Introduction aux formes modulaires

Youssef Guindy

29 septembre 2025

1 Le groupe modulaire

1.1 Définitions, motivations

Pour comprendre les formes modulaires, il faut commencer par comprendre l'action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0\}$. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit naturellement sur $\mathbb{C}^2$, mais aussi sur l'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$. Or un élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ s'écrit $[z : 1]$ ou $[1 : 0]$. Ainsi, on peut définir une bijection

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ z \in \mathbb{C} &\mapsto \begin{cases} [z : 1] & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ [1 : 0] & \text{si } z = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. L'action naturelle s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [z : 1] = [az + b : cz + d] = \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right]$. Ceci motive la définition de l'action classique $gz = \dfrac{az + b}{cz + d}$ et montre sans effort que c'est une action de groupe. Une autre motivation vient du fait que ces transformations préservent les géodésiques de $\mathbb{H}$ vu comme espace hyperbolique.

Remarque. Les calculs fonctionnent quand $z = \infty$ avec les conventions usuelles. En particulier, si $c = 0$, alors g envoie ∞ sur lui-même. Sinon, on a $g\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$ et $g(\infty) = \frac{a}{c}$.

Remarquons que si $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$, alors le dénominateur ne s'annule pas et

$$\mathfrak{Im}(gz) = \frac{\mathfrak{Im}(z)}{|cz + d|^2} \ ,$$

donc $\mathbb{H}$ est stable par l'action. De plus, une matrice qui fixe toutes les droites étant classiquement une homothétie, cette action se factorise en une action fidèle de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ sur $\mathbb{H}$.

On s'intéresse à l'action induite de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$. La discussion précédente motive la définition :

Définition 1.1. *Le groupe modulaire* est le groupe $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ image de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Remarque. Nous allons souvent confondre dans ce texte une matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et sa classe dans G, c'est-à-dire qu'on considère les matrices au signe près.

Commençons par définir deux éléments particuliers de G. On pose

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

On a pour tout $z \in \mathbb{H}$, $Sz = -\dfrac{1}{z}$ et $Tz = z+1$. On notera également $\Gamma < G$ le sous-groupe engendré par S et T.

Lemme 1.2. *On a* $\Gamma = G$, i.e. *les « matrices » S et T engendrent G.*

Nous pouvons montrer ce lemme en faisant des opérations sur les lignes et colonnes mais nous renvoyons à l'exposé suivant qui donne une preuve géométrique basée sur l'action du groupe modulaire sur $\mathbb{H}$.

2 Les formes modulaires

2.1 Définition

Définissons maintenant les formes modulaires.

Définition 2.1. Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On dit que f est une *forme modulaire de poids k* si f est holomorphe sur $\mathbb{H}$, a une limite quand la partie imaginaire de z tend vers l'infini, *i.e.* $\lim\limits_{\mathfrak{Im}(z)\to+\infty} f(z)$ existe dans $\mathbb{C}$, et si elle vérifie de plus que pour tous $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ et $z \in \mathbb{H}$, on a

$$f(gz) = (cz+d)^k f(z) \ .$$

Remarque. (i) Nous n'allons parler que de formes modulaires de poids pair. En effet supposons que f est une forme modulaire de poids impair et soit $g \in G$. Comme $g \in G$ est définie au signe près, on obtient avec la classe de 1 qui est aussi la classe de -1 que $f = -f$. *Une forme modulaire de poids impair est donc nécessairement nulle.*

(ii) Une application directe du théorème de Liouville montre que les seules formes modulaires de poids 0 sont les constantes. Pour le voir il faut utiliser le domaine fondamental qui sera défini dans le prochain exposé.

Remarque. Le groupe G étant engendré par S et T, pour qu'une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ vérifiant les deux premiers points de la définition précédente soit une forme modulaire de poids $2k$ il suffit de vérifier que pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a

$$f(z+1) = f(z) \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{2k} f(z) \ .$$

Preuve de la remarque. On introduit pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ et $z \in \mathbb{H}$ la notation $j(g,z) := cz+d$. Ceci est bien défini car on s'est restreint au cas où k est pair.

