GT : Fonction τ de Ramanujan

L'objectif de cet exposé est de démontrer les deux formules suivantes :

* Si $n, m \in \mathbb{N}$ premiers entre eux, $\tau(n)\tau(m) = \tau(nm)$
* Si $p \in \mathbb{N}$ premier, $\tau(p)\tau(p^n) = \tau(p^{n+1}) + p^{11}\tau(p^{n-1}), \forall n \geq 1$

Pour cela, on définit dans un premier temps les opérateurs de Hecke.

I - Les opérateurs de Hecke :

Définition : On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$

$$\mathcal{R} := \{ \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \mid \omega_1 \in \mathbb{C},\ \omega_2 \notin \mathbb{R}\omega_1 \}.$$

$\mathbb{Z}\mathcal{R}$ l'ensemble des sommes formelles de réseaux de $\mathbb{C}$

$$\mathbb{Z}\mathcal{R} = \{ \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i \mid n \in \mathbb{N},\ \Lambda_i \in \mathcal{R} \}.$$

On définit alors, pour tout $n \geq 1$, pour tout $\Lambda \in \mathcal{R}$

$$T(n)\Lambda = \sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} \Lambda' \in \mathbb{Z}\mathcal{R}$$

Remarques : * $T(n)$ est défini sur une base de $\mathbb{Z}\mathcal{R}$ donc par linéarité, elle s'étend à tout $\mathbb{Z}\mathcal{R}$.

* Soit p premier, ~~on a~~ ~~pour~~ ~~[illegible]~~

soit $\Lambda \in \mathcal{R}$ et Λ' sous-réseau de Λ tel que $[\Lambda : \Lambda'] = p$

Alors, $p\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda$, il suffit de remarquer que $\Lambda / \Lambda' \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Proposition : Soit p premier et $\Lambda \in \mathcal{R}$

alors $\{ \Lambda' \text{ sous réseau de } \Lambda \mid [\Lambda : \Lambda'] = p \}$ est fini

Démonstration :

Soit Λ' sous réseau de Λ, $[\Lambda : \Lambda'] = p$

Alors on a vu que $p\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda$

et $p\Lambda$ d'indice p^2 dans Λ

donc $\Lambda/p\Lambda$ d'ordre p^2, c'est donc soit $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ soit $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$

Si $\Lambda/p\Lambda \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ alors il existe un élément d'ordre additif p^2 dans $\Lambda/p\Lambda$. ce qui

n'est pas donc $\Lambda/p\Lambda \simeq \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$

Ainsi $\#\{\Lambda'$ sous-réseau de $\Lambda \mid [\Lambda:\Lambda'] = p\}$

$$= \#\{H < \Lambda/p\Lambda \mid |H| = p\}$$

$$= p+1.$$

En effet soit $(1,k) \in \Lambda$, $k \in [\![0,p-1]\!]$, alors $(1,k)$ engendre un groupe d'ordre p car $p \wedge k = 1$.

De plus $(0,1)$ engendre aussi un groupe d'ordre p

Ces groupes étant d'intersection disjoints, ils contiennent en tout $p(p+1)-p = p^2$ élément

donc on a bien $p+1$ sous groupes H de $\Lambda/p\Lambda$ tels que $|H|=p$.

De ce fait $\#\{\Lambda'$ sous-réseau de $\Lambda \mid [\Lambda:\Lambda'] = p\} < +\infty$ ∎.

Définition et Proposition :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on pose R_α tel que $\forall \Lambda \in \mathcal{R}, R_\alpha \Lambda = \alpha\Lambda$

On a donc $\forall \alpha, \mu \in \mathbb{C}^*$, $R_\alpha R_\mu = R_\mu R_\alpha$

et $\forall n \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{C}^*, R_\alpha T(n) = T(n) R_\alpha$.

Démonstration : Il s'agit d'une simple vérification.

Proposition: Soit $m, n \in \mathbb{N}$, on a

(i) si $m \wedge n = 1$ alors $T(n)T(m) = T(nm)$

(ii) si p premier, $T(p^n)T(p) = T(p^{n+1}) + p\,T(p^{n-1})R_p$

Remarque: les deux relations sont analogues à celles voulues pour τ.

Démonstration:

(i) Soit $m, n \in \mathbb{N}$, tels que $m \wedge n = 1$

alors pour $\Lambda \in \mathcal{R}$,
$$\begin{cases} T(nm)\Lambda = \sum_{[\Lambda:\Lambda'] = nm} \Lambda' \\ T(n)T(m)\Lambda = T(n)\sum_{[\Lambda:\Lambda'] = m} \Lambda' = \sum_{[\Lambda:\Lambda'] = m} \sum_{[\Lambda':\Lambda''] = n} \Lambda'' \end{cases}$$

il s'agit de montrer que ces quantités sont égales

Soit toujours $\Lambda \in \mathcal{R}$ et Λ'' ~~[illegible]~~ d'indice nm dans Λ

Alors Λ/Λ'' est d'ordre fini égal à nm.

