11. Exercices

EXERCICE 4.1. *Montrer que le centre de* S_n *est trivial pour* $n > 2$.

EXERCICE 4.2. *Soit* $n \geqslant 2$ *un entier.*

(i) Montrer qu'il existe un unique morphisme non trivial $\mathrm{S}_n \to \{\pm 1\}$.
(ii) En déduire que A_n *est le seul sous-groupe d'indice* 2 *de* S_n.

EXERCICE 4.3. *Soit* G *un sous-groupe de* S_n *contenant une transposition.*

(i) Montrer $G = \mathrm{S}_n$ *si, et seulement si,* G *agit* 2*-transitivement sur* $\{1, \ldots, n\}$.
(ii) On suppose que G *contient un* n*-cycle et un* $n-1$ *cycle. Montrer* $G = \mathrm{S}_n$.

EXERCICE 4.4. *Soit* $T \subset \mathrm{S}_n$ *un sous-ensemble constitué de transpositions. On note* $\mathscr{G}$ *le graphe dont les sommets sont les éléments de* $\{1, \ldots, n\}$ *et dont les arêtes sont les* $\{i, j\}$ *avec* $(i\,j) \in T$. *Montrer l'équivalence entre :*

(a) *l'ensemble* T *engendre* S_n,
(b) *le graphe* $\mathscr{G}$ *est connexe.*[20]

On pourra d'abord montrer que si $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ *est un ensemble fini avec* $x_i \neq x_{i+1}$ *pour* $1 \leqslant i < m$,[21] *les transpositions* $(x_i\ x_{i+1})$ *avec* $1 \leqslant i < m$ *engendrent* S_X.

EXERCICE 4.5. *(i) Montrer que tout morphisme* $\mathrm{A}_n \to \{\pm 1\}$ *est trivial.*
(ii) En déduire que A_4 *ne possède pas de sous-groupe d'ordre* 6.

EXERCICE 4.6. *Montrer que les* 3*-cycles* $(i\ i+1\ i+2)$ *avec* $1 \leqslant i < n-1$ *engendrent* A_n. *On pourra commencer par les cas* $n \leqslant 4$.

EXERCICE 4.7. *Soient* c *un cycle de longueur* m *dans* S_n, $k \in \mathbb{Z}$ *et* $d = (m, k)$. *Montrer que* c^k *est produit de* m/d *cycles de longueurs* d *et à supports disjoints.*

EXERCICE 4.8. *(i) Montrer que si* p *est un nombre premier, alors une transposition et un* p*-cycle quelconques engendrent* S_p.
(ii) Donner un contre-exemple pour $p = 4$.

EXERCICE 4.9. *Montrer que le* n*-cycle* $(1\,2\,\cdots\,n)$ *et la transposition* $(i\,j)$ *engendrent* S_n *si, et seulement si, on a* $(i-j, n) = 1$.

---

20. Un graphe d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes $\mathscr{A}$ (un ensemble de parties à 2 éléments de S) est dit *connexe* si pour tout couple de sommets distincts $s, s' \in S$, il existe $m \geqslant 1$ et une suite d'arêtes $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A}$, telle que $s \in A_1$, $s' \in A_m$ et $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ pour $1 \leqslant i < m$. On vérifie aisément qu'un graphe de sommets S est connexe si, et seulement si, il n'existe aucune partition $S = S_1 \coprod S_2$ avec S_1 et S_2 non vides, telle que toute arête du graphe est soit incluse dans S_1, soit incluse dans S_2.

21. Noter que l'on ne suppose pas les x_i tous distincts a priori.

Exercice 4.10. *Soit* p *un nombre premier. On se propose de montrer qu'il existe exactement* $(p-2)!$ *sous-groupes d'ordre* p *dans* S_p*. Soit* $\sigma \in \mathrm{S}_p$ *d'ordre* p*.*

(i) Montrer que σ *est un* p*-cycle.*

(ii) Montrer qu'il existe un unique p*-cycle* $c \in \langle \sigma \rangle$ *tel que* $c(1) = 2$*.*

(iii) Conclure.