Soient maintenant $g, g' \in G$, alors un calcul direct donne que

$$j(gg', z) = j(g, g'z) j(g', z) \ .$$

Ceci montre que pour tout k la fonction $(f,g) \in \mathbb{C}^{\mathbb{H}} \times G \mapsto (z \mapsto j(g,z)^{-k} f(gz))$ définit une action à droite du groupe G sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$. La condition qui nous intéresse étant le fait d'être un point fixe de l'action, il est clair qu'il suffit de le vérifier pour les générateurs S et T.

Donnons une idée de preuve plus conceptuelle. Commençons par remarquer que $\dfrac{d(gz)}{dz} = (cz+d)^{-2}$. Ainsi si on considère l'action de G sur l'ensemble des $1-$formes holomorphes « de poids k » via $g \cdot (f(z)dz^k) := f(gz)d(gz)^k$. L'équation fonctionnelle vérifiée par une forme modulaire f équivaut à dire que la forme holomorphe $f(z)dz^k$ est invariante par l'action de G. La conclusion est alors évidente. □

2.2 Le $q-$développement des formes modulaires

Soit f une forme modulaire (on pourrait plus généralement prendre une fonction *faiblement modulaire*, c'est-à-dire qu'on peut négliger les conditions d'holomorphie et de limite à l'infini, mais nous nous intéressons ici uniquement aux formes modulaires). Comme f est une fonction $1-$périodique, elle est fonction de la variable $q = e^{2i\pi z}$. Expliquons ceci plus précisément.
L'application $q : z \in \mathbb{H} \mapsto e^{2i\pi z}$ définit une application surjective du demi-plan de Poincaré dans le disque ouvert épointé $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \backslash \{0\}$ (c'est même un revêtement de groupe $\mathbb{Z}$!). Elle définit également un biholomorphisme de $\{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 < \mathfrak{Re}(z) < 1/2\}$ dans $\mathbb{D}^* \setminus \mathbb{R}_-$. Nous pouvons donc dire que pour f $1-$périodique, il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \tilde{f}(q)$.

Proposition 2.2. *Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une fonction $1-$périodique et $\tilde{f} : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ comme ci-dessus. Alors $\tilde{f}$ est holomorphe si et seulement si f l'est. Dans ce cas, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{\mathfrak{Im}(z)\to+\infty} f(z)$ *existe dans* $\mathbb{C}$.
2. f *est bornée sur* $\{z \in \mathbb{H} \mid \mathfrak{Im}(z) \geq 12\}$.
3. $\tilde{f}(q)$ *a une limite finie quand* q *tend vers* 0.
4. $\tilde{f}(q)$ *est bornée au voisinage de* 0.
5. $\tilde{f}$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathbb{D}$.

Démonstration. L'équivalence entre l'holomorphie de f est celle de $\tilde{f}$ vient de la simple observation que q est un biholomorphisme d'une « tranche » ouverte de $\mathbb{H}$ de largeur 1 dans $\mathbb{D}^*$ privé d'un rayon. Les équivalences sont claires par le théorème de prolongement de Riemann en plus du biholomorphisme défini par q. □

Remarque. 1. En particulier, si f est holomorphe, alors $\tilde{f}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^*$, donc admet un développement

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n \ .$$

2. Pour f une forme modulaire, on note $f(\infty) := \tilde{f}(0) = \lim\limits_{\mathfrak{Im}(z)\to+\infty} f(z)$.

Nous avons tous les outils pour définir le $q-$développement d'un forme modulaire.

Définition 2.3. Soit f une forme modulaire. Comme $\tilde{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$, elle est développable en série entière en 0 de rayon de convergence ≥ 1, et on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n = \sum_{n \geq 0} e^{2i\pi n z} \ .$$

Cette série entière s'appelle *$q-$développement de f* et les coefficients (a_n) s'appellent *coefficients de Fourier de f*.