On pose $H_m = \{x \in \Lambda/\Lambda'' \mid mx = 0\}$ $H_n = \{x \in \Lambda/\Lambda'' \mid nx = 0\}$

On a $H_m < \Lambda/\Lambda''$, $H_n < \Lambda/\Lambda''$

Le groupe Λ/Λ'' étant abélien, on peut utiliser le théorème de structure des groupes abéliens finis

tout élément de H_m est d'ordre divisant m, on en déduit sur H_m et H_n en remarquant que

que les facteurs premiers dans $|H_m|$ divisent m donc ne divisent pas n. Par le théorème de Bezout,

$\exists u, v \in \mathbb{Z} : mu + nv = 1$ donc pour $x \in \Lambda/\Lambda''$,

$x = mux + nvx$

~~donc~~ 0, $mnx = 0$ donc $mux \in H_n$, $nvx \in H_m$ et

Ainsi, $\Lambda/\Lambda'' = H_m + H_n$ et $H_m \cap H_n = \{0\}$ car si $x \in H_m \cap H_n$ alors en utilisant la relation de Bezout $x = 0$.

Finalement $\Lambda/\Lambda'' = H_m \oplus H_n$, puisque tout groupe d'ordre m est inclus dans H_m, la décomposition est unique.

Donc si Λ'' d'indice nm dans Λ, on a un unique sous-réseau Λ' de Λ tel que
$$\begin{cases} [\Lambda : \Lambda'] = n \\ [\Lambda' : \Lambda''] = m \end{cases}$$
, obtenu avec $\Lambda' = \Lambda'' + H_m$

De ce fait, si Λ_0 apparaît dans $\sum_{[\Lambda:\Lambda'']=nm} \Lambda''$ alors il apparaît dans la double somme
$$\sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} \sum_{[\Lambda':\Lambda'']=m} \Lambda''$$
on obtient donc que $T(nm) = T(n)T(m)$

La réciproque se fait aisément,

(ii) Soit $\Lambda \in \mathcal{R}$, $n \geq 1$, p premier, soit Λ' sous-réseau de Λ d'indice p^{n+1}

On remarque que tous les réseaux dans les sommes
$$\begin{cases} T(p^n)T(p)\Lambda \\ T(p^{n+1})\Lambda \\ pT(p^{n-1})R_p\Lambda \end{cases}$$
sont d'indice p^{n+1} dans Λ

Notons alors $a_{\Lambda'}$, $b_{\Lambda'}$, $c_{\Lambda'}$ les coefficients de Λ' dans $T(p^n)T(p)\Lambda$, $T(p^{n+1})\Lambda$, $T(p^{n-1})R_p\Lambda$.
On voit facilement que $b_{\Lambda'} = 1$

On distingue deux cas:

* $\Lambda' \subseteq p\Lambda$, on a alors $c_{\Lambda'} = 1$

en effet $T(p^{n-1})R_p\Lambda = T(p^{n-1})\, p\Lambda = \sum_{[p\Lambda:\Lambda'']=p^{n-1}} \Lambda''$ donc il y a une seule copie de Λ' dans $T(p^{n-1})R_p\Lambda$.

Et, $T(p^n)\,T(p)\,\Lambda = \sum_{[\Lambda'':\Lambda^{(3)}]=p^n} \; \sum_{[\Lambda:\Lambda'']=p} \Lambda^{(3)}$

Or, soit $\Lambda^{(3)}, \Lambda''$ tel que $\begin{cases} [\Lambda'':\Lambda^{(3)}]=p^n \\ [\Lambda:\Lambda'']=p \\ \Lambda^{(3)} \subseteq p\Lambda \end{cases}$ alors, $\cancel{\Lambda^{(3)} \subseteq \Lambda'' \subseteq p\Lambda}$

$$\Lambda^{(3)} \subseteq p\Lambda \subseteq \Lambda'' \subseteq \Lambda$$

Donc pour tout Λ'' comme ci-dessus, il existe une copie de Λ' dans $\sum_{[\Lambda'':\Lambda^{(3)}]=p^n} \Lambda'$

On a vu précédemment que la somme $\sum_{[\Lambda:\Lambda'']=p} \Lambda''$ contient $(p+1)$ éléments

donc on a $(p+1)$ copies de Λ' dans $T(p^n)\,T(p)$ et c'est bien $1+pc_{\Lambda'}$

* sinon, Λ' n'est pas un sous-réseau de $R_p\Lambda$ donc $c_{\Lambda'}=0$, il faut montrer que $a_{\Lambda'}=1$.

