9. Exercices

Commençons par quelques exercices sur les p-groupes. Dans tous ces exercices, p est un nombre premier. On montre d'abord que les p-groupes satisfont une forme forte de réciproque au théorème de Lagrange.

EXERCICE 6.1. *Soit P un p-groupe de cardinal p^n avec $n \geqslant 1$.*

(i) Montrer que P a un sous-groupe distingué d'ordre p.

(ii) Montrer que pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant n$, il existe un sous-groupe distingué $P_i \subset P$ d'ordre p^i, et que l'on peut même supposer $P_i \subset P_{i+1}$ pour $0 \leqslant i < n$.

D'après le Lemme de Ore (Exercice 4.22 Chap. 4), tout sous-groupe d'indice p d'un p-groupe est distingué. On peut aussi déduire ce fait du résultat plus fort suivant.

EXERCICE 6.2. *(i) Montrer que les sous-groupes maximaux*[6] *d'un p-groupe sont distingués et d'indice p.*

(ii) Donner un exemple de p-groupe ayant un sous-groupe d'indice p^2 non distingué.

EXERCICE 6.3. *Soient k un corps, $n \geqslant 1$ un entier, $\mathrm{T}_n(k)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_n(k)$, et $\mathrm{U}_n(k) \subset \mathrm{T}_n(k)$ le sous-groupe des éléments de coefficients diagonaux égaux à 1.*

(i) Montrer que le normalisateur de $\mathrm{U}_n(k)$ dans $\mathrm{GL}_n(k)$ est $\mathrm{T}_n(k)$.

(ii) Montrer que $\mathrm{T}_n(k)$ est égal à son normalisateur dans $\mathrm{GL}_n(k)$.

Dans les trois exercices suivants, on classifie les groupes non abéliens d'ordre p^3.

EXERCICE 6.4. *Soit G un p-groupe non abélien d'ordre p^3 et d'exposant p. On se propose de montrer $G \simeq \mathrm{U}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.*

(i) Montrer que G possède un sous-groupe distingué isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(ii) Montrer que tout élément d'ordre p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est conjugué à

$$t := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) En déduire $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où φ envoie le générateur $\overline{1}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'élément t de $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

(iv) Conclure.

EXERCICE 6.5. *Soit G un p-groupe non abélien d'ordre p^3 et d'exposant $> p$, avec $p \neq 2$.*

(i) Montrer que G a un sous-groupe distingué H cyclique et d'ordre p^2.

(ii) En déduire qu'il existe $g \in G \smallsetminus H$ tel que $ghg^{-1} = h^{1+p}$ pour tout $h \in H$.

(iii) En déduire qu'il existe $h \in H$ tel que hg est d'ordre p.

6. On rappelle qu'un sous-groupe $M \subset G$ est dit maximal si on a $M \neq G$ et si le seul sous-groupe de G contenant M est G. Il est clair qu'un sous-groupe d'indice premier est maximal, par Lagrange.

(iv) Montrer $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*, où* φ *envoie le générateur* $\overline{1}$ *de* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *sur l'automorphisme* $x \mapsto (1+p)x$ *de* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$*.*

EXERCICE 6.6. *Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre* p^3*.*

EXERCICE 6.7. *Soit* G *un groupe fini tel que l'action naturelle de* $\mathrm{Aut}(G)$ *sur* $G \smallsetminus \{1\}$ *est transitive. On se propose de montrer que* G *est abélien* p*-élémentaire.*

(i) Montrer que les éléments non triviaux de G *un même ordre premier, noté* p*.*
(ii) Montrer que G *est un* p*-groupe abélien.*
(iii) Conclure et discuter la réciproque.

On donne maintenant quelques exercices sur les p-Sylow.

