiant $x(yv) - y(xv) = [x, y]v$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ et tout $v \in V$. Il est utile de remarquer que les identités de Jacobi sont équivalentes à demander que le crochet $(x, y) \mapsto [x, y]$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ sur elle-même ; c'est la *représentation adjointe*.

Définition 4.3. *Si $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie, son* algèbre enveloppante *est le quotient de la k-algèbre tensorielle (associative, mais non commutative en général)*

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes n}$$

son idéal bilatère engendré par tous les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ avec $x, y \in \mathfrak{g}$ (vus comme éléments de degré 1 dans l'algèbre tensorielle). C'est une k-algèbre associative notée $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, munie d'un morphisme canonique $\mathfrak{g} \to \underline{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}$.

En composant les propriétés universelles de l'algèbre tensorielle et celle d'un quotient, on obtient la propriété universelle suivante pour $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$:

Scholie 4.4. *Si A est une k-algèbre associative, tout morphisme $\mathfrak{g} \to \underline{A}$ s'étend de manière unique en un morphisme de k-algèbres $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to A$, et l'application ainsi définie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \underline{A}) \to \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg}}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}), A)$ est bijective.*

En particulier, se donner une représentation de $\mathfrak{g}$ sur le k-espace vectoriel V est la même chose que se donner une structure de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-module sur V (c'est le cas particulier $A = \mathrm{End}_k V$), de sorte que l'on retombe dans un monde familier.

Si an a $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathfrak{g}$, on note en général $x_1 x_2 \ldots x_p$ leur produit dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, plûtot que $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p$. On prendra garde, dans le cas $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}_n(k) = \underline{\mathrm{M}_n(k)}$, que ce produit n'est pas le produit des matrices $x_1, \cdots, x_p$. Par la propriété universelle ci-dessus appliquée à l'identité de $\underline{\mathrm{M}_n(k)}$, on dispose bien d'une surjection canonique $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(k)) \to \mathrm{M}_n(k)$, mais on verra ci-après que $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est de dimension infinie sur k en général.

Si $n \geq 0$ est un entier, on note $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$ le sous-espace vectoriel engendré par les produits $x_1 x_2 \ldots x_p$ avec $p \leq n$ et $x_i \in \mathfrak{g}$ pour tout i. On convient $\mathrm{U}_{-1}(\mathfrak{g}) = 0$. Les propriétés suivantes sont immédiates :

(a) $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est la réunion croissante des $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$ pour $n \geq 0$,

(b) $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})\mathrm{U}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{U}_{n+m}(\mathfrak{g})$ pour tout $n, m \geq 0$,

(c) $\mathrm{U}_1(\mathfrak{g})^n$ engendre k-linéairement $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$ pour $n \geq 0$,

(d) pour tout $u \in \mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$ et $v \in \mathrm{U}_m(\mathfrak{g})$, on a $uv - vu \in \mathrm{U}_{n+m-1}(\mathfrak{g})$.

Cette dernière se démontre par récurrence immédiate à partir de la relation $xy - yx = [x, y] \in \mathrm{U}_1$ pour $x, y \in \mathfrak{g}$. Considérons l'espace vectoriel gradué associé $\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{U}_n(\mathfrak{g})/\mathrm{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$. Les observations ci-dessus montrent que la multiplication dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ induit une structure de k-algèbre commutative sur $\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. L'application naturelle $\mathfrak{g} \to \mathrm{U}_1(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ induit donc par construction un homomorphisme de k-algèbres

$$\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}). \tag{26}$$

qui est surjectif par (c).

Théorème 4.5. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) On suppose $k = \mathbb{C}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Alors :*

(a) l'homomorphisme (26) est un isomorphisme,

(b) *si* $X_1, \ldots, X_r$ *une* $\mathbb{C}$*-base de* $\mathfrak{g}$ *alors les* $X_\alpha := X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_r^{\alpha_r}$*, avec* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$*, forment une* $\mathbb{C}$*-base de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$*,*

(c) *le morphisme naturel* $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})))$*, défini par la structure de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$*-module sur* $\mathcal{C}^\infty(G)$ *donnée par la Proposition 4.2, est injectif.*

Démonstration — Soit $X_1, \ldots, X_r$ une base de $\mathfrak{g}$ provenant d'une $\mathbb{R}$-base de $\mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$ comme dans l'énoncé de la proposition 4.2. Les X_α associés engendrent manifestement $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Mais cette proposition montre qu'ils sont linéairement indépendants, car c'est le cas de leur image dans $\mathrm{End}\,(\mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})))$. On a montré (c) ainsi que (b) pour la base spécifique ci-dessus.

Il est clair que si $X_1, \ldots, X_r$ est une k-base quelconque de $\mathfrak{g}$, la propriété (d) précédent l'énoncé du théorème montre que les monômes X_α de l'énoncé avec $\sum_i \alpha_i \leq n$ forment une famille génératrice de $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$. Ainsi, l'assertion (b) est vraie pour une base $X_1, \ldots, X_r$ si, et seulement si, les images dans $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})/\mathrm{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$ des X_α avec $\sum_i \alpha_i = n$ forment une base de ce dernier espace. Comme ces images l'engendrent, if faut et il suffit que la dimension de $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})/\mathrm{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$ soit le nombre de α avec $\sum_i \alpha_i = n$. Comme cela ne dépend pas du choix de la base, et qu'on l'a montré pour les $\mathrm{E}_{p,q}$, on a montré (b). L'application k-linéaire sous-jacente à (26) est la somme directe des surjections $\mathrm{Sym}^n \mathfrak{g} \to \mathrm{U}_n(\mathfrak{g})/\mathrm{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$. Mais on vient de voir que la source et l'arrivée d'une telle application ont même dimension. □

Notons que si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, on dispose d'un morphisme de k-algèbres évident $\mathrm{U}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ (autrement dit, la construction $\mathrm{U}(-)$ est un foncteur des algèbres de Lie vers les algèbres associatives). La proposition ci-dessous se déduit immédiatement du point (b) de l'énoncé ci-dessus.

Corollaire 4.6. *Soit* $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$*. Alors :*

(i) *l'application canonique* $\mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est injective,*

(iii) *si* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*, l'application naturelle* $\mathrm{U}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est injective,*

(iv) *supposons que l'on a une décomposition en sous-espaces vectoriels* $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^s \mathfrak{g}_i$ *où chaque* $\mathfrak{g}_i$ *est stable par crochets (i.e. est une sous-algèbre de Lie). Alors l'application naturelle* $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}_2) \otimes \cdots \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}_s) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels.*

Il ne serait pas difficile à ce stade d'étendre le corollaire ci-dessus à toute k-algèbre de Lie de dimension finie sur k qui se plonge dans $\mathrm{gl}_n(k)$ (exercice !), et donc à toute k-algèbre de Lie de dimension finie sur k par le théorème d'Ado.