Soit Λ_0 sous-réseau d'indice p de Λ qui contient Λ' comme sous-réseau d'indice p^n

On a $p\Lambda \subseteq \Lambda_0$ et on rappel que $\Lambda/p\Lambda \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$

Or, $\Lambda/p\Lambda$ contient $\widetilde{\Lambda}_0$ l'image de Λ_0

Sachant que Λ_0 est d'indice p dans Λ, il l'est aussi dans $\Lambda/p\Lambda$.

De plus Λ' n'est pas contenu dans $p\Lambda$ donc il est d'ordre p ou p^2 comme sous groupe de $\Lambda/p\Lambda$,

ce n'est clairement pas $\Lambda/p\Lambda$ tout entier car il est d'indice p^{n+1} dans Λ

Ainsi Λ' est d'ordre p dans $\Lambda/p\Lambda$ donc d'indice p.

De ce fait, le choix de Λ' impose le choix de Λ_0 donc $a_{\Lambda'} = 1 = 1+pc_{\Lambda'}$.

Cela achève la preuve ■

II - Action des opérateurs de Hecke sur les q-développements

Une autre façon (~~...~~ plus calculatoire) de définir les opérateurs et de regarder leur action sur les formes modulaires et sur les fonctions faiblement modulaires.

Définition:

* Soit F une fonction modulaire, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on note pour $\Lambda \in \mathcal{R}$

$$\begin{cases} T(n)F(\Lambda) = F(T(n)\Lambda) = \sum\limits_{[\Lambda:\Lambda']=n} F(\Lambda') \\ R_\lambda F(\Lambda) = \lambda^{-2k} F(\Lambda) \text{ où } 2k \text{ le poids de } F. \end{cases}$$

* Soit f faiblement modulaire, on définit pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\cancel{T(n)f(z) = n^{2k-1}\, T(n) F(\mathbb{Z}(z,1))} \qquad T(n)f(z) = n^{2k-1} T(n) F(\mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z})$$

où $F \in \mathcal{R}$ et est telle que si $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$

alors $F(\Lambda) = \omega_2^{-2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ (Cette forme modulaire existe grâce aux résultats vu dans les exposés précédents).

Proposition: Si $n, m \in \mathbb{N}$, p premier, F de poids $2k$, f faiblement modulaire de poids $2k$

* $T(n)T(m)F = T(nm)F$ si $n \wedge m = 1$ et $T(n)T(m)f = T(nm)f$
* $T(p)T(p^n)F = T(p^{n+1})F + p^{1-2k} T(p^{n-1})F$ et $T(p)T(p^n)f = T(p^{n+1})f + p^{1-2k} T(p^{n-1})f$

Démonstration: Cela découle de la formule sur les $T(n)$, $T(m)$ et $T(p)$. ■

Proposition: Soit f fonction modulaire dont le q développement est

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) q^m \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Alors $T(n)f(z) = \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$T(n)f$ est une fonction modulaire

avec $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\gamma(m) = \sum\limits_{\substack{a \mid n \wedge m \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c\left(\frac{mn}{a^2}\right)$

~~Démonstration: Soit f fonction modulaire, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$~~

~~On a $T(n)f(z) =$~~

Pour montrer ce résultat, on a d'abord besoin d'un lemme

Lemme: On note $S_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, ad = n,\ a \geq 1,\ 0 \leq b < d \right\}$

On a alors pour $\Lambda \in \mathcal{R}$ $= \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$

$$\varphi_\Lambda : S_n \longrightarrow E_\Lambda(n) \quad \text{où } E_\Lambda(n) = \{ \Lambda' < \Lambda \mid [\Lambda : \Lambda'] = n \}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \mathbb{Z}(a\omega_1 + b\omega_2) \oplus \mathbb{Z}d\omega_2$$

(avec $\Lambda' \in \mathcal{R}$)

est une bijection.

Démonstration:

* Dans un premier temps, soit $\Lambda \in \mathcal{R}$, $\sigma \in S_n$, alors $\varphi_\Lambda(\sigma) \in E_\Lambda(n)$ car $ad = n$.