EXERCICE 6.8. *Soient* $n \geqslant 3$ *et* S *un* p*-Sylow de* D_{2n} *avec* $p \mid 2n$*.*

(i) On suppose $p \neq 2$*. Montrer que* S *est cyclique.*
(ii) On suppose $p = 2$*. Montrer* $S \simeq \mathrm{D}_{2^k}$ *pour un certain entier* $k \geqslant 1$*.*

EXERCICE 6.9. *Soient* $n \geqslant 1$ *un entier et* p *un nombre premier.*

(i) On suppose $n < p^2$*. Exhiber un* p*-Sylow de* S_n*.*
(ii) On suppose $p \nmid n+1$*. Montrer que* S_n *et* S_{n+1} *ont des* p*-Sylow isomorphes.*

EXERCICE 6.10. *Déterminer, à isomorphisme près, les sous-groupes de Sylow de* S_n *pour* $n \leqslant 8$*.*

EXERCICE 6.11. *Soient* p *premier et* S *un* p*-Sylow de* S_{p^2}*. Montrer que l'on a*

$$S \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

où φ *envoie le générateur* $\overline{1}$ *de* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *sur la permutation circulaire* $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_2, \ldots, x_p, x_1)$ *de* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^p$*.*

Dans l'exercice qui suit on s'intéresse aux sous-groupes de Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ avec q premier. On sait que l'on a $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})| = q(q-1)^2(q+1)$. On a vu aussi qu'un q-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est $\mathrm{U}_2(q) \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

EXERCICE 6.12. (Sous-groupes de Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$) *Soient* p, q *des nombres premiers distincts et* S *un* p*-Sylow de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$*. On cherche à déterminer la classe d'isomorphisme de* S*. On pose* $\alpha = \mathrm{v}_p(q-1)$ *et* $\beta = \mathrm{v}_p(q+1)$*.*

(i) On suppose $p \mid q-1$ *et* $p > 2$*. Montrer* $S \simeq \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$*.*
(ii) On suppose $p \mid q+1$ *et* $p > 2$*. Montrer* $S \simeq \mathbb{Z}/p^\beta\mathbb{Z}$*.*
(iii) On suppose $p = 2$*. Montrer que l'on a soit* $\alpha = 1$ *et* $\mathrm{S} \simeq \mathrm{D}_{2^{\beta+2}}$*, soit* $\beta = 1$ *et* $\mathrm{S} \simeq (\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *avec* $\varphi_{\overline{1}}(x, y) = (y, x)$*.*

EXERCICE 6.13. *Soit* G *un groupe d'ordre* $p^\alpha n$ *avec* $p \wedge n = 1$ *et* $\alpha \geqslant 1$*.*

(i) Montrer $\binom{|G|}{p^\alpha} \not\equiv 0 \bmod p$*.*

(ii) En considérant l'action de G par translations sur l'ensemble de ses parties à p^α éléments, re-démontrer que G possède un p-Sylow.

EXERCICE 6.14. *Soient G un groupe fini et p un nombre premier. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{N}_p(G)$ des p-sous-groupes de G qui sont distingués dans G.*

(i) Monter que $\mathcal{N}_p(G)$ a un plus grand élément pour l'inclusion, noté $\mathrm{O}_p(G)$.

(ii) Montrer que $\mathrm{O}_p(G)$ est l'intersection des p-Sylow de G.

(iii) Soit $G' := G/\mathrm{O}_p(G)$. Montrer $\mathrm{O}_p(G') = 1$.

EXERCICE 6.15. (Fusion) *Soient G un groupe fini et P un p-Sylow de G.*

(i) Montrer $\mathrm{N}_G(\mathrm{N}_G(P)) = \mathrm{N}_G(P)$.

(ii) Montrer que deux éléments de $\mathrm{C}_G(P)$ conjugués dans G sont conjugués dans $\mathrm{N}_G(P)$ (Burnside).

On donne maintenant quelques applications des théorèmes de Sylow à la classification des groupes de petit cardinal, ou plus généralement ayant peu de diviseurs premiers.

EXERCICE 6.16. *On se propose de classifier à isomorphisme près les groupes G d'ordre pq avec $p < q$ premiers. Soit G un tel groupe.*

(i) Montrer que G possède un sous-groupe distingué $\simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

(ii) On suppose $q \not\equiv 1 \bmod p$. Montrer $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

On suppose désormais $q \equiv 1 \bmod p$. On fixe $\zeta \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ d'ordre p (justifier) et on pose $G_\zeta = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où φ envoie le générateur $\overline{1}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'automorphisme $x \mapsto \zeta x$ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

(iii) Montrer que l'on a, exclusivement, soit $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, soit $G \simeq G_\zeta$.

Dans l'exercice suivant, on introduit un argument de comptage classique qui, combiné aux théorèmes de Sylow, permet dans des cas favorables de montrer qu'un groupe d'ordre donné n'est pas simple.