Exemple : l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$

Le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est bien sûr de dimension 1 et engendré par la matrice identité, que nous noterons $Z \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. On a une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}Z \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$$

où $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est la sous-algèbre de Lie constituée des matrices de trace nulle. En particulier, Z est dans le centre de $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$, et le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt entraîne alors que l'on a un isomorphisme d'algèbres $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}[Z] \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$. On a bien sûr $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[Z]$, de sorte que le premier cas intéressant est $n = 2$. On pose traditionnellement

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces éléments e, f et h forment une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et on a les relations évidentes

$$[h, e] = 2e, \ \ [h, f] = -2f \ \text{ et } \ [e, f] = h,$$

qui déterminent entièrement la structure de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Par définition de $\mathrm{U}(-)$ on en déduit la présentation suivante (de $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire non nécessairement commutative)

$$\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}\{e, f, h\}/\langle he - eh = 2e, hf - fh = -2f, ef - fe = h\rangle.$$

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, les monômes de la forme $f^a h^b e^c$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, forment une base de $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

3. Le centre de $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$

Définition 4.7. *Si $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie, on note $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. C'est une k-algèbre commutative.*

On s'intéresse dans cette partie au cas $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit naturellement sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison. Cette action est linéaire et définit une représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ appelée *représentation adjointe* et notée $(g, X) \mapsto \mathrm{ad}_g(X) = gXg^{-1}$. La relation $g[X, Y]g^{-1} = [gXg^{-1}, gYg^{-1}]$ montre que ad_g est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Par fonctorialité de $\mathrm{U}(-)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit donc par automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Cette représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ préserve le sous-espace de dimension finie $\mathrm{U}_m(\mathfrak{g})$ pour tout $m \geq 0$.

Proposition 4.8. *L'ensemble des invariants $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ coincide avec $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$.*

Démonstration — Soient $u \in \mathrm{U}_m(\mathfrak{g})$ et $X \in \mathfrak{g}$. Vérifions que l'élément $uX - Xu$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est la dérivée en $t = 0$ de la fonction $\mathbb{C} \to \mathrm{U}_m(\mathfrak{g}), t \mapsto \mathrm{ad}_{e^{tX}} u$ (et en particulier que cette dérivée existe, au sens complexe). En effet, c'est immédiat si l'on a $u \in \mathfrak{g}$ étant donnée la relation $e^{tX} u e^{-tX} = u + t(Xu - uX) + O(t^2)$. En général, on peut supposer $u = u_1 \cdots u_m$ avec les $u_i \in \mathfrak{g}$ par multilinéarité, et dans ce cas on constate que la dérivée en question vaut ("dérivée d'un produit") $\sum_{i=1}^m u_1 \cdots u_{i-1}(Xu_i - u_iX)u_{i+1} \cdots u_m$, qui se simplifie bien en $Xu - uX$ (somme télescopique).

On en déduit d'abord que si u est fixe par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors on a $Xu = uX$ pour tout $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, ce qui est équivalent à dire que u est dans le centre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Réciproquement, si u est dans le centre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ alors la formule ci-dessus montre que la fonction analytique $\varphi(t) := \mathrm{ad}_{e^{tX}}.u$ est donc constante : sa dérivée en $t = 0$ est nulle et on a $\varphi'(t) = e^{tX}.\varphi'(0)$. On a donc $\mathrm{ad}_{e^X} u = u$ pour tout $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On conclut car $X \mapsto e^X, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective. $\square$

Nous avons déjà vu que l'élément identité $Z \in \mathfrak{g}$ est dans le centre de l'algèbre $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Donnons un exemple plus intéressant : l'élément de Casimir. Considérons la trace $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $(X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(XY)$. C'est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Si l'on fait agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ trivialement sur $\mathbb{C}$, et par la représentation adjointe sur chaque facteur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on constate que la trace est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-équivariante : $\mathrm{Tr}(gXg^{-1} \cdot gYg^{-1}) = \mathrm{Tr}(XY)$. Autrement dit, elle induit un isomorphisme entre la représentation adjointe et sa duale,

$$\mathrm{tr} : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*, \ X \mapsto (Y \mapsto \mathrm{Tr}(XY)).$$

On a donc des isomorphismes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-équivariants :

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{tr}} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \overset{\text{can}}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}),$$

le dernier étant l'isomorphisme naturel général $V \otimes_k V^* \simeq \mathrm{End}_k(V)$ existant pour tout k-espace vectoriel de dimension finie. Notons que dans cet isomorphisme, l'identité de V correspond à $\sum_i x_i \otimes x_i^*$, où (x_i) est une base quelconque de V et (x_i^*) est la base duale. L'élément identité de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ étant manifestement $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-invariant, il correspond via les isomorphismes ci-dessus à un élément $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-invariant $C' \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Compte tenu de la Proposition 4.8, nous avons donc démontré le corollaire suivant.

Corollaire-Définition 4.9. *L'image dans* $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ *de l'élément* $C' \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ *défini ci-dessus est un élément de* $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ *appelé* élément de Casimir *(quadratique). Il est noté C. Si (X_i) est une base de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, et si (Y_i) désigne la base duale de (X_i) pour la forme trace, alors on a la formule $C = \sum_i X_i Y_i$.*

En guise d'exemple, considérons la base Z, e, f, h de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Sa base duale relativement à la trace est respectivement $\frac{Z}{2}$, $f, e, \frac{h}{2}$. On a donc

$$C = \frac{1}{2}(Z^2 + h^2) + ef + fe. \tag{27}$$

Plus généralement, considérons la base des $\mathrm{E}_{p,q}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Sa base duale relativement à la trace est manifestement celle des $(\mathrm{E}_{q,p})_{p,q}$, de sorte que l'on a

$$C = \sum_{p,q} \mathrm{E}_{p,q} \mathrm{E}_{q,p}. \tag{28}$$

Théorème 4.10. *Le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[X, Y] \to \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ envoyant X sur Z et Y sur C est un isomorphisme.*