* De plus, soit $\Lambda' \in E_\Lambda(n)$

On note $Y_1 := \Lambda / (\Lambda' + \mathbb{Z}\omega_2)$ $\quad Y_2 := \mathbb{Z}\omega_2 / (\Lambda' \cap \mathbb{Z}\omega_2)$

On a $Y_1 = \langle \pi_1(\omega_1) \rangle$ $\quad Y_2 = \langle \pi_2(\omega_2) \rangle$ où
$$\begin{cases} \pi_1 : \Lambda \to \Lambda / (\Lambda' + \mathbb{Z}\omega_2) \\ \pi_2 : \Lambda \to \mathbb{Z}\omega_2 / (\Lambda' \cap \mathbb{Z}\omega_2) \end{cases}$$

On a $\begin{cases} Y_1 \text{ ~~cyclique~~ d'ordre noté } a \\ Y_2 \text{ cyclique d'ordre noté } d \end{cases}$

On remarque que l'on a $0 \to Y_2 \to \Lambda/\Lambda' \to Y_1 \to 0$ exacte.

donc $|\Lambda/\Lambda'| = |Y_2||Y_1|$

d'où $n = ad$.

On a ~~alors~~ de plus $d\omega_2 \in \Lambda'$ (car ω_2 est d'ordre d dans Y_2)

et l'existence de $\omega_1' \in \Lambda'$ tel que $\omega_1' = a\omega_1 \pmod{\mathbb{Z}\omega_2}$

ω_1' et ω_2' sont linéairement indépendants donc forment une base de Λ'.

et $\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$ avec $0 \le b < d$ (car ω_2 d'ordre d dans Y_2)

d'où l'existence de $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S_n$ telle que $\varphi_\Lambda\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \Lambda'$

Démonstration (de la proposition) : Soit $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, f fonction modulaire

On a ~~$T(n)f(z)$~~

$$T(n)f(z) = n^{2k-1}\, T(n)\, F(\mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z})$$

, on note $\Lambda_z := \mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z}$ pour la suite.

$$= n^{2k-1} \sum_{[\Lambda_z : \Lambda'] = n} F(\Lambda')$$

$$= n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a \ge 1,\ 0 \le b < d}} F\left(\varphi_{\Lambda_z}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)$$

$$= n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a \ge 1,\ 0 \le b < d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

$$= n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a \ge 1,\ 0 \le b < d}} d^{-2k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) \exp\left(2i\pi m\left(\frac{az+b}{d}\right)\right)$$

et, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{\substack{ad=n \\ a \ge 1,\ 0 \le b < d}} d^{-2k} \exp\left(2i\pi m\left(\frac{az+b}{d}\right)\right)$

$$= \sum_{\substack{ad=1 \\ a \ge 1}} d^{-2k} \sum_{0 \le b < d} \exp\left(2i\pi m \frac{az}{d}\right) \exp\left(2i\pi \frac{mb}{d}\right)$$

$$= \sum_{\substack{ad=1 \\ a \ge 1}} d^{-2k} \exp\left(2i\pi m \frac{az}{d}\right) m\, \mathbb{1}_{d|m}$$

D'où $\displaystyle T(n)f(z) = n^{2k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d|m \\ ad=n \\ a \ge 1}} d^{-2k} \exp\left(2i\pi m \frac{az}{d}\right) c(m) = n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a \ge 1 \\ m' \in \mathbb{Z}}} d^{-2k+1} \exp(2i\pi a m' z)\, c(m'd)$

En regroupant les termes correctement, on a

$$T(n)f(z) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} q^{\ell} \cdot \sum_{\substack{a \mid \ell \wedge n \\ a \geq 1}} \left(\underbrace{\frac{n}{d}}_{a}\right)^{2k-1} \underbrace{c\left(\frac{\ell d}{a}\right)}_{= c\left(\frac{\ell n}{a^2}\right)}$$

ce qui donne $\gamma(m)$ ~~[illegible]~~ pour $m \in \mathbb{Z}$

En particulier $\gamma(0) = \sum_{\substack{a \mid n \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c(0) = \left(\sum_{\substack{a \mid n \\ a \geq 1}} a^{2k-1}\right) c(0)$

et $\gamma(1) = \sum_{\substack{a \mid 1 \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c\left(\frac{n}{a^2}\right)$

$= c(n)$

Si p premier ($n = p$), $\gamma(m) = \sum_{\substack{a \mid p \wedge m \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c\left(\frac{mp}{a^2}\right)$

* Si $p \mid m$ alors $\gamma(m) = \sum_{\substack{a \mid p \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c\left(\frac{mp}{a^2}\right) = c(pm) + p^{2k-1} c(m/p)$

~~$= c(pm) + p^{2k-1} c(1)$~~

~~Or si on suppose f méromorphe à l'infini $c(1) = 0$ donc $\gamma(m) = c(pm)$~~

* Si $p \nmid m$ alors $\gamma(m) = c(pm)$

De plus, f méromorphe à l'infini donc $\exists N \geq 0 : \forall m \leq -N \; c(m) = 0$

et $\forall \ell \leq -nN$ on a ~~$c\left(\frac{\ell n}{a^2}\right)$~~ $\frac{\ell n}{a^2} \leq -\frac{n^2 N}{a^2} \leq -N$ donc $c\left(\frac{\ell n}{a^2}\right) = 0$

et $T(n)f$ méromorphe à l'infini donc c'est une fonction modulaire.

