Partiel du cours d'Algèbre 1, ENS Ulm, Mercredi 10 Novembre 2021

Aucun document n'est autorisé. Temps de composition : 2h. Il n'est pas du tout nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir le maximum des points. On soignera la rédaction.

Problème 1. *On s'intéresse aux actions transitives de* S_4 *sur un ensemble à 6 éléments. On note* X *l'ensemble des parties à 2 éléments de* $\{1,2,3,4\}$*, et* Y *l'ensemble des 4-cycles dans* S_4*.*

(i) *Montrer* $|X| = |Y| = 6$.

(ii) *Montrer que l'action naturelle de* S_4 *sur* X *est transitive. Pour* $i \neq j$ *dans* $\{1,2,3,4\}$*, lister les éléments du stabilisateur de l'élément* $\{i,j\}$ *de* X*.*

(iii) *Montrer que l'action par conjugaison de* S_4 *sur* Y *est transitive, puis que le stabilisateur d'un 4-cycle* $c \in Y$ *est* $\langle c \rangle$ *(le sous-groupe engendré par* c*).*

(iv) *Montrer que ces actions de* S_4 *sur* X *et* Y *sont fidèles.*

(v) *Montrer qu'il existe une action transitive de* S_3 *sur un ensemble* Z *à 6 éléments, et décrire ses stabilisateurs.*

(vi) *(suite) En déduire une action transitive de* S_4 *sur* Z*, dont les stabilisateurs sont tous égaux au sous-groupe* K_4 *de* S_4*.*

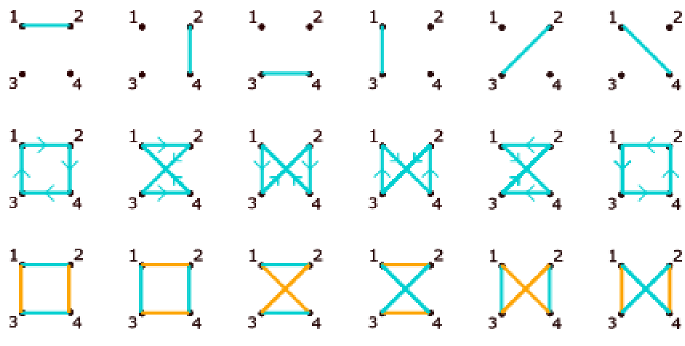
(vii) *Rappeler pourquoi tout groupe d'ordre 4 est isomorphe à* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *ou à* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*.*

(viii) *Déterminer le commutant dans* S_4 *(ou « centralisateur ») de la transposition* $(i\,j)$*.*

(ix) *Soit* $H \subset \mathrm{S}_4$ *un sous-groupe d'ordre 4. Montrer que soit* H *est le stabilisateur d'un point de* X*, soit* H *est le stabilisateur d'un point de* Y*, soit* H *est le sous-groupe* K_4 *de* S_4*.*

(x) *En déduire qu'à isomorphisme près, il existe exactement 3 actions transitives de* S_4 *sur des ensembles à 6 éléments.*

(xi) *Faire correspondre ces trois actions aux dessins ci-dessous.*



(xii) *(Bonus) Identifions* S_4 *au sous-groupe de* S_5 *fixant l'élément 5. Est-ce que la restriction à* S_4 *de l'action exotique de* S_5 *est transitive ? Si oui, l'identifier à l'une des 3 actions ci-dessus.*

Les terminologies suivantes seront utilisées dans les problèmes ci-dessous. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On dira que H est *strict* si on a $H \neq G$. On dira que H est *maximal* s'il est strict, et si les seuls sous-groupes de G contenant H sont G et H. Dans un groupe fini, tout sous-groupe strict est inclus dans un sous-groupe maximal (pourquoi ?). On rappelle enfin les notations $\mathrm{N}_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ (le *normalisateur de* H *dans* G) et $\mathrm{Z}(G) = \{h \in G \mid hg = gh,\ \forall g \in G\}$ (le *centre de* G).

Problème 2. (Non simplicité d'un groupe non abélien minimal) *Soit G un groupe fini non abélien dont tous les sous-groupes stricts sont abéliens. On se propose de montrer que G n'est pas simple.*

On suppose par l'absurde que G est simple. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-groupes maximaux de G.

(i) Soient A et B deux sous-groupes stricts de G, montrer que $\mathrm{N}_G(A \cap B)$ contient A et B.

(ii) En déduire que pour $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \neq B$, on a $A \cap B = \{1\}$.

(iii) Montrer que $(g, A) \mapsto gAg^{-1}$ définit une action de G sur $\mathcal{M}$.

(iv) Montrer que l'orbite de $A \in \mathcal{M}$ est de cardinal $|G|/|A|$.

(v) Pour $A \in \mathcal{M}$, on pose $\mathcal{C}(A) = \bigcup_{g \in G} gAg^{-1}$. Montrer $|\mathcal{C}(A)| = 1 + \frac{|G|}{|A|}(|A| - 1)$.

(vi) (suite) En déduire $1 + \frac{|G|}{2} \leq |\mathcal{C}(A)| < |G|$.

(vii) Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}$, avec B non inclus dans $\mathcal{C}(A)$, on a $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \{1\}$.

(viii) Conclure.

Problème 3. *Soit $n \geq 1$ un entier. On se propose de démontrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :* (a) *tout groupe d'ordre n est cyclique,* (b) *n est premier à son indicatrice d'Euler $\varphi(n)$.*

(i) Montrer que l'on a $(n, \varphi(n)) = 1$ si, et seulement si, n est un produit de nombres premiers distincts $p_1, \ldots, p_r$ avec $p_i \nmid p_j - 1$ pour $i \neq j$.

(ii) On suppose $p^2 \mid n$ avec p premier. Montrer qu'il existe un groupe non cyclique d'ordre n.

(iii) Soient p et q premiers avec $p \mid q - 1$. Montrer qu'il existe un morphisme non trivial $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

(iv) (suite) En déduire qu'il existe un groupe non abélien d'ordre pq.

(v) (suite) En déduire que pour tout $r \geq 1$, il existe un groupe non abélien d'ordre pqr.

(vi) Démontrer (a) $\implies$ (b).

(vii) Montrer qu'un groupe abélien d'ordre $p_1 p_2 \cdots p_r$, avec les p_i premiers distincts, est cyclique.

(viii) Soit f un morphisme entre deux groupes finis de cardinaux premiers entre eux. Montrer que f est le morphisme trivial.

On va montrer (b) $\implies$ (a) par récurrence sur n. On suppose donc $(n, \varphi(n)) = 1$, et que tout groupe d'ordre $d < n$, avec $(d, \varphi(d)) = 1$, est cyclique. Soit G un groupe fini d'ordre n.

(ix) Montrer que soit G n'est pas simple, soit G est abélien (utiliser le résultat du Problème 2).

(x) Soit H un sous-groupe distingué strict de G. En considérant un morphisme $G \to \mathrm{Aut}(H)$ approprié, montrer $H \subset \mathrm{Z}(G)$.

(xi) En déduire que $G/\mathrm{Z}(G)$ est cyclique.

(xii) Démontrer (b) $\implies$ (a).

(xiii) (Application) *Montrer qu'un groupe d'ordre* 255 *est cyclique.*

(xiv) (Devinette) *Quels sont les entiers n tels que tout groupe d'ordre n est abélien ?*