Définition 2.4. Une forme modulaire f est dite *parabolique* si elle nulle à l'infini, c'est-à-dire si $f(\infty) = a_0 = 0$.

2.3 Les formes modulaires vues comme fonctions de réseaux

Rappelons la définition d'un réseau de $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2).

Définition 2.5. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$. On dit que Λ est un réseau de $\mathbb{C}$ s'il existe une famille $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2$ qui est $\mathbb{R}-$libre telle que $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$.

Remarque. Remarquons que dans ce cas, Λ est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$. En particulier, il existe un élément λ_0 non nul de Λ de norme minimale.

Si $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, alors quitte à remplacer ω_1 par son opposé on peut supposer que $\mathfrak{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$. Ceci motive la définition de l'ensemble $\mathcal{M} := \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathfrak{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0\}$. Pour $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}$, on notera $\Lambda(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$.

L'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}^2$ induit une action sur $\mathcal{M}$. En effet, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\omega := (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}$, alors $g\omega = (a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)$. Ainsi, on a en notant $z := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$:

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right) = \mathfrak{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0 \ .$$

Il est classique que $\omega := (\omega_1, \omega_2)$ et $\omega' := (\omega'_1, \omega'_2)$ engendrent le même réseau si et seulement si il existe une matrice dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\omega' = g\omega$ (il suffit d'écrire que chaque point d'un coupe est dans le réseau engendré par l'autre). En imposant de plus l'appartenance à $\mathcal{M}$, le calcul précédent montre que la matrice est de déterminant 1. On en déduit :

Proposition 2.6. *L'ensemble $\mathcal{M}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est en bijection avec $\mathcal{R}$.*

Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit naturellement sur $\mathcal{M}$ donc il agit sur les réseaux par homothétie, *i.e.* $\lambda\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \Lambda(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)$.

Donnons un point de vue équivalent et souvent très utile sur les formes modulaires. L'idée est qu'un réseau à homothétie près est engendré par $(z, 1)$ pour un unique $z \in \mathcal{F}$, le domaine fondamental de l'action de G sur $\mathbb{H}$.

Définition 2.7. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Un fonction $F : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ est dite *de poids k* lorsque pour tous $\Lambda \in \mathcal{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a

$$F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-k} F(\Lambda) \ .$$

Une fonction de réseaux $F : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ peut être vue comme une fonction $F : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ invariante par l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ en associant à (ω_1, ω_2) le complexe $F(\Lambda(\omega_1, \omega_2))$. Si de plus elle est de poids k, on a alors

$$\omega_2^k F(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1/\omega_2, 1) \ ,$$

qui ne dépend que du rapport $z := \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{H}$. On s'intéresse donc à

$$f : z \in \mathbb{H} \mapsto F(z, 1) \ .$$

Le calcul préliminaire du premier paragraphe montre que l'invariance de F par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ revient exactement à dire que pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$f(gz) = F(\frac{az+b}{cz+d}, 1) = (cz+d)^k F(az+b, cz+d) = (cz+d)^k F(z, 1) = (cz+d)^k f(z) \ .$$

Ainsi, lorsque f est holomorphe sur $\mathbb{H}$ (y compris à l'infini), f *est une forme modulaire de poids* k.

Réciproquement, à une forme modulaire f de poids k, on peut associer la fonction de réseaux $F(\omega_1, \omega_2) := f(\omega_1/\omega_2)$, qui est alors une fonction de poids k. On a alors démontré le théorème suivant.

Théorème 2.8. *On a une bijection*

$$\begin{aligned} \{\textit{fonctions de réseaux de poids } k\} &\to \{\textit{fonctions faiblement modulaires de poids } k\} \\ F &\mapsto (z \in \mathbb{H} \mapsto F(z, 1)) \\ ((\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M} \mapsto \omega_2^{-k} f(\omega_1/\omega_2)) &\hookleftarrow f \end{aligned}$$

2.4 Les séries d'Eisenstein

2.4.1 Définition

Suivant Serre, nous commençons par un lemme qui est utile à plusieurs endroits.