Exercice 4.11. *Soient* G, H, K *trois groupes avec* $H \lhd K$ *et* $K \lhd G$*.*

(i) En examinant A_4*, montrer que l'on n'a pas nécessairement* $H \lhd G$*.*

(ii) On suppose H *caractéristique dans* K*. Montrer* $H \lhd G$*.*

Exercice 4.12. (Quelques centralisateurs)

(i) Soit c *un cycle de longueur* k *dans* S_n*,* $S \subset \{1, \ldots, n\}$ *le support de* c*, et* C *le centralisateur de* c *dans* S_n*. Montrer que* C *est produit direct interne de* $\langle c \rangle$ *et du sous-groupe* $\simeq \mathrm{S}_{n-k}$ *des éléments de* S_n *à support dans* $\{1, \ldots, n\} \smallsetminus S$*.*

(ii) Déterminer le centralisateur de $(1\,2)$*,* $(1\,2\,3)$*,* $(1\,2\,3\,4)$ *et* $(1\,2)(3\,4)$ *dans* S_4*.*

Exercice 4.13. (Classes de conjugaison de A_n) *Soit* $\sigma \in \mathrm{A}_n$*. On dira que* σ *est* non spécial *s'il existe* $\tau \in \mathrm{S}_n$ *avec* $\tau\sigma = \sigma\tau$ *et* $\varepsilon(\tau) = -1$*, et qu'il est* spécial *sinon.*

(i) Montrer que σ *est non spécial si, et seulement si, il existe une* σ*-orbite de cardinal pair ou deux* σ*-orbites de même cardinal impair.*

(ii) Montrer que si σ *est non spécial, on a* $\mathrm{Conj}_{\mathrm{S}_n}(\sigma) = \mathrm{Conj}_{\mathrm{A}_n}(\sigma)$*.*

(iii) On suppose σ *spécial et* $s \in \mathrm{S}_n \smallsetminus \mathrm{A}_n$*. Montrer*

$$\mathrm{Conj}_{\mathrm{S}_n}(\sigma) = \mathrm{Conj}_{\mathrm{A}_n}(\sigma) \coprod \mathrm{Conj}_{\mathrm{A}_n}(s\sigma s^{-1}).$$

(iv) En déduire des représentants des classes de conjugaison de A_4 *et* A_5*.*

Exercice 4.14. (Une présentation de S_n) *Pour* $n \geqslant 2$ *et* $1 \leqslant i \leqslant j < n$ *on définit* $m_{i,j}$ *en posant* $m_{i,i} = 2$*,* $m_{i,j} = 3$ *pour* $j = i + 1$*, et* $m_{i,j} = 0$ *sinon. Soit* G *un groupe engendré par des éléments* $s_1, \ldots, s_{n-1}$ *vérifiant*

$$(s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant j < n.$$

(i) Vérifier que pour tout $1 \leqslant i, j < n$ *on a* $s_i^2 = 1$*,* $s_i s_j = s_j s_i$ *pour* $|j - i| > 1$*, ainsi que* $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ (relation de tresse) *pour* $i < n - 1$*.*

(ii) On pose $f_i = s_i s_{i+1} \cdots s_n$ *pour* $1 \leqslant i < n$*, et* $f_n = 1$*. Montrer que pour tout* $g \in G$*, il existe* $1 \leqslant i \leqslant n$ *et* $h \in \langle s_1, \ldots, s_{n-2} \rangle$ *vérifiant* $g = f_i\, h$*.*

(iii) En déduire que G *est fini de cardinal* $\leqslant n!$ *.*

(iv) Montrer[22] $\mathrm{S}_n \simeq \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \mid (s_i\, s_j)^{m_{i,j}} = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant j < n \rangle$*.*

On rappelle que le *taquin* est un jeu constitué d'un carré 4×4, lui-même constitué de 15 cases 1×1 mobiles numérotées de 1 à 15, et d'une case vide. Partant de la configuration initiale indiquée à gauche ci-dessous, et en déplaçant d'une case autant de fois qu'on le souhaite la case vide, on se trouve donc dans un état du jeu comme celui représenté à droite :

22. Cette question utilise la notion de groupe défini par générateurs et relations vue dans le complément §8 Chap. 2.

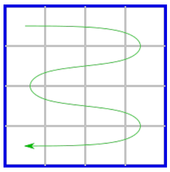
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