EXERCICE 6.17. *Soit G un groupe d'ordre pm avec p premier et $(p, m) = 1$.*

(i) Montrer que G possède exactement $\mathrm{n}_p(G)(p-1)$ éléments d'ordre p.

(ii) On suppose $\mathrm{n}_p(G) = m$ et que m est une puissance d'un nombre premier q. Montrer $\mathrm{n}_q(G) = 1$.

(iii) (Application 1) *On suppose $|G| = pq^2$, avec q premier $\neq p$. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.*

(iv) (Application 2) *On suppose $|G| = pqr$, avec p, q, r premiers distincts. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.*

EXERCICE 6.18. *Soit G un groupe tel que $|G|$ est produit d'au plus 3 nombres premiers (pas nécessairement distincts). Montrer que :*

(i) soit G est cyclique d'ordre premier, soit G n'est pas simple,

(ii) G est résoluble.

EXERCICE 6.19. *Soit G un groupe simple fini.*

(i) On suppose que G admet un sous-groupe d'indice $n > 1$. Montrer $|G| \mid n!$.
(ii) Soit p premier divisant $|G|$. Montrer que l'on a soit $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, soit $|G|$ divise $\mathrm{n}_p(G)!$.

EXERCICE 6.20. (Groupes simples non abéliens d'ordre $\leqslant 60$) *Soit G un groupe simple non abélien d'ordre $\leqslant 60$. On se propose de montrer $|G| = 60$, et donc $G \simeq \mathrm{A}_5$ par un exemple du cours.*

(i) En utilisant l'Exercice 6.18, montrer $|G| \in \{24, 36, 40, 48, 54, 56, 60\}$.
(ii) En utilisant l'Exercice 6.19, montrer $|G| \in \{56, 60\}$.
(iii) Conclure.

EXERCICE 6.21. *Montrer qu'à isomorphisme près il existe exactement 3 groupes non abéliens d'ordre 12, à savoir*

$$\mathrm{A}_4,\ \widetilde{\mathrm{D}_6} \text{ et } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{S}_3.$$

On pourra utiliser l'Exercice 6.17. Lequel d'entre eux est-il isomorphe à D_{12} ?

L'exercice suivant, plus technique, généralise le précédent et classifie à isomorphisme près les groupes d'ordre pq^2 avec p, q des premiers distincts. Nous renvoyons aussi au problème 2 du partiel 2022-2023 §2 App. B pour le cas particulier $q = 2$.

EXERCICE 6.22. (Groupes d'ordre pq^2) *Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $\mathrm{a}(p, q)$, $\mathrm{b}(p, q)$ et $\mathrm{c}(p, q)$ les nombres de classes d'isomorphisme de groupes non abéliens d'ordre pq^2 possédant respectivement un p-Sylow distingué, un q-Sylow cyclique distingué et un q-Sylow non cyclique distingué.*

(i) Montrer qu'à isomorphisme près, il y a exactement $\mathrm{a}(p, b) + \mathrm{b}(p, q) + \mathrm{c}(p, q)$ groupes non abéliens d'ordre pq^2.
(ii) Montrer que $\mathrm{a}(p, q)$ vaut 2 pour $p \equiv 1 \bmod q$, et 0 sinon.
(iii) Montrer que $\mathrm{b}(p, q)$ vaut 1 pour $q \equiv 1 \bmod p$, et 0 sinon.
(iv) Montrer que $\mathrm{c}(p, q)$ est le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes d'ordre p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.
(v) En déduire $\mathrm{c}(p, q)$ pour $p = 2$ ou $q = 2$.
(vi) On suppose $p, q > 2$. Montrer $\mathrm{c}(p, q) = 1$ pour $q \equiv -1 \bmod p$, $\mathrm{c}(p, q) = \frac{p+3}{2}$ pour $q \equiv 1 \bmod p$, et $\mathrm{c}(p, q) = 0$ sinon.
(vii) Expliquer et justifier la Table 1.

Dans l'exercice suivant, on s'intéresse aux classes d'isomorphisme de groupes d'ordre pqr avec p, q, r premiers distincts. D'après l'Exercice 6.17 (iv), un tel groupe possède toujours un sous-groupe de Sylow distingué.