Lemme 2.9. *Soit* Λ *un réseau de* $\mathbb{C}$ *et* $s > 2$. *Alors la série* $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^s}$ *est absolument convergente.*

Démonstration. Soit $\delta_0 > 0$ la norme du plus petit vecteur non nul de Λ et $\delta := \frac{1}{2}\min(\delta_0, 1)$. On a alors que les disques $D(\lambda, \delta)$ pour $\lambda \in \Lambda$ sont deux à deux disjoints et contiennent chacun exactement un point du réseau.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{C}_N := \{z \in \mathbb{C} \mid N \leq |z| \leq N+1\}$. Sur la figure 1, on voit que quand N tend vers $+\infty$, le bord s'applatit et une fraction au moins $\frac{1}{2} - \varepsilon$ de l'aire de $\mathbb{D}(z, \delta)$ est dans $\mathcal{C}_N$ pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier on prend N assez grand tel que pour chaque $z \in \mathcal{C}_N$, on a

$$\mathcal{A}ire(\mathcal{C}_N \cap \mathbb{D}(z, \delta)) \geq \frac{\pi\delta^2}{4} \ .$$

Comme l'aire de $\mathcal{C}_N$ vaut $\pi((N+1)^2 - N^2) = \pi(2N+1)$, il vient que

$$\mathrm{Card}(\Lambda \cap \mathcal{C}_N) = O(N) \ .$$

En sommant par paquets, la convergence absolue découle directement de la convergence absolue de $\sum_{N \geq 1} \frac{1}{N^{s-1}}$ car $s - 1 > 1$. □

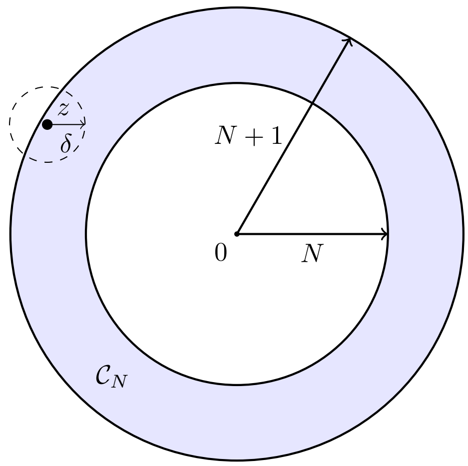

FIGURE 1 – La couronne $\mathcal{C}_N$ et un point z proche du bord extérieur

Remarque. Une autre preuve consiste en remarquer que pour $z \in \mathbb{H}$, l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to |xz + y|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ qui est donc équivalente à la norme sup. On somme alors par paquets en utilisant le fait que le nombre de couples d'entiers m, n tels que $\max(m, n) = s$ vaut $2s$ ce qui conclut.

Définition 2.10. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$ et $k \geq 4$ pair. On définit la *série d'Eisenstein*

$$G_k(\Lambda) := \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^k} \ .$$

Il est évident que c'est une fonction de réseaux de poids k. Comme dans le paragraphe précédent, on s'intéresse donc à la fonction (toujours notée G_k) définie pour tout $z \in \mathbb{H}$ par :

$$G_k(z) := \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(mz + n)^k} \ .$$

On a déjà montré dans la partie sur les réseaux que cette fonction vérifie la condition de modularité. Montrons qu'elle est holomorphe.

Proposition 2.11. *Soit $k \geq 4$ pair. La fonction G_k est une forme modulaire de poids k et on a $G_k(\infty) = 2\zeta(k)$.*

Démonstration. On montre que sur les ensembles de partie réelle bornée et partie imaginaire minorée par $\alpha > 0$, on a convergence normale, donc G_k définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$. La fonction est clairement $1-$périodique, et sur $\{-1/2 < \mathfrak{Re}(z) < 1/2\}$ la convergence uniforme permet de passer à la limite quand $\mathfrak{Im}(z) \to +\infty$. □