La fin de cette partie est consacrée à la démonstration de ce théorème. L'entier $n \geq 1$ sera pour l'instant quelconque. On commence par étudier une version graduée de $\mathfrak{z}$: on pose $\mathfrak{z}_m = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{U}_m(\mathfrak{g})$. On dispose encore d'une algèbre graduée associée

$$\mathrm{gr}\, \mathfrak{z} \ = \ \oplus_{m \geq 0}\, \mathfrak{z}_m / \mathfrak{z}_{m-1}.$$

Par définition, c'est une sous-algèbre de $\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ constituée d'éléments $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-invariants. L'isomorphisme $\mathrm{Sym}\, \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt commute manifestement aux actions naturelles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des deux côtés. On s'intéresse donc aux $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-invariants de l'anneau $\mathrm{Sym}\, \mathfrak{g}$.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{Pol}(V)$ l'algèbre des fonctions polynomiales en les formes linéaires sur V. Elle s'identifie naturellement à l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}\, V^*$ (de manière comptible aux actions naturelles de $\mathrm{GL}(V)$). La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{Sym}\, \mathfrak{g}$ s'identifie donc naturellement à $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$, et même à

$\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Pol}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ si l'on utilise l'isomorphisme $\mathrm{tr} : \mathfrak{g} \overset{\sim}{\rightarrow} \mathfrak{g}^*$ plus haut (qui est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-équivariant rappelons-le).

Nous allons utiliser le lemme classique suivant, qui vaut pour tout entier $n \geq 1$. On note $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{C}^n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices diagonales, et on considère l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Pol}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$, et l'action naturelle du groupe symétrique S_n sur $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ par permutation des coordonnées.

Lemme 4.11. *La restriction naturelle* $\mathrm{Pol}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathrm{Pol}(\mathfrak{h})$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{Pol}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \overset{\sim}{\rightarrow} \mathrm{Pol}(\mathfrak{h})^{\mathrm{S}_n}$.

Démonstration — L'application est injective car les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est surjective car les coefficients du polynôme caractéristique sont des éléments de $\mathrm{Pol}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ qui s'envoient sur les fonctions symétriques élémentaires, dont il est bien connu qu'elles engendrent $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h})^{\mathrm{S}_n}$ (sans relation polynomiale). □

Autrement dit, $\mathrm{Pol}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ est exactement l'algèbre des polynômes en les coefficients (d'indice $< n$) du polynôme caractéristique, et ces derniers ne satisfont pas de relation polynomiale non triviale. Nous avons défini ci-dessus un homomorphisme naturel injectif

$$\gamma : \mathrm{gr}\, \mathfrak{z} \longrightarrow \mathrm{Pol}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

obtenu en composant l'inclusion $\mathrm{gr}\, \mathfrak{z} \subset \mathrm{gr}\, \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ et les isomorphismes $\mathrm{gr}\, \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ (PBW) et $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*) \overset{\sim}{\rightarrow} \mathrm{Pol}(\mathfrak{g})$ (via tr).

Lemme 4.12. *Soient* $\overline{Z}$ *et* $\overline{\mathrm{C}}$ *les images respectives de* Z *et* C *dans* $\mathfrak{z}_1/\mathfrak{z}_0$ *et* $\mathfrak{z}_2/\mathfrak{z}_1$. *Alors pour tout* $X \in \mathfrak{g}$ *on a* $\gamma(\overline{Z})(X) = \mathrm{Tr}(X)$ *et* $\gamma(\overline{\mathrm{C}})(X) = \mathrm{Tr}(X^2)$.

Démonstration — L'application m-linéaire symétrique $\mathfrak{g}^m \rightarrow \mathrm{Pol}(\mathfrak{g})$ induite par composition de l'application naturelle $\mathfrak{g}^m \rightarrow \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ avec l'isomorphisme tr est $(X_1, \ldots, X_m) \mapsto (M \mapsto \mathrm{Tr}(X_1 M) \ldots \mathrm{Tr}(X_m M))$. On en déduit $\gamma(\overline{Z})(X) = \mathrm{Tr}(X)$ pour $m = 1$. Pour $m = 2$, la Formule (28) montre donc :

$$\gamma(\overline{\mathrm{C}})(X) = \sum_{1 \leq p,q \leq n} \mathrm{Tr}(X\mathrm{E}_{p,q})\,\mathrm{Tr}(X\mathrm{E}_{q,p}) = \mathrm{Tr}(X^2).$$

□

Supposons enfin $n = 2$. Le Lemme 4.12 montre que γ est surjectif, car l'anneau des invariants $\mathrm{Pol}(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}))^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})}$ est engendré par $\mathrm{tr}(X)$ et $\mathrm{tr}(X^2)$ d'après le Lemme 4.11. Comme γ est injectif, c'est un isomorphisme, et $\mathrm{gr}\, \mathfrak{z}$ est l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[\overline{Z}, \overline{C}]$. Les éléments $\overline{Z}$ et $\overline{C}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ car c'est le cas de $\mathrm{tr}(X)$ et $\mathrm{tr}(X^2)$ dans $\mathrm{Pol}(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}))^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})}$. On en déduit facilement $\mathfrak{z} = \mathbb{C}[Z, C]$, puis le théorème. □

Remarque 4.13. En exhibant d'autres éléments convenables dans $\mathfrak{z}$ on pourrait démontrer que γ est surjectif (et donc un isomorphisme) pour tout entier $n \geq 1$, puis que $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ est isomorphe à une $\mathbb{C}$-algèbre de polynômes sur n variables (Harish-Chandra).

4. Formes automorphes pour un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Soient $n \geq 1$ et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4.1. Le groupe K. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$ et on note $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ la norme euclidienne associée. On note $\mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal de cet espace euclidien. C'est le sous-groupe des éléments $g \in G$ tels que ${}^{\mathrm{t}}g\, g = \mathrm{I}_n$. C'est un sous-groupe compact de G, car il est fermé et borné dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et pour cette raison on le notera aussi K. Son algèbre de Lie $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace des matrices $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $e^{tX} \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: c'est la sous-algèbre de Lie des matrices anti-symétriques.

La proposition suivante résume quelques unes des propriétés essentielles de K. On note $S \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques définies positives et $A \subset S$ le sous-ensemble des matrices diagonales $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. L'ensemble S est stable par inversion, par conjugaison par K, et A stable par produits.

Proposition 4.14. *(i) (Décomposition polaire) Tout élément de G s'écrit de manière unique sous la forme $g = sk$ avec $s \in S$ et $k \in K$,*

(ii) (Décomposition de Cartan) $G = \coprod_{a \in A} KaK$,

(iii) K est un sous-groupe compact maximal de G (pour l'inclusion),

(iv) Tout sous-groupe compact de G est conjugué dans G à un sous-groupe de K.

