Partiel du cours d'Algèbre 1, ENS Ulm, Mercredi 9 Novembre 2022

Aucun document n'est autorisé. Temps de composition : 2h. Il n'est pas du tout nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir le maximum des points. On soignera la rédaction.

Problème 1. *Soit $n \geq 3$ un entier. On se propose dans ce problème de montrer que tous les automorphismes du groupe S_n sont intérieurs, sauf dans le cas $n = 6$. Une suite de r transpositions $t_1, \ldots, t_r$ de S_n sera dite* alignée *si on a $t_i\, t_j = t_j\, t_i$ pour $|j - i| > 1$, et $t_i\, t_{i+1} \neq t_{i+1}\, t_i$ pour $1 \leq i < r$.*

(i) Soient t et t' deux transpositions distinctes dans S_n, de supports respectifs T et T'. Vérifier que l'on a $t\,t' \neq t'\,t$ si, et seulement si, $|T \cap T'| = 1$.

(ii) Donner un exemple d'une suite alignée de $n-1$ transpositions engendrant S_n.

(iii) On suppose que $t_1, \ldots, t_r$ est une suite alignée de r transpositions distinctes de S_n. Montrer qu'il existe $a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}$ distincts dans $\{1, \ldots, n\}$ avec $t_i = (a_i\ a_{i+1})$ pour tout $i = 1, \ldots, r$.

(iv) Soit f un automorphisme de S_n. On suppose qu'il existe une transposition t telle que $f(t)$ est une transposition. Montrer que pour toute transposition s, alors $f(s)$ est une transposition.

(v) (suite) Montrer que f est un automorphisme intérieur.

On rappelle que le centralisateur d'un élément $\sigma \in \mathrm{S}_n$ est le sous-groupe $\mathrm{C}(\sigma) = \{\tau \in \mathrm{S}_n \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.

(vi) On suppose que $t \in \mathrm{S}_n$ est une transposition. Montrer $\mathrm{C}(t) \simeq \mathrm{S}_2 \times \mathrm{S}_{n-2}$.

(vii) Soit $s \in \mathrm{S}_n$ un élément d'ordre 2. Montrer qu'il existe un unique entier $1 \leq k \leq n/2$, tel que s est produit de k transpositions $s_1, \ldots, s_k$ à supports disjoints.

(viii) (suite) Soit $D = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$. Montrer que D est un sous-groupe de $\mathrm{C}(s)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

(ix) (suite) Montrer que D est distingué dans $\mathrm{C}(s)$.

(x) On suppose $n = 4$ et $s = (a\,b)(c\,d)$ avec $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer $|\mathrm{C}(s)| > 4$.

(xi) On suppose que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{S}_m$ a un sous-groupe distingué isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ avec $k \geq 2$ et $m \geq 3$. Montrer $m = 4$. On pourra considérer la projection naturelle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{S}_m \to \mathrm{S}_m$.

(xii) En déduire que pour $n \neq 6$, tout automorphisme de S_n est intérieur.

Dans les trois questions suivantes, on étudie le cas $n = 6$.

(xiii) Montrer qu'il existe un sous-groupe H de S_6 qui est isomorphe à S_5, et dont l'action naturelle sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$ est transitive.

(xiv) (suite) En considérant l'action par translations de S_6 sur l'ensemble S_6/H, montrer qu'il existe un isomorphisme $f : \mathrm{S}_6 \to \mathrm{S}_6$ vérifiant $f(H) \subset \{\sigma \in \mathrm{S}_6 \mid \sigma(1) = 1\}$.

(xv) (suite) Montrer que f n'est pas intérieur.

On note $\mathrm{Int}\,\mathrm{S}_n \subset \mathrm{Aut}\,\mathrm{S}_n$ le sous-ensemble des automorphismes intérieurs. Pour $k = 1, 2, 3$ on note aussi T_k le sous-ensemble de S_6 constitué des produits de k transpositions à supports disjoints.