EXERCICE 6.23. (Groupes d'ordre pqr) *Soient $p < q < r$ des nombres premiers et G un groupe d'ordre pqr.*

(i) On suppose G abélien. Montrer $G \simeq \mathbb{Z}/pqr\mathbb{Z}$.

Sylow distingué	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$
Groupe	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$	$\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \rtimes H$, avec $H \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$
Condition	$q \mid p-1$	$q \mid p-1$	$p \mid q-1$	$p \mid q^2-1$
$\sharp$	1	1	1	$\frac{p+3}{2}$ si $p, q > 2$, 2 si $p = 2$ et 1 si $q = 2$.

Table 1. Les groupes non abéliens d'ordre pq^2 avec $p \neq q$ premiers

(ii) Montrer que tout groupe d'ordre pr ou qr possède un r-Sylow distingué.

(iii) Montrer que G possède un r-Sylow distingué R et un sous-groupe K d'ordre pq tels que $G = RK$.

(iv) Montrer que les classes d'isomorphisme de groupes non abéliens d'ordre pqr sont décrites par la table 2 ci-contre.

$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \rtimes_p \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \rtimes_q \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \rtimes_{pq} \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$
$p \mid q-1$	$p \mid q-1$ et $p \mid r-1$	$p \mid r-1$	$q \mid r-1$	$pq \mid r-1$

Table 2. Les groupes non abéliens d'ordre pqr avec $p < q < r$ premiers

La Table 3 liste les entiers $n \leqslant 64$ tels qu'il existe un groupe non abélien d'ordre n, et donne le nombre $\mathrm{N}(n)$ de classes d'isomorphismes de tels groupes. On rappelle que les entiers n tels que tout groupe d'ordre n est abélien sont classifiés par le Théorème de Dickson (Corollaire 7.6).

n	6	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24	26	27	28	30	32	34	36
$\mathrm{N}(n)$	1	2	1	3	1	9	3	3	1	1	12	1	2	2	3	44	1	10
n	38	39	40	42	44	46	48	50	52	54	55	56	57	58	60	62	63	64
$\mathrm{N}(n)$	1	1	11	5	2	1	47	3	3	12	1	10	1	1	11	1	2	256

Table 3. Pour $n \leqslant 64$, le nombre $\mathrm{N}(n)$ de classes d'isomorphisme de groupes non abéliens d'ordre n, quand il est non nul, suivant OEIS A060689.

Exercice 6.24. *Vérifier les valeurs $\leqslant 5$ de la Table 3.*

La série d'exercices suivante porte sur la notion de *morphisme de transfert*. On rappelle que l'*abélianisé* d'un groupe G est le groupe abélien quotient $G_{\mathrm{ab}} := G/\mathrm{D}(G)$. Les exercices 6.25, 6.26, 6.28 et 6.29 sont inspirés de la présentation de Serre dans [**Ser78**].

Exercice 6.25. (Le transfert, suivant Schur) *Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini de G. On pose $X = G/H$ et on choisit d'abord, pour tout $x \in X$, un représentant $\widetilde{x}$ de x dans G. Le groupe G agit par translations sur X. Pour $g \in G$, et $x \in X$, on note $h_{g,x}$ l'unique élément de H vérifiant $g\,\widetilde{x} = \widetilde{gx}\,h_{g,x}$, et on pose*

$$\mathrm{Ver}(g) := \prod_{x \in X} h_{g,x} \mod \mathrm{D}(H).$$

Cela définit une application $\mathrm{Ver} : G \to H_{\mathrm{ab}}$ (de l'allemand *Verlagerung*).

(i) Soit $x \mapsto \widehat{x}$ un autre système de représentants de X. Pour $x \in X$ on note h_x l'unique élément de H tel que $\widehat{x} = \widetilde{x}\,h_x$. Pour $g \in G$ et $x \in X$, on définit aussi $h'_{g,x} \in H$ par $g\,\widehat{x} = \widehat{gx}\,h'_{g,x}$. Montrer $h'_{g,x} = h_{gx}^{-1}\,h_{g,x}\,h_x$.

(ii) (suite) En déduire que $\mathrm{Ver}(g)$ *ne dépend pas du choix de $x \mapsto \widetilde{x}$.*

(iii) Montrer que pour $g, g' \in G$ on a $h_{gg',x} = h_{g,g'x}\,h_{g',x}$.