Démonstration — Un point clé, bien connu, est que tout élément s de S est diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral), i.e. $s = kak^{-1}$ avec $a \in A$ et $k \in K$. En particulier, s est le carré de $s' = k\sqrt{a}k^{-1} \in$ S avec $\sqrt{a} \in A$ l'unique élément vérifiant $\sqrt{a}^2 = a$. On en tire le (i) : si g est dans G on écrit ${}^{t}g\,g$ (qui est dans S) sous la forme $s^2 = {}^{t}s\,s$ avec $s \in S$, puis $gs^{-1} \in K$. De plus, (i) et le théorème spectral impliquent $G = \bigcup_{a \in A} KaK$. Pour le caractère *disjoint* de cette dernière réunion, on constate que si $g = kak'$ avec $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in A$ et $k, k' \in K$, alors on a $a_1 = \mathrm{Sup}_{|x|=1} |g(x)|$. L'unicité des a_i avec $i > 1$ résulte, par récurrence, d'un argument similaire effectué dans l'espace euclidien $\Lambda^i \mathbb{R}^n$, et conclut le (vi). Si $a \in A$ est tel que $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ est borné dans G, alors on constate que l'on a $a = 1$, de sorte que (iii) se déduit de $G = \bigcup_{a \in A} KaK$. Il ne reste qu'à vérifier (iv). Soit $H \subset G$ un sous-groupe compact. Si $\mathrm{d}h$ désigne une mesure de Haar (à droite !) sur H, on constate que

$$\langle x, y \rangle = \int_H hx \cdot hy \, \mathrm{d}h$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ qui est invariant par H. Si $g \in G$ désigne un élément envoyant une base orthonormée arbitraire pour $\langle x, y \rangle$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\langle x, y \rangle = gx \cdot gy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, puis $gHg^{-1} \subset K$. □

La théorie des représentations continues et unitaires des groupes compacts sur des espaces de Hilbert est un chapitre classique des mathématiques, avec des contributions fameuses et importantes de Hermann Weyl. Une telle représentation est la donnée d'un espace de Hilbert V et d'un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{U}(V)$ tel que pour tout $v \in V$ l'application orbite $G \to V, g \mapsto \rho(g)v$, est continue. Un résultat central de cette théorie est qu'une telle représentation est toujours somme orthogonale Hilbertienne de sous-représentations irréductibles et de dimension finie. Dans le cas particulier, mais crucial, où V est l'espace des fonctions de carré intégrable sur K pour une mesure de Haar, et où $K = \mathrm{O}(n)$, c'est une conséquence relativement simple du théorème de Stone-Weierstrass : les polynômes en les coefficients matriciels forment une sous-algèbre dense (et ce même pour la norme sup.). C'est l'esprit de la définition suivante (pour laquelle nous pouvons oublier ce que l'on vient de dire).

Définition 4.15. (Vecteurs K-finis) *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une représentation linéaire du groupe K. Un vecteur $v \in V$ est K-fini si le sous-espace vectoriel de V engendré de par les $k \cdot v$ avec $k \in K$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des vecteurs K-finis de V est un sous-espace vectoriel stable par K.*

De même, si V est un module sur une $\mathbb{C}$-algèbre A, un vecteur $v \in V$ est A-fini si le sous-espace vectoriel de V constitué des éléments de la forme $a \cdot v$ avec $a \in A$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des vecteurs A-finis de V est un sous-A-module de V.

Cette définition s'applique en particulier à la restriction à K de l'action de G par translations à droite sur $\mathcal{C}^\infty(G)$, via $(g, f) \mapsto \mathrm{R}_g f$. Autrement dit, la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ est K-finie (à droite, si l'on veut rappeler que l'on s'intéresse aux translations à droite) si le sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^\infty(G)$ engendré par tous les translatés $\mathrm{R}_k f$, avec k parcourant K, est de dimension finie. De même, on a vu que la dérivation des translations à droite par G permet de munir $\mathrm{C}^\infty(G)$ d'une structure de $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$-module de manière naturelle, et donc à fortiori de $\mathfrak{z}$-module. Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ est donc $\mathfrak{z}$-finie (pour cette action) si le sous-espace vectoriel $\mathfrak{z}.f \subset \mathrm{C}^\infty(G)$ est de dimension finie.

4.2. Définition des formes automorphes. Nous sommes désormais en mesure de donner la définition d'une forme automorphe. On fixe un sous-groupe discret Γ de G. Les exemples importants pour la suite sont $\Gamma = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, ou Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (voire un sous-groupe de congruence).

Définition 4.16. *Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ est une forme automorphe pour Γ si elle vérifie les conditions suivantes :*

(AF1) $f(\gamma g) = f(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $g \in G$,

(AF2) f est K-finie à droite,

(AF3) f est $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$-finie,

(AF4) Pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$, la fonction $u.f$ est à croissance modérée.

Les formes automorphes pour Γ forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(G)$ noté $\mathrm{A}(G\,;\Gamma)$.

Pour que cette définition ait un sens, il ne reste qu'à expliquer ce qu'est une fonction à croissance modérée sur G. Pour cela, on commence par plonger $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de la manière diagonale évidente $\iota(g) = (g, \det(g)^{-1})$. On voit $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ comme espace euclidien pour le produit scalaire $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$, et l'on considère $||\cdot|| : \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la norme euclidienne associée :

$$||M||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^{\mathrm{t}}M\,M) = \sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2.$$

Pour $g \in G$ on note simplement $||g||$ l'élément $||\iota(g)||$. Signalons quelques propriétés élémentaires[1] vérifiées par la fonction $||.||$:

(i) $||gh|| \leq ||g||\,||h||$ pour tout $g, h \in G$,

(ii) $||g|| \geq 1$ pour tout $g \in G$,

(iii) $||gk|| = ||kg|| = ||g||$ pour tout $g \in G$ et $k \in K$,

(iv) il existe des réels $c, N > 0$ tels que $||g^{-1}|| \leq c\,||g||^N$ pour tout $g \in G$.

Définition 4.17. *Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est dite à* croissance modérée *s'il existe des réels $c, N > 0$ tels que $|f(g)| \leq c\,||g||^N$ pour tout $g \in G$.*

La propriété (ii) montre que les fonctions à croissance modérée forment un sous-espace vectoriel.