5	1	2	3
6	10	7	4
9		11	8
13	14	15	12

FIGURE 2. Le jeu de taquin

EXERCICE 4.15. (Taquin et serpents[23]) *Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des états possibles du jeu de Taquin. À chaque état $E \in \mathscr{E}$ on associe son* serpent $\mathrm{s}(E)$ *qui est la suite $(x_1, x_2, \ldots, x_{15})$ de tous les nombres de 1 à 15 obtenue en lisant le taquin dans l'ordre indiqué ci-dessous et en omettant la case vide :*



Par exemple, si $E_0 \in \mathscr{E}$ désigne l'état initial du jeu, son serpent est la suite $\mathrm{s}(E_0) = (1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13)$. *Pour $E \in \mathscr{E}$ et $\mathrm{s}(E) = (x_1, x_2, \ldots, x_{15})$, on note aussi $\sigma(E)$ l'unique élément de S_{15} tel que $x_i = \sigma(i)$.*

(i) Soient $E, F \in \mathscr{E}$ tels que F est obtenu à partir de E et d'un seul déplacement de la case vide. Vérifier que l'élément $\sigma(E)^{-1}\sigma(F) \in \mathrm{S}_{15}$ ne dépend que des positions originale et finale de la case vide (et non de E), et donner son type.

(ii) (Problème de Loyd) *Est-ce que le dessin* A *ci-dessous est dans $\mathscr{E}$?*

(iii) Déterminer $\{\sigma(E)^{-1}\sigma(F) \mid E, F \in \mathscr{E}\} \subset \mathrm{S}_{15}$.

(iv) Parmi les dessins B *et* C *ci-dessous, lequel est dans $\mathscr{E}$?*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

A

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

B

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	15	14

C

(v) Montrer $|\mathscr{E}| = \frac{16!}{2}$.

EXERCICE 4.16. (Invariances de la signature) *Soit X un ensemble fini non vide.*

(i) Soient $\sigma \in \mathrm{S}_X$ et $f : \{1, \ldots, n\} \to X$ une bijection. Montrer que l'élément $\varepsilon(\sigma) := \varepsilon(f^{-1} \circ \sigma \circ f)$ de $\{\pm 1\}$ ne dépend pas du choix de f.

(ii) (suite) Vérifier que $\varepsilon : \mathrm{S}_X \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes et en déduire une définition inambiguë de A_X (groupe alterné de X).

(iii) Soient $Y \subset X$ un sous-ensemble, $\sigma \in \mathrm{S}_X$ à support dans Y, et $\tau = \sigma_{|Y} \in \mathrm{S}_Y$ la permutation associée. Vérifier $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$.

EXERCICE 4.17. *Soit G un groupe simple fini d'ordre pair. En considérant la signature de l'action de G sur lui-même par translation, montrer $|G| \equiv 0 \bmod 4$, ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

---

23. A. F. Archer, A modern treatment of the 15-puzzle, American Math. Monthly 106 (1999).

EXERCICE 4.18. *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini à $n \geqslant 1$ éléments.*

(i) On suppose l'action transitive. Montrer que n divise $|G|$.
(ii) On suppose l'action fidèle. Montrer que $|G|$ divise $n!$.
(iii) On suppose l'action libre. Montrer que $|G|$ divise n.

EXERCICE 4.19. *Soient $n \geqslant 1$ un entier et G cyclique d'ordre n.*

(i) Pour tout diviseur d de n, définir une action transitive de G sur un ensemble à d éléments.
(ii) Montrer que toute action transitive de G est isomorphe à une et une seule des actions définies au (i).

EXERCICE 4.20. *Montrer qu'à isomorphisme près, il existe exactement 4 actions transitives du groupe S_3 : l'action triviale sur $\{1\}$, une action à déterminer sur $\{1, -1\}$, l'action naturelle sur $\{1, 2, 3\}$, et l'action de Cayley.*

Nous renvoyons au sujet du partiel 2021-2022 (§1 App. B) pour une classification des actions transitives de S_4 sur 6 éléments.

EXERCICE 4.21. *(i) Exhiber un sous-groupe de S_6 isomorphe à S_3 et agissant transitivement sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*
(ii) Exhiber un sous-groupe de S_8 isomorphe à H_8.
(iii) Montrer que pour $n < 8$, aucun sous-groupe de S_n n'est isomorphe à H_8.