2.4.2 $q-$développement des séries d'Eisenstein

On commence par rappeller la formule suivante

Proposition 2.12. *On a pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,*

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) .$$

On veut réécrire le membre de gauche (qui est bien $1-$périodique) en fonction de la variable $q = e^{2i\pi z}$. On a

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = i\pi \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i\pi - \frac{2i\pi}{1-q} .$$

Remarquons que $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial q}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial q} = 2i\pi q \dfrac{\partial}{\partial q}$, ce qu'on applique $k-1$ fois à l'égalité

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = i\pi - 2i\pi \sum_{l \geq 0} q^l .$$

Il vient que

$$-\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(k-1)!}{(z-n)^k} = -(2i\pi)^k \sum_{l \geq 0} l^{k-1} q^l ,$$

puis en remplaçant z par mz, on obtient en sommant sur les $m > 0$ et les $m < 0$, qui donnent la même somme en échangeant n et $-n$, puis en ajoutant la somme pour $m = 0$ et $n \neq 0$: $\displaystyle\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k} = 2\zeta(k) + 2\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m \geq 1} \sum_{l \geq 0} l^{k-1} q^{ml}$. En appliquant Fubini on obtient alors la proposition suivante :

Proposition 2.13 ($q-$développement de G_k). *On a le $q-$développement :*

$$G_k = 2\zeta(k) + 2\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n ,$$

où on rappelle que $\sigma_\alpha(n) := \sum_{d|n} d^\alpha$.

Nous volons exprimer ce $q-$développement en faisant apparaître les nombres de Bernoulli, qui seront très utiles dans la suite du GT.

Définition 2.14. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ est développable en série entière de rayon infini. *Les nombres de Bernoulli* sont définis par

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^k .$$

On peut développer l'expression $\dfrac{\pi z}{\tan \pi z} = i\pi z + \dfrac{2i\pi z}{q-1}$ avec $x = 2i\pi z$ et en écrivant la définition des nombres de Bernoulli, on trouve :

Proposition 2.15 ($q-$développement de G_k). *On a*

$$E_k(z) := \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n .$$

3 La fonction Δ

Définition 3.1. Nous rappelons la définition de la fonction Δ et de la fonction η de Dedekind. On a

$$\eta := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$$

et

$$\Delta := \eta^{24} = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} \ .$$

Nous allons montrer dans cette partie que Δ est une forme modulaire de poids 12.

3.1 Quelques préliminaires

3.1.1 La fonction θ

Définition 3.2. Pour $t > 0$ on définit $\theta(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$.

Proposition 3.3. *On a pour tout $t > 0$,*

$$\theta\left(1/t\right) = \sqrt{t}\theta(t) \ .$$

Démonstration. Définissons pour $t > 0$ la fonction $f_t : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\pi t x^2}$. La fonction f est de Schwartz, et on a par un calcul classique $\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi y^2/t}$. D'après la formule sommatoire de Poisson, il vient alors que

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_t(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f_t}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(1/t\right)$$

. □

Remarque. Ici, on a pris la convention suivante pour la transformée de Fourier. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit pour $y \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xy} dx$$

Nous allons nous inspirer de cette équation fonctionnelle pour en démontrer une généralisation, mais tout d'abord, faisons une petite digression sur la transformée de Fourier dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

3.1.2 Transformée de Fourier dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Nous rappelons que pour $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, un caractère de G est défini en donnant l'image de 1 qui est nécessairement une racine $N-$ième de l'unité dans $\mathbb{C}$, et que réciproquement ces choix définissent les N caractères distincts

$$(\chi_k : x \mod N \mapsto e^{\frac{2ik\pi x}{N}})_{0 \leq k \leq N-1} \ .$$

On peut donc identifier le groupe G a son groupe dual $\widehat{G}$. Ceci explique la définition suivante.