III - Retour sur les séries d'Eisenstein et sur Δ

Dans cette partie on va montrer des propriétés sur les G_k et sur Δ liées aux opérateurs de Hecke.

On rappelle que $\forall k \geq 2, \forall \Lambda \in \mathcal{R}, G_k(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^{2k}}$

$$\frac{1}{(2\pi)^{12}} \Delta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n.$$

Définition : On dit qu'une forme modulaire f est ~~fait~~ une fonction propre de tout les $T(n)$ si $\exists\, (d(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ T(n)f = d(n) f$.

Théorème :

Soit f forme modulaire propre pour tous les $T(n)$ dont le q-developpement est donné par

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m) q^m$$

Si $c(1) = 1$ alors $c(n) = d(n)$

Démonstration :

Dans $T(n)f$ le coefficient $\gamma(1)$ vaut $c(n)$ comme vu dans la démonstration de la proposition précédent. ∎

Corollaire : Soit f forme modulaire propre pour tous les $T(n)$ alors en conservant les mêmes notations que dans le théorème, on a

si $n \wedge m = 1$, $c(m)c(n) = c(mn)$

si p premier, $n \geq 1$, $c(p)c(p^n) = c(p^{n+1}) + p^{2k-1} c(p^{n-1})$

Démonstration :

~~Soit~~ On a l'existence de $(d(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T(n)f = d(n)f.$$

et $d(n) = c(n)$ d'après le théorème donc $\forall n \in \mathbb{N},\ T(n)f = c(n) f$.

d'où, par propriété de multiplicativité des $T(n)$ on a les mêmes relation sur les $c(n)$ ∎

Exemple : Séries d'Eisenstein

Soit $k \geq 2$ mq G_k est fonction propre de tous les $T(n)$.

En le montrant pour tout p premier alors par les formules ~~sur~~ les $T(n)$ on aura que G_k est fonction propre pour tous les $T(n)$.

Soit alors p premier, on a $\forall \Lambda \in \mathcal{R},\ T(p)G_k(\Lambda) = \displaystyle\sum_{[\Lambda:\Lambda'] = p} \sum_{\substack{d\in\Lambda' \\ d\neq 0}} \frac{1}{d^{2k}}$

Soit $\lambda \in \Lambda$, on cherche à compter le nombre de sous-réseaux Λ' ~~dans~~ auxquels il appartient alors on distingue deux cas

* $\lambda \in p\Lambda$, il appartient à tous les $p+1$ sous-réseaux
* $\lambda \notin p\Lambda$, λ appartient à un unique Λ' d'indice p donc

$$T(p) G_k(\Lambda) = \sum_{[\Lambda : \Lambda'] = p} \sum_{\substack{\gamma \in p\Lambda \\ \gamma \in \Lambda'}} \frac{(p+1)}{\gamma^{2k}} + \sum_{\substack{\gamma \notin p\Lambda \\ \gamma \in \Lambda'}} \frac{1}{\gamma^{2k}}$$

$$= G_k(\Lambda) + p \underbrace{G_k(p\Lambda)}_{= p^{-2k} G_k(\Lambda)}$$

$$= (1 + p^{1-2k}) G_k(\Lambda) .$$ donc G_k est fonction propre de tous les $T(n)$.

Théorème :

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, p premier, on a

(i) si $n \wedge m = 1$, $\tau(n)\tau(m) = \tau(nm)$

(ii) $\tau(p)\tau(p^n) = \tau(p^{n+1}) + p^{11}\tau(p^{n-1})$

Démonstration :

Montrons dans un premier temps que Δ est fonction propre de tous les $T(n)$.

On a vu dans l'exposé précédent que l'ensemble des formes paraboliques de poids k est de dimension 1. De plus, cet espace est stable par $T(n)$

(remarquer par exemple que $T(n) f(z) = n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a \geq 1, 0 \leq b < d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$)

et Δ est une forme parabolique de poids 12

donc c'est une fonction propre de tous les $T(n)$

En particulier ses coefficients $(\tau(n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les points (i) et (ii)