Proposition 4.18. *L'espace $\mathrm{A}(G\,;\Gamma)$ est stable par les actions de K et de $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$.*

Démonstration — Soient $f \in \mathrm{A}(G\,;\Gamma)$, $k \in K$ et $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Il faut voir que $\mathrm{R}_k\, f$ et $\mathrm{R}_X\, f$ sont dans $\mathrm{A}(G, \Gamma)$.

– La propriété (AF1) découle dans les deux cas du fait que L_γ et R_k (resp. R_X) commutent.

– Soit $W \subset \mathcal{C}^\infty(G)$ l'espace (de dimension finie) engendré par les $\mathrm{R}_{k'}\, f$ avec $k' \in K$. Il est évidemment K-stable, et il contient $\mathrm{R}_k f$, donc f satisfait (AF2). On a pour tout $k' \in K$ la relation $\mathrm{R}_{k'}\,\mathrm{R}_X\, f = \mathrm{R}_{k'Xk'^{-1}}\,\mathrm{R}_k\, f \subset \sum_{Y\in\mathfrak{g}} \mathrm{R}_Y\, W$ (de dimension finie car W et $\mathfrak{g}$ le sont), donc $\mathrm{R}_X f$ satisfait (AF2).

– L'action de $\mathfrak{z}$ commute évidemment avec R_X, et aussi avec R_k par la Proposition 4.8 et la formule $\mathrm{R}_k\, z = \mathrm{ad}_k(z)\,\mathrm{R}_k$, de sorte que $\mathrm{R}_X\, f$ et $\mathrm{R}_k\, f$ satisfont (AF3).

– Enfin, il est évident que $\mathrm{R}_X f$ satisfait (AF4). Concernant $\mathrm{R}_k\, f$, on choisit d'abord des constantes c et N telles que $|f(g)| \leq C||g||^N$, et on conclut par l'inégalité $|\mathrm{R}_k(f)(g)| = |f(gk)| \leq C||gk||^N = C||g||^N$. □

L'espace $\mathrm{A}(G\,;\Gamma)$ n'est en revanche pas stable par les R_g avec $g \in G$ en général. Sa propriété importante, du point de vue de la théorie des représentations, est que c'est un $(\mathfrak{g}, K)$-module au sens de Harish-Chandra (notion qui sera vue au prochain chapitre).

---

1. Pour le (ii), on pourra observer, pour tout $M \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, que l'on a l'inégalité $||M||^2 \geq (n+1)|\det M|^{2/(n+1)}$. En effet, on peut supposer M symétrique définie positive, puis appliquer l'inégalité arithmético-géométrique. Pour le (iv), utiliser que M^{-1} est la transposée de la comatrice de g pour $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$, et observer que pour tout polynome $P \in \mathbb{C}[X_{i,j}]$, il existe des constantes $c, N > 0$ telles que $|P(M_{i,j})| \leq c||M||^N$ (car c'est vrai pour $P = X_{i,j}$).

5. Les formes modulaires sont des formes automorphes

On considère ici le cas $n = 2$ et $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. On note $P \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ le sous-groupe constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (donc, avec $y > 0$), $Z \simeq \mathbb{R}_{>0}$ le sous-groupe central des homothéties de facteur > 0, et on pose

$$K^+ = K \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \mathrm{SO}(2)$$

(matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$). Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, écrit sous la forme $\lambda = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{s}_\lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in ZK^+.$$

(C'est la similitude de rapport $\overline{\lambda}$ si l'on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ au moyen de la base $(i, 1)$.) Tout élément de K^+Z est de la forme s_λ pour un unique λ.

Proposition 4.19. *(i) Le stabilisateur du point $i \in \mathbb{H}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ est K^+Z.*

(ii) L'application $g \mapsto \mathrm{j}(g, i)$ induit un isomorphisme de groupes $K^+Z \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$. On a $\mathrm{j}(\mathrm{s}_\lambda, i) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

(iii) On a $\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot i = x + iy$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$. De plus, tout élément de g s'écrit de manière unique sous la forme $p\,\mathrm{s}_\lambda$ avec $p \in P$ et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Démonstration — L'équation $\frac{ai+b}{ci+d} = i$ étant équivalente à $b = -c$ et $a = d$, le stabilisateur de i est K^+Z, d'où le (i). Ce stabilisateur est aussi le sous-groupe des $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ préservant la droite $\mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}^2$, l'élément $\mathrm{j}(g, i)$ étant alors la valeur propre associée. Cela montre que $g \mapsto \mathrm{j}(g, i)$ est un morphisme de groupes. L'identité $\mathrm{j}(\mathrm{s}_\lambda, i) = \lambda$ est claire. Le (iii) est évident. □

On a vu au chapitre 2 que l'ensemble $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}$-bases $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}$ est muni d'une action simplement transitive de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Choisissons pour base de référence la base directe $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^+$ de $\mathbb{C}$. L'application $g \mapsto g\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ induit des bijections $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^+$.

Fixons un caractère χ de $\mathbb{C}^\times$, i.e. un morphisme de groupes $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, et une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ qui est modulaire de poids χ. On rappelle que f est de la forme $F(\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix})$ pour une, et une seule, fonction $F : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ vérifiant $F(\gamma\lambda\omega) = \chi(\lambda)F(w)$ pour tout $\omega \in \mathcal{B}^+$, tout $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, et tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. On associe à χ et f et la fonction

$$\Phi_f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C},\ \ g \mapsto F(g\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}). \tag{29}$$

Il résulte de cette définition et du §2.2 que pour tout g dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ on a la formule $\Phi_f(g) = \chi(\mathrm{j}(g, i))f(g.i)$.

Proposition 4.20. *Soit χ un caractère de $\mathbb{C}^\times$. L'application $f \mapsto \Phi_f$ induit une bijection $\mathbb{C}$-linéaire entre l'espace des fonctions $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ qui sont modulaires de poids χ et l'espace des fonctions $\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :*

(i) $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ *pour tout* $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *et tout* $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

(ii) $\Phi(g s_\lambda) = \chi(\lambda)\Phi(g)$ *pour tout* $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

De plus, on a $\Phi_f(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = f(x+iy)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Démonstration — C'est une traduction de la Proposition 2.5 (compte tenu de la bijection $g \mapsto g\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$) et de la Proposition 4.19 (ii). □

Si $\tau \in \mathbb{H}$ on note $\mathrm{p}_\tau \in P$ l'élément $\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifiant $\tau = x + iy$. Observons que la bijection $\mathbb{H} \times \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, $(\tau, \lambda) \mapsto \mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. En effet, elle est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$, et son inverse est donnée par la formule

$$g \mapsto (\, g.i,\, \mathrm{j}(s(g), i)), \text{ avec } s(g) \;=\; \mathrm{p}_{g.i}^{-1}\, g,$$

qui est manifestement de classe $\mathcal{C}_\infty$ également.