(iv) En déduire que Ver *est un morphisme de groupes $G \to H_{\mathrm{ab}}$.*

On appelle aussi *transfert* le morphisme $G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$ qui se déduit du (iv).

Exercice 6.26. (Restriction et transfert) *Soient G un groupe, H un sous-groupe d'indice fini,* $\mathrm{Ver} : G \to H_{\mathrm{ab}}$ *le morphisme de transfert, et* $\mathrm{Res} : H_{\mathrm{ab}} \to G_{\mathrm{ab}}$ *le morphisme naturel $h\mathrm{D}(H) \mapsto h\mathrm{D}(G)$.*

(i) Soit $g \in G$. Pour chaque orbite Ω_i de $\langle g \rangle$ agissant sur G/H, on choisit un représentant g_iH de Ω_i et on pose $n_i = |\Omega_i|$. Montrer

$$g_i^{-1} g^{n_i} g_i \in H \ \text{ et } \ \mathrm{Ver}(g) \equiv \prod_i g_i^{-1} g^{n_i} g_i \mod \mathrm{D}(H).$$

(ii) En déduire que $\mathrm{Res} \circ \mathrm{Ver} : G_{\mathrm{ab}} \to G_{\mathrm{ab}}$ *est le morphisme $g \mapsto g^{|G/H|}$.*

(iii) On suppose G abélien. Montrer que l'on a $\mathrm{Ver} : G \to H, g \mapsto g^{|G/H|}$.

Exercice 6.27. (Transfert de S_{n+1} à S_n) *Dans cet exercice, on identifie S_n au sous-groupe de S_{n+1} fixant $n+1$. On suppose $n \geqslant 2$.*

(i) Montrer $(\mathrm{S}_n)_{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(ii) Montrer que $\mathrm{Res} : (\mathrm{S}_n)_{\mathrm{ab}} \to (\mathrm{S}_{n+1})_{\mathrm{ab}}$ *est un isomorphisme.*

(iii) Montrer que $\mathrm{Ver} : (\mathrm{S}_{n+1})_{\mathrm{ab}} \to (\mathrm{S}_n)_{\mathrm{ab}}$ *est un isomorphisme si n est pair, le morphisme nul si n est impair.*

Exercice 6.28. (Théorème du complément de Burnside) *Soient G un groupe fini et P un p-Sylow de G. On suppose que P est dans le centre de son normalisateur $\mathrm{N}_G(P)$ (en particulier, P est abélien). On va montrer que P admet un complément distingué dans G (Burnside).*

(i) Soient $g \in P$, $h \in G$, ainsi que n le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $h^{-1}g^n h \in P$. Montrer $h^{-1}g^n h = g^n$ (utiliser le (ii) de l'Exercice 6.15).

(ii) En déduire que $\mathrm{Ver} : G \to P$ *vérifie* $\mathrm{Ver}(g) = g^{|G/P|}$ *pour tout $g \in P$.*

(iii) Conclure en considérant $\ker \mathrm{Ver}$.

EXERCICE 6.29. (Quelques conséquences du théorème de Burnside) *Soient G un groupe fini, p le plus petit facteur premier de $|G|$ et P un p-Sylow de G.*

(i) On suppose P cyclique. Montrer que P admet un complément distingué.

(ii) On suppose $P \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Montrer que soit P admet un complément distingué, soit $p = 2$ et $|G| \equiv 0 \bmod 3$.

(iii) En déduire que si G est simple non abélien on a soit $p^3 \mid |G|$, soit $12 \mid |G|$.

On donne maintenant quelques exercices sur la cohomologie des groupes.

EXERCICE 6.30. *Soient G un groupe fini et A un G-module. On pose*

$$A^G = \{a \in A \mid g.a = a \ \forall g \in G\},$$

et on considère l'application norme : $\mathrm{N} : A \to A,\ a \mapsto \sum_{g\in G} g.a$.

(i) Montrer que A^G et $N(A)$ sont des sous-groupes de A avec $N(A) \subset A^G$.

On note $\mathrm{Q}(A)$ le groupe abélien quotient $A^G/N(A)$.