(xvi) *Montrer que* $\mathrm{Int}\,\mathrm{S}_n$ *est un sous-groupe distingué de* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{S}_n$*, et qu'il est isomorphe à* S_n*.*

(xvii) *Déterminer* $|T_k|$ *pour* $k = 1$*,* 2 *et* 3*.*

(xviii) *En déduire que pour* $f \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{S}_6$ *non intérieur on a* $f(T_2) = T_2$*,* $f(T_1) = T_3$ *et* $f(T_3) = T_1$*.*

(xix) *Démontrer* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{S}_6/\mathrm{Int}\,\mathrm{S}_6 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*.*

Problème 2. *Soit* p *un nombre premier impair. On se propose de classifier, à isomorphisme près, les groupes d'ordre* $4p$*. On commence par quelques questions préliminaires.*

(i) *Déterminer, à isomorphisme près, les groupes abéliens d'ordre* $4p$*.*

(ii) *Montrer que tout groupe d'ordre* 4 *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *ou à* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*.*

(iii) *Soient* G *un groupe d'ordre* mn *avec* $(m, n) = 1$ *et* N *un sous-groupe distingué de* G *d'ordre* n*. Montrer que* N *est l'unique sous-groupe de* G *d'ordre* n*. On pourra considérer la projection canonique* $G \to G/N$*.*

(iv) *Montrer que tout groupe d'ordre* $2p$ *contient un unique sous-groupe d'ordre* p*.*

Dans les questions (v) à (viii) qui suivent, on suppose que G *est un groupe d'ordre* $4p$ *ne possèdant pas de sous-groupe distingué d'ordre* p*. On veut montrer* $p = 3$ *et* $G \simeq \mathrm{A}_4$*. Pour cela, on fixe* $x \in G$ *d'ordre* p *(on justifiera son existence) et on note* $C \subset G$ *la classe de conjugaison de* x*.*

(v) *Montrer* $|C| \neq 1$ *et* $|C| \mid 4$*.*

(vi) *Montrer que* G *ne possède pas de sous-groupe d'ordre* $2p$*.*

(vii) *En déduire* $|C| = 4$ *et que l'action de* G *par conjugaison sur* C *est fidèle.*

(viii) *Conclure.*

On suppose désormais que G *est un groupe non abélien d'ordre* $4p$*, et que* P *est un sous-groupe distingué d'ordre* p *de* G*. On fixe aussi un sous-groupe* Q *de* G *d'ordre* 4 *(on justifiera son existence).*

(ix) *Montrer que* Q *est un complément de* P *et que* $Q \to \mathrm{Aut}(P), q \mapsto (\mathrm{int}_q)_{|P}$*, est un morphisme de groupes bien défini et non trivial.*

(x) *Soit* V *un groupe abélien* 2*-élémentaire d'ordre* 4*,* C *un groupe cyclique, et* $f : V \to C$ *un morphisme de groupes. Montrer qu'il existe une base* v, w *de* $V^\sharp$ *avec* $f(v) = 1$*.*

(xi) *On suppose* $Q \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*. Montrer que l'on a* $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H$ *pour un certain groupe* H*, puis que l'on a un isomorphisme* $H \simeq \mathrm{D}_{2p}$*.*

On suppose finalement $Q \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*, et dans les questions (xii) à (xiv) on suppose en outre* $p \equiv 3 \bmod 4$*.*

(xii) *Montrer qu'il existe un unique morphisme non trivial* $\alpha : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$*.*

(xiii) *Montrer* $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*.*

(xiv) *En déduire que tout groupe non abélien d'ordre* $4p$ *est isomorphe à un, et un seul, des groupes*

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{D}_{2p}, \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathrm{A}_4 \ (\text{cas } p = 3).$$

(xv) *On suppose enfin* $p \equiv 1 \bmod 4$*. Comment la classification du (xiv) est-elle modifiée ?*

(xvi) *(Bonus) Lequel des groupes ci-dessus est isomorphe à* D_{4p} *?*