Lemme 4.21. *Soit* χ *un caractère de* $\mathbb{C}^\times$ *et* $\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *vérifiant les assertions (i) et (ii) de la proposition 4.20. La fonction* Φ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *si, et seulement si :*

(i) la fonction $\lambda \mapsto \chi(\lambda), \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$,

(ii) et la fonction $\tau \mapsto \Phi(\mathrm{p}_\tau)$, $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$,

sont de classes $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration — La relation $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ pour un $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) - \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ montre que Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, c'est le cas de sa restriction à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$. On conclut immédiatement par la relation (ii) vérifiée par χ et par l'observation précédent le lemme. □

Lemme 4.22. *Un caractère* χ *de* $\mathbb{C}^\times$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *si, et seulement si, il est de la forme* $\lambda \mapsto \lambda^m |\lambda|^s$ *avec* $m \in \mathbb{Z}$ *et* $s \in \mathbb{C}$.

Démonstration — Exercice ! □

On s'intéresse maintenant à l'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ sur les Φ_f. On pourrait utiliser la base Z, e, f, h mais ce ne serait pas très judicieux car elle n'est pas adaptée à la propriété (ii) de Φ_f vis à vis du sous-groupe K^+. On considère plutôt la base Z, e', f', h' avec

$$ih' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; e' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \text{ et } f' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} = \overline{e'}.$$

On vérifierait aisément que les relations $[h', e'] = 2e'$, $[h', f'] = -2f'$ et $[e', f'] = h'$ valent encore. L'origine de cette nouvelle base[2] de $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ est la suivante. Tout

2. Une manière alternative, bien que similaire, de penser à la base e', f', h' est de raisonner dans la base $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$, dans laquelle K agit diagonalement. Autrement dit, on conjugue

d'abord la matrice anti-symétrique $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = ih'$ est un générateur de l'algèbre de Lie de K : on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ la formule

$$\exp(tih') = \mathrm{s}_{e^{it}}. \tag{30}$$

L'action par conjugaison de K sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ préserve $\mathbb{R}(ih')$, $\mathbb{R}Z$, et aussi le plan des matices symétriques de trace nulle, i.e des $\begin{bmatrix} u & v \\ v & -u \end{bmatrix}$ avec u, v dans $\mathbb{R}$. L'action sur ce plan se diagonalise après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, les éléments e' et f' étant choisis comme étant une base de vecteurs propres (et ensuite normalisés correctement). On a précisément

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{s}_\lambda} e' = (\lambda/|\lambda|)^2\, e' \ \text{ et } \mathrm{ad}_{\mathrm{s}_\lambda} f' = (\lambda/|\lambda|)^{-2}\, f'. \tag{31}$$

Proposition 4.23. *Soit χ le caractère $\lambda \mapsto \lambda^m|\lambda|^s$, $m \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{C}$. Soit $\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $\Phi(g\,\mathrm{s}_\lambda) = \chi(\lambda)\Phi(g)$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ la fonction $\tau \mapsto \Phi(\mathrm{p}_\tau)$ (de classe $\mathcal{C}^\infty$ aussi). On a les formules suivantes :*

(i) $\mathrm{R}_Z\Phi = (m+s)\,\Phi$,

(ii) $\mathrm{R}_{h'}\Phi = m\,\Phi$,

(iii) $(\mathrm{R}_{e'}\Phi)(\,\mathrm{p}_\tau\,\mathrm{s}_\lambda\,) = \lambda^{m+2}\,|\lambda|^{s-2}\,\Big((\overline{\tau}-\tau)\,\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}} f(\tau) - \frac{s}{2}\,f(\tau)\Big)$,

(iv) $(\mathrm{R}_{f'}\Phi)(\,\mathrm{p}_\tau\,\mathrm{s}_\lambda\,) = \lambda^{m-2}\,|\lambda|^{s+2}\,\Big((\tau-\overline{\tau})\,\frac{\partial}{\partial\tau} f(\tau) - (m+\frac{s}{2})\,f(\tau)\Big)$.

Démonstration — Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $e^{tZ} = s_{e^t}$, puis $\Phi(ge^{tZ}) = e^{(m+s)t}\Phi(g)$, dont l'assertion (i) découle en dérivant en $t = 0$. De même, la formule (30) montre $\Phi(ge^{ith'}) = e^{imt}\Phi(g)$, puis $\mathrm{R}_{ih'}\,\Phi = i\,m\,\Phi$, et donc (par $\mathbb{C}$-linéarité) $\mathrm{R}'_h\Phi = m\Phi$. Le (iii) est plus subtile. On commence par observer que l'on a $(\mathrm{R}_{e'}\Phi)(\,\mathrm{p}_\tau\,\mathrm{s}_\lambda\,) = (\mathrm{R}_{s_\lambda}\mathrm{R}_{e'}\Phi)(p_\tau)$. La formule générale $\mathrm{R}_{s_\lambda}\,\mathrm{R}_{e'} = \mathrm{R}_{\mathrm{ad}_{s_\lambda}e'}\mathrm{R}_{s_\lambda}$, l'identité $\mathrm{ad}_{s_\lambda}e' = (\lambda/|\lambda|)^2 e'$, et la relation évidente $\mathrm{R}_{s_\lambda}\Phi = \lambda^m|\lambda|^s\Phi$, entraînent donc l'égalité

$$(\mathrm{R}_{e'}\Phi)(\,\mathrm{p}_\tau\,\mathrm{s}_\lambda\,) = \lambda^{m+2}|\lambda|^{s-2}(\mathrm{R}_{e'}\Phi)(p_\tau).$$

Pour calculer $\mathrm{R}_{e'}\Phi(\mathrm{p}_\tau)$ sans effort il paraît naturel de décomposer d'abord e comme somme d'un élément de l'algèbre de Lie de P et d'un élément de l'algèbre de Lie de K^+Z. Concrètement on a

$$e' = \frac{1}{2}(h' - Z) + \mathrm{E}_{1,1} - i\,\mathrm{E}_{1,2}.$$

Les assertions (i) et (ii) déjà montrées entraînent déjà

$$\mathrm{R}_{(h'-Z)/2}\,\Phi = \frac{s}{2}, \Phi,$$

de sorte que nous n'avons plus qu'à déterminer $(\mathrm{R}_{|rmE_{1,i}}\Phi)(\mathrm{p}_\tau)$ pour $i = 1, 2$. On pose $\tau = x + iy$, on a pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(\mathrm{p}_\tau \exp(t\mathrm{E}_{1,1})) = \Phi(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \Phi(\begin{pmatrix} e^t y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = f(x + ie^t y),$$