(ii) On suppose que G agit trivialement sur A. Déterminer $\mathrm{Q}(A)$.

(iii) On suppose que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit non trivialement $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Montrer $\mathrm{Q}(A) = 0$ pour $p > 2$, et $\mathrm{Q}(A) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $p = 2$.

(iv) On suppose que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit non trivialement sur $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer $\mathrm{Q}(A) = 0$ pour $p > 2$, et $\mathrm{Q}(A) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $p = 2$.

EXERCICE 6.31. *Soient $n \geqslant 1$ un entier, $G = \langle \tau \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n et A un G-module. On considère une suite exacte courte (ou extension)*

$$(E) \qquad 1 \to A \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1. \tag{56}$$

On pose $X = \pi^{-1}(\{\tau\}) = \{g \in \widetilde{G} \mid \pi(g) = \tau\}$.

(i) Montrer que pour tout $g \in X$ on a $g^n \in i(A^G)$.

(ii) Montrer que l'élément $i^{-1}(g^n) \bmod N(A)$ ne dépend pas du choix de $g \in X$.

(iii) (suite) Montrer cet élément de $\mathrm{Q}(A)$ est nul $\iff$ (E) est scindée.

(iv) En déduire que si $\mathrm{Q}(A) = 0$ alors $\mathrm{H}^2(G, A) = 0$.

(v) (Application 1) Montrer que pour $p > 2$, toute extension de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ induisant une action non triviale sur ce dernier est scindée. (Comparer avec l'Exercice 6.4.)

(vi) (Application 2) Soit G un groupe cyclique agissant trivialement sur $\mathbb{C}^\times$. Montrer $\mathrm{H}^2(G, \mathbb{C}^\times) = 0$ (Schur).

(vii) Montrer que pour G cyclique on a un isomorphisme $\mathrm{Q}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(G, A)$.

EXERCICE 6.32. *Soient G un groupe et A un G-module. On se donne $E_1 = (\widetilde{G}_1, i_1, \pi_1)$ et $E_2 = (\widetilde{G}_2, i_2, \pi_2)$ deux extensions de G par le G-module A et on se propose de définir leur somme de Baer $E_1 + E_2$. On pose*

$$\Gamma = \{(g_1, g_2) \in \widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2 \mid \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)\} \text{ et } Z = \{(i_1(a), -i_2(a)) \mid a \in A\}.$$

(i) Vérifier que Γ est un sous-groupe de $\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2$ et que $\pi : \Gamma \to G, (g_1, g_2) \mapsto \pi_1(g_1)$ $(= \pi_2(g_1))$ est un morphisme surjectif de noyau $i_1(A) \times i_2(A)$.

(ii) Vérifier que Z est un sous-groupe distingué de Γ inclus dans $\ker\pi$.

(iii) On pose $\widetilde{G} = \Gamma/Z$ *et* $i : A \to \widetilde{G}, a \mapsto \overline{(i_1(a), 0)}$ $(= \overline{(0, i_2(a))})$. *Montrer que*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } \widetilde{G} \xrightarrow{\ \pi\ } G \longrightarrow 1.$$

est une extension de G par le G-module A. On la note $E_1 + E_2$.

(iv) Soit s_1, s_2 des sections de π_1, π_2. Vérifier que $s(g) = (s_1(g), s_2(g))$ est une section de π et que l'on a $\mathrm{Ob}(s) = \mathrm{Ob}(s_1) + \mathrm{Ob}(s_2)$.

(v) En déduire $[E_1 + E_2] = [E_1] + [E_2]$, puis que si on a E_1, E_2, E_1', E_2' des extensions de G par A, avec[7] *$E_1 \simeq E_1'$ et $E_2 \simeq E_2'$, on a $E_1 + E_2 \simeq E_1' + E_2'$.*

(vi) En déduire que l'application $+$ induit une loi de groupe abélien sur $\mathscr{E}(G, A)$ et que $E \mapsto [E]$ est un isomorphisme entre ce groupe et $\mathrm{H}^2(G, A)$

EXERCICE 6.33. *Soient G un groupe et G un A-module. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathrm{C}^n(G, A)$ l'ensemble des fonctions $G^n \to A$ (n*-cochaines de G à valeurs dans A*), avec la convention $\mathrm{C}^0(G, A) = A$. C'est un groupe abélien pour l'addition induite par celle de A. Pour $f \in \mathrm{C}^n(G, A)$ on note $d_n f$ l'élément de $\mathrm{C}^{n+1}(G, A)$ défini par la formule*[8]

$$d_n f(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1.f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, \dots) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n).$$

On a un morphisme de groupes abéliens $d_n : \mathrm{C}^n(G, A) \to \mathrm{C}^{n+1}(G, A)$.