Définition 3.4. Soit $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction. Sa transformée de Fourier est définie pour tout $y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ par :

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(x)e^{-\frac{2i\pi xy}{N}} \ .$$

Remarque. 1. Le facteur $\frac{1}{\sqrt{N}}$ vient simplement du fait que la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\chi_k\right)_{0\leq k\leq N-1}$ est une base orthonormée de l'espace $\mathbb{C}^G$ des applications de G dans $\mathbb{C}$ avec le produit hermitien usuel. En effet, pour $k, l \in [\![0, N-1]\!]$ on calcule la somme géométrique suivante directement

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{\frac{2ik\pi x}{N}} e^{-\frac{2il\pi x}{N}} = \sum_{x\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{\frac{2i(k-l)\pi x}{N}} = \begin{cases} N & \text{si k = l} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2. Explication plus "conceptuelle" de ce fait ?

Calculons $\widehat{\chi_k}$, ce qui sera utile pour la suite.

Lemme 3.5. *Soit* $0 \leq k \leq N-1$ *et* $\chi_k : x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \mapsto e^{\frac{2ik\pi x}{N}}$ *comme avant. Alors on a*

$$\widehat{\chi_k} = \sqrt{N}\delta_k \ .$$

où $\delta_k(y)$ *vaut* 1 *si* $y = k$ *et* 0 *sinon.*

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On a alors

$$\widehat{\chi_k}(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{\frac{2i(k-y)x\pi}{N}} = \begin{cases} \sqrt{N} & \text{si } k = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

□

3.1.3 Fonction θ généralisée

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction $N-$périodique qu'on verra de façon équivalente comme une fonction (toujours notée f), de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. On pose alors, pour $t > 0$,

$$\theta_f(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-\frac{\pi t n^2}{N}} \ .$$

Comme dans le paragraphe précédent, f vue comme une fonction $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ a une transformée de Fourier, qu'on note $\widehat{f} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Nous avons alors le lemme fondamental suivant, qu'il faut voir comme une généralisation de la proposition 3.3.

Lemme 3.6. *Pour tout* $t > 0$*, on a*

$$\theta_f\left(1/t\right) = \sqrt{t}\theta_{\widehat{f}}(t) \ .$$

Démonstration. Comme la transformée de Fourier et la somme sont linéaires, il suffit de montrer l'égalité pour $f = \chi_k$ avec $0 \leq k \leq N-1$, ce qu'on suppose dans la suite de la preuve. Soit $t > 0$.

On note alors $\varphi_t : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{2ik\pi x}{N}} e^{-\frac{\pi t x^2}{N}}$. Or on a $\widehat{e^{2i\pi\lambda\cdot} f} = \widehat{f}(\cdot - \lambda)$, donc il vient que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\varphi_t}(y) = \sqrt{\frac{N}{t}} e^{-\frac{\pi N (y-k/N)^2}{t}} = \sqrt{\frac{N}{t}} e^{-\frac{\pi (Ny-k)^2}{Nt}} .$$

On en déduit par la formule sommatoire de Poisson que

$$\theta_f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_t(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_t}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{N} e^{-\frac{\pi(Nn-k)^2}{Nt}} .$$

En faisant un changement de variable pour remplacer n par $-n$ dans la somme, on a

$$\theta_f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{N} e^{-\frac{\pi(Nn+k)^2}{Nt}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{N} \delta_k(n' + N\mathbb{Z}) e^{-\frac{\pi n'^2}{Nt}} .$$

On reconnait alors la transformée de Fourier de χ_k d'après le lemme 3.5, ce qui conclut. □

4 Modularité de Δ

Théorème 4.1. *La fonction Δ est une forme modulaire de poids 12.*

Il est clair que $\Delta(z+1) = \Delta(z)$. Il suffit donc de montrer que $\Delta(-1/z) = z^{12}\Delta(z)$. Or on sait que $\eta^{24} = \Delta$. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a

$$\eta(-1/z) = \sqrt{-iz}\, \eta(z) .$$

Ici $z \in \mathbb{H}$, donc $\mathfrak{Re}(-iz) > 0$. Comme il existe deux racines carrées holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > 0\}$, qui sont opposées l'une de l'autre, on choisit celle qui est positive sur $\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. Ceci justifie l'écriture $\sqrt{-iz}$.