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par C^{-1} avec $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ (c'est la "transformation de Cayley"). L'application $M \mapsto C^{-1}MC$ avec $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ envoit respectivement h', e' et f' sur $-h, e$ et f.

d'où la formule

$$\mathrm{R}_{\mathrm{E}_{1,1}}\Phi(p_\tau) = \mathrm{Im}\,\tau\,\frac{\partial f}{\partial y}(\tau)$$

en dérivant en $t=0$. Dans cette dernière formule, nous voyons bien entendu f comme une fonction de deux variables (x,y) (comme en théorie des fonctions holomorphes) via $(x,y)\mapsto f(x+iy)$. De même, on a pour $t\in\mathbb{R}$:

$$\Phi(\mathrm{p}_\tau\exp(t\mathrm{E}_{1,2})) = \Phi(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}) = \Phi(\begin{pmatrix} y & ty+x \\ 0 & 1\end{pmatrix}) = f(x+ty+iy),$$

puis la formule

$$\mathrm{R}_{\mathrm{E}_{1,2}}\Phi(p_\tau) = \mathrm{Im}\,\tau\,\frac{\partial f}{\partial x}(\tau).$$

En terme des opérateurs différentiels d'ordre 1 sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{H})$ définis par les formules

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\ \text{ et }\ \frac{\partial}{\partial\overline{\tau}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y},$$

familiers en analyse complexe, et en utilisant la formule $-2\,i\mathrm{Im}\,\tau = \overline{\tau}-\tau$, on a la relation $\mathrm{Im}\,\tau(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}) = (\overline{\tau}-\tau)\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}}$. On a donc montré

$$(\mathrm{R}_{\mathrm{E}_{1,1}-\,i\,\mathrm{E}_{1,2}}\Phi)(\mathrm{p}_\tau) = (\overline{\tau}-\tau)\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}}f(\tau),$$

ce qui termine la démonstration du (iii). L'assertion (iv) se montre de la même manière, en utilisant $\mathrm{ad}_{s_\lambda}f' = (\lambda/|\lambda|)^{-2}f'$ et $f' = \overline{e'} = \frac{1}{2}(-h'-Z)+\mathrm{E}_{1,1}+\,i\,\mathrm{E}_{1,2}$. $\square$

Corollaire 4.24. *On se place sous les hypothèses de la Proposition 4.23 et on suppose de plus $s=0$. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) On a $\mathrm{R}_{e'}\,\Phi = 0$ si, et seulement si, f est holomorphe sur $\mathbb{H}$.

(ii) Si f est holomorphe, on a $C\,\Phi = m(m+1)\,\Phi$.

(iii) Si $m=s=0$, on a $(C\,\Phi)\,(\mathrm{p}_\tau) = -2\,(\mathrm{Im}\,\tau)^2\,\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\overline{\tau}}f(\tau)$.

Démonstration — Le (i) résulte immédiatement de la formule pour $\mathrm{R}_{e'}\Phi$, et du fait que f est holomorphe si, et seulement si, on a $\frac{\partial f}{\partial\overline{\tau}} = 0$ (équations de Cauchy-Riemann). Pour le (ii), on utilise la formule

$$C = ((h')^2+Z^2)/2 + e'f' + f'e' = ((h')^2+Z^2)/2 + h' + 2f'e'$$

et les relations $\mathrm{R}_{e'}\Phi = 0$ et $\mathrm{R}_Z\,\Phi = \mathrm{R}_{h'}\,\Phi = m\,\Phi$. Pour le (iii), on pose $\Phi' = \mathrm{R}_{e'}\,\Phi$. On a $\Phi'(\mathrm{p}_\tau\mathrm{s}_\lambda) = (\lambda/|\lambda|)^2\,(\overline{\tau}-\tau)\frac{\partial f}{\partial\overline{\tau}}$, de sorte que Φ' satisfait les hypothèses de la proposition avec $m=2$ et $s=-2$. On en déduit

$$\mathrm{R}_{f'}\Phi'(\mathrm{p}_\tau) = (\tau-\overline{\tau})\frac{\partial f}{\partial\tau}((\overline{\tau}-\tau)\frac{\partial f}{\partial\overline{\tau}}) - (\overline{\tau}-\tau)\frac{\partial f}{\partial\overline{\tau}} = -\,(\mathrm{Im}\,\tau)^2\,\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\overline{\tau}}f(\tau).$$

(on rappelle que l'on a par définition $\frac{\partial f}{\partial\tau}(\tau) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial\tau}(\overline{\tau}) = 0$). $\square$

Théorème 4.25. *Soit $k \in \mathbb{Z}$. L'application $f \mapsto \Phi_f$ induit une bijection entre l'espace M_k des formes modulaires et l'espaces des formes automorphes $\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\Phi(g\,\mathrm{s}_\lambda) \;=\; \lambda^{-k}\,\Phi(g)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et tout* $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

(ii) $\mathrm{R}_{e'}\,\Phi \;=0$,

(iii) $\mathrm{C}\,\Phi \;=\; k(k+1)\,\Phi$.

Démonstration — On part de la Proposition 4.20 appliquée à $\chi(\lambda) = \lambda^{-k}$. Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une fonction modulaire de poids $k \geq 0$. Notons que Φ_f est propre sous l'action de K^+ ; comme ce dernier est d'indice 2 dans K, on en déduit que Φ_f est K-finie. On a vu que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, on a $\Phi_f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, puis que f est holomorphe si, et seulement si, $\mathrm{R}_{e'}\Phi_f = 0$. Si f est holomorphe, on a vu aussi que Φ_f est propre sous l'action de Z et de C, elle est donc $\mathfrak{z}(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}))$-finie d'après le Théorème 4.10. Nous allons maintenant vérifier que si f est holomorphe, $f(\tau)$ admet une limite pour $\mathrm{Im}\,\tau \to +\infty$ si, et seulement si, Φ_f est à croissance modérée, et qu'auquel cas elle satisfait (AF4).