(i) Vérifier $\operatorname{Im} d_1 = \mathrm{B}^2(G, A)$ *et* $\ker d_2 = \mathrm{Z}^2(G, A)$.

(ii) Montrer $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

On pose $\mathrm{B}^n(G, A) = \operatorname{Im} d_{n-1}$ *(n*-cobords de G à valeurs dans A*), avec la convention $d_{-1} = 0$, et* $\mathrm{Z}^n(G, A) = \ker d_n$ *(n*-cocycles de G à valeurs dans A*). On a donc* $\mathrm{B}^n(G, A) \subset \mathrm{Z}^n(G, A)$, *et il y a un sens à poser, pour $n \geqslant 0$,*

$$\mathrm{H}^n(G, A) = \mathrm{Z}^n(G, A)/\mathrm{B}^n(G, A)$$

($n$ème groupe de cohomologie de G à valeurs dans A*).*

(iii) Montrer $\mathrm{H}^0(G, A) = A^G$.

(iv) On suppose le G-module A trivial. Montrer $\mathrm{B}^1(G, A) = 0$ *et* $\mathrm{H}^1(G, A) = \mathrm{Z}^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A)$.

EXERCICE 6.34. (Généralisation du théorème de Schur-Zassenhaus). *Soient G un groupe et A un G-module, avec G et A finis d'ordres premiers entre eux. Montrer*

$$\mathrm{H}^n(G, A) = 0, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

EXERCICE 6.35. *Soient G un groupe et A un G-module. On suppose donnée une extension* scindée *$(\widetilde{G}, i, \pi)$ de G par A. On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{K}$ de tous les compléments de $i(A)$ dans $\widetilde{G}$, et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des sections de groupes de π.*

(i) Rappeler pourquoi $\mathscr{S} \to \mathscr{K}, s \mapsto s(G)$, est bijective.

(ii) Supposons $K, K' \in \mathscr{K}$. Montrer que K et K' sont conjugués dans $\widetilde{G}$ si, et seulement si, il existe $a \in A$ tel que $K' = i(a)Ki(a)^{-1}$.

7. Au sens des isomorphismes d'extensions !

8. Pour d_0 il faut comprendre $(d_0 a)g = g.a - a$.

(iii) Fixons $s \in \mathcal{S}$*. Vérifier que toute section de* π *est de la forme* $s_\epsilon(g) = i(\epsilon(g))s(g)$ *avec* $\epsilon : G \to A$*, et que l'on a* $s_\epsilon \in \mathcal{S} \iff \epsilon \in \mathrm{Z}^1(G, A)$*.*

(iv) (suite) Supposons ϵ *et* $\epsilon' \in \mathrm{Z}^1(G, A)$*. Montrer que les compléments* $s_\epsilon(G)$ *et* $s_{\epsilon'}(G)$ *de* $i(A)$ *dans* $\widetilde{G}$ *sont conjugués si, et seulement si, on a*

$$\epsilon \equiv \epsilon' \bmod \mathrm{B}^1(G, A).$$

(v) En déduire que l'ensemble des classes de conjugaison de compléments de $i(A)$ *dans* $\widetilde{G}$ *est en bijection avec* $\mathrm{H}^1(G, A)$*.*

(vi) (Application) Montrer que si $\mathrm{H}^1(G, A) = 0$ *alors les compléments de* $i(A)$ *dans* $\widetilde{G}$ *sont conjugués.*

EXERCICE 6.36. (Un supplément à Schur-Zassenhaus) *Soit* G *un groupe fini d'ordre* mn *avec* $m \wedge n = 1$ *et possédant un sous-groupe distingué* résoluble H *d'ordre* m*. Montrer que tous les compléments de* H *dans* G *sont conjugués dans* G*. On pourra d'abord traiter le cas* H *abélien en utilisant les exercices précédents.*