De plus, l'équation fonctionnelle qu'on veut montrer est une égalité de fonctions holomorphes, donc par le principe des zéros isolés il suffit de la montrer sur une partie de $\mathbb{H}$ ayant un point d'accumulation, en particulier pour $\{it, t > 0\}$. Ceci montre que le lemme suivant suffit.

Lemme 4.2. *Pour tout $t > 0$, on a*

$$\eta\left(\frac{i}{t}\right) = \sqrt{t}\eta(it) .$$

Démonstration. Rappelons que par la formule pentagonale d'Euler (cf. séance du 18 septembre), on a

$$\eta(it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{(6n-1)^2}{24}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{-\frac{\pi t (6n-1)^2}{12}} .$$

Ceci fait penser aux fonctions theta généralisées. On définit alors la fonction $\chi : k \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv \pm 1\ [12] \\ -1 & \text{si } k \equiv \pm 5\ [12] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(qui est un caractère de Dirichlet modulo 12). Dans la somme ci-dessus, les entiers négatifs pairs (resp. impairs) donnent les restes 1 (resp. 5) modulo 12, et les entiers positifs pairs (resp. impairs) donnent les restes -1 (resp. -5) modulo 12. On voit donc facilement que

$$\eta(it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\frac{\pi t n^2}{12}} \ .$$

On peut donc utiliser le lemme 3.6. On a le fait suivant sur la fonction χ.

Fait. *On a* $\widehat{\chi} = \chi$.

Preuve du fait. Ceci découle d'un calcul direct en exprimant $\widehat{\chi}$ comme un somme de deux cosinus. Nous donnons également une preuve beaucoup plus jolie (d'un fait plus général) plus loin. □

Par le lemme 3.6, on a alors en appliquant le fait précédent :

$$\eta(it) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\frac{\pi n^2}{12t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \eta\left(\frac{i}{t}\right) \ .$$

□

Le fait qu'on démontre sur χ est un cas particulier d'une identité pour les caractères de Dirichlet modulo N.

Définition 4.3. Soit $N \geq 2$. Un *caractère de Dirichlet modulo* N est un morphisme de groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$. Un caractère modulo N est dit *non trivial* s'il est différent du caractère constant égal à 1, il est

Remarque. Si χ est un caractère de Dirichlet modulo N, on pose alors $\chi(x) = 0$ quand x n'est pas premier avec N, ce qui prolonge χ en une fonction $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Proposition 4.4. *Soit* χ *un caractère de Dirichlet non trivial prolongé par* 0 *sur les résidus non inversibles modulo* N. *Alors on a*

$$\widehat{\chi} = \widehat{\chi}(1)\bar{\chi} \ .$$

Démonstration. Soit $y \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Alors on a

$$\widehat{\chi}(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(x) e^{-\frac{2i\pi xy}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \chi(y^{-1}) \sum_{x'\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(x') e^{-\frac{2i\pi x'}{N}} = \bar{\chi}(y)\widehat{\chi}(1) \ .$$

En effet, on fait un changement de variable dans la somme, et on utilise que comme on a un morphisme d'un groupe fini, $\chi(y)$ est une racine de l'unité, en particulier $\chi(y^{-1}) = \bar{\chi}(y)$. On s'intéresse à $\widehat{\chi}(1)$, qu'on appelle *la somme de Gauss du caractère* χ. Il est classique que $|\widehat{\chi}(1)|^2 = 1$. D'après la formule de Parseval, on a alors en enlevant les termes nuls dans la somme de gauche :

$$\sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} |\chi(x)|^2 = \sum_{y\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \underbrace{|\widehat{\chi}(1)|^2}_{=1} |\bar{\chi}(y)|^2 + \sum_{y \text{ non inversible}} |\widehat{\chi}(y)|^2 \, .$$

Ainsi, tous les termes de la somme sur les y non inversibles sont nuls, ce qui termine la preuve. □

Notons que χ défini dans la preuve du théorème final est un caractère de Dirichlet réel non-trivial modulo 12 donc la proposition 4.4 s'applique.