Soit $g = \mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$. On a $|\Phi_f(g)| = |\lambda||f(\tau)|$. En particulier, si Φ_f est à croissance modérée, il existe des constantes C, m telles que l'on ait

$$|f(\tau)| = |\Phi_f(\mathrm{p}_\tau)| \leq C||\mathrm{p}_\tau||^m = C(|\tau|^2 + 1 + (\mathrm{Im}\,\tau)^{-2})^{m/2}.$$

Cela entraîne que la série de Laurent $\widetilde{f} : \mathrm{D} - \{0\} \to \mathbb{C}$, qui rappelons-le vérifie $\widetilde{f}(\mathrm{q}) = f(\tau)$, satisfait $|\widetilde{f}(z)| \leq |P(\log(|z|)|$ où $P \in \mathbb{R}[X, X^{-1}]$ est un polynôme bien choisi (observer que l'on peut écrire $z = e^{2i\pi\tau}$ avec $|\mathrm{Re}(\tau)| \leq 1$, auquel cas on a $|\tau|^2 \leq (\mathrm{Im}\,\tau)^2 + 1$ et $|\log(|z|)| = 2\pi \mathrm{Im}\,\tau$). Cela implique que $|z\widetilde{f}(z)|$ est bornée au voisinage de $z = 0$, et tend vers 0 en 0 : $\widetilde{f}$ est holomorphe en 0, *i.e.* f est une forme modulaire.

Étudions enfin la réciproque. Observons d'abord que si $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ est de la forme $\mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda$, on a les égalités $|\det g| = |\lambda|^2 \mathrm{Im}\,\tau$ et

$$||\mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda||^2 = ||\mathrm{p}_\tau|\lambda|||^2 = |\lambda|^2(|\tau|^2 + 1) + |\det g|^{-2}.$$

En particulier, on a $|\lambda|\mathrm{Im}\,\tau \leq ||g||$, $|\lambda|^{-2}(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1} \leq ||g||$, $|\lambda|^{-1} \leq ||g||^2$ et $|\mathrm{Im}\,\tau| \leq ||g||^3$.

Ssupposons enfin que $f(\tau)$ admet une limite quand $\mathrm{Im}\,\tau \to +\infty$. En particulier, $|f(\tau)|$ est bornée sur le domaine fondamental $\mathcal{F}$ par une certaine constante $C > 0$. Mais tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est de la forme $g = \gamma \mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda$ avec $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et τ dans $\mathcal{F}$. Comme Φ_f est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-invariante à gauche, on a donc $|\Phi_f(g)| = |\lambda|^{-k}|f(\tau)| \leq C|\lambda|^{-k}$. Les observations ci-dessus (et $k \geq 0$) montrent $|\lambda|^{-k} \leq ||\mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda||^{2k}$. On conclut par le lemme 4.26.

Vérifions maintenant que $u\Phi_f$ est à croissante modérée pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$. Cela concluera la démonstration. Il suffit de le faire pour des éléments de la forme $(f')^a(h')^b(e')^c Z^d$ avec a, b, c, d des entiers ≥ 0. D'après les relations $\mathrm{R}_Z\Phi_f = \mathrm{R}_{h'}\Phi_f = m\Phi_f$ et $\mathrm{R}_{e'}\Phi_f = 0$, il suffit de le vérifier pour la fonction $\Psi_m := \mathrm{R}_{(f')^m}\Phi_f$ avec $m \geq 0$.

D'après la Proposition 4.23 (iv), elle vérifie $\Psi_m(\mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda) = \lambda^{-k}(\lambda/|\lambda|)^{-2m} f_m(\tau)$, où $f_0 = f$ et pour $m \geq 1$ on a

$$f_m(\tau) = (\tau - \overline{\tau})\frac{\partial f_{m-1}(\tau)}{\partial \tau} + (k-m+1) f_{m-1}(\tau).$$

On constate aisément que $f_m(\tau)$ est une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $(\tau - \overline{\tau})^i f^{(j)}(\tau)$ avec $i \leq m$. En particulier, $|f_m(\tau)|$ est majorée sur $\mathcal{F}$ par un polynôme en $\mathrm{Im}\,\tau$ dont le degré est $\leq m$. Le même argument que ci-dessus montre alors que Ψ_m est à croissance modérée. □

Le lemme suivant est dû à Borel et Harish-Chandra. On note $\Pi \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments de la forme $\mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda$ avec $\tau \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Lemme 4.26. *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $g \in \Pi$ on a*

$$\delta ||g|| \leq \inf_{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})} ||\gamma g|| \leq ||g||.$$

Démonstration — Fixons $g = \mathrm{p}_\tau \mathrm{s}_\lambda$ avec $\tau \in \mathcal{F}$. Soit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. On pose $\tau' = \gamma \mathrm{p}_\tau(i) = \gamma\tau \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. On a $\gamma \mathrm{p}_\tau = \mathrm{p}_{\tau'} \mathrm{s}_{\lambda'}$ pour un unique $\lambda' \in \mathbb{C}$, où la définition de p_z pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ va de soi. En appliquant $h \mapsto |\det h|$ on obtient l'égalité $\mathrm{Im}\,\tau = \mathrm{Im}\,\tau' \, |\lambda'|^2$. On a donc

$$||\gamma\, g||^2 = ||\mathrm{p}_{\tau'}\, \mathrm{s}_{\lambda\lambda'}||^2 = ||\mathrm{p}_{\tau'}\, |\lambda\lambda'|\, ||^2 = |\lambda\lambda'|^2\,(|\tau'|^2+1) + |\det g|^{-2}.$$

Écrivons $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. On a $|\lambda'| = |c\tau + d|$ et $\tau' = (a\tau+b)/(c\tau+d)$, puis

$$|\lambda'|^2(|\tau'|^2+1) = |a\tau+b|^2 + |c\tau+d|^2 \geq (a^2+c^2)\,(\mathrm{Im}\,\tau)^2 \geq (\mathrm{Im}\,\tau)^2.$$

Mais on vérifie immédiatement que pour $\tau \in \mathcal{F}$, et plus généralement pour $|\mathrm{Re}\,\tau| \leq 1/2$ et $\mathrm{Im}\,\tau \geq \sqrt{3}/2$, on a l'inégalité $(\mathrm{Im}\,\tau)^2 \geq \frac{3}{8}\,(|\tau|^2+1)$. Cela montre

$$||\gamma g||^2 \geq \frac{3}{8}\,||g||^2,$$

et conclut la démonstration (avec $\delta^2 = 3/8$). □

Remarque 4.27. Le Lemme 4.26 s'étend à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et même à des sous-groupes d'indice fini de ces derniers, si l'on remplace Π par un *domaine de Siegel* convenable : voir le premier chapitre du livre de Borel *Introduction aux groupes arithmétiques.*