EXERCICE 4.22. *Soient G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de $|G|$.*

(i) On suppose que G agit sur un ensemble X à p éléments. Montrer que G_x agit trivialement sur X pour tout $x \in X$.
(ii) En déduire qu'un sous-groupe de G d'indice p est distingué (Lemme de Ore).

EXERCICE 4.23. *Soient G un groupe agissant sur X, $k \geqslant 1$ un entier, et $x \in X$.*

(i) Montrer que G agit $k+1$-transitivement sur X si, et seulement si, G agit transitivement sur X et G_x agit k-transitivement sur $X \smallsetminus \{x\}$.
(ii) En déduire que si G est fini, et agit k-transitivement sur X, alors l'entier $|X|(|X|-1)(|X|-2)\cdots(|X|-k+1)$ divise $|G|$.
(iii) Montrer que si un sous-groupe $G \subset \mathrm{S}_n$ agit $(n-2)$-transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$, alors on a $G = \mathrm{A}_n$ ou $G = \mathrm{S}_n$.

EXERCICE 4.24. (Un sous-groupe 3-transitif de S_6 isomorphe à S_5) *Soit G le sous-groupe de S_6 engendré par $(1\,2\,3\,4\,5)$ et $(1\,2)(3\,6)(5\,4)$.*

(i) Montrer que l'action naturelle de G sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$ est 3-transitive.
(ii) En déduire que l'action de S_5 sur les pentagones mystiques est fidèle, et que l'on a $G \simeq \mathrm{S}_5$.

L'exercice ci-dessous est inspiré de l'article *Three lectures on exceptionnal groups*, de J. Conway (1993).

EXERCICE 4.25. (*Le groupe de Mathieu* M_{11}) *Soit* M_{11} *le sous-groupe de* A_{11} *engendré par les éléments* $a = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)$ *et* $b = (3\,7\,11\,8)(4\,10\,5\,6)$.

(i) Montrer que M_{11} *possède des éléments de type* 11, $1\,2\,8$, $1\,5^2$, $1^2\,3^3$ *et* $1^3\,4^2$. *Pour cela, on pourra vérifier les égalités* $b^2a = (1\,2\,11)(3\,5\,10)(6\,8\,9)$,

$$aba^{-1}b^{-1} = (1\,9\,4\,7\,3)(5\,10\,8\,6\,11) \quad \text{et} \quad aba = (1\,3\,11\,2\,8\,10\,9\,6)(4\,7).$$

(ii) En déduire (sans calcul) que M_{11} *agit* 3*-transitivement sur* $\{1,\dots,11\}$.

Soit $E = \{1,\dots,11\}$. *Pour* $F \subset E$ *on pose* $G_F = \{g \in \mathrm{M}_{11} \mid g(F) = F\}$.

(iii) Montrer (sans calcul) que si $F \subset E$ *a trois éléments, alors* G_F *agit transitivement sur* $E \smallsetminus F$. *En déduire que* M_{11} *agit transitivement sur l'ensemble des parties à* 4 *éléments de* E.

(iv) Soient $F \subset E$ *avec* $|F| = 4$, *et* $f : G_F \to \mathrm{S}_F$ *le morphisme naturel. Montrer (sans calcul) que* $f(G_F)$ *contient un* 4*-cycle et un* 3*-cycle.*

(v) (suite) En déduire $f(G_F) = \mathrm{S}_F$.

(vi) Montrer que M_{11} *agit* 4*-transitivement sur* $\{1, 2,\dots,11\}$, *puis montrer que* $|\mathrm{M}_{11}|$ *est multiple de* $\frac{11!}{7!} = 7920$.

Mathieu a démontré l'égalité $|\mathrm{M}_{11}| = 7920$ et que M_{11} *est simple* : c'est le plus petit des groupes simples dits *sporadiques*. Mathieu a en fait construit explicitement, entre 1861 et 1873, 5 groupes simples $\mathrm{M}_n \subset \mathrm{S}_n$, pour $n = 11, 12, 22, 23$ et 24. La détermination de leur cardinal fut un temps controversée, ou même simplement le fait qu'ils ne sont pas égaux à A_n.

EXERCICE 4.26. *Soient* G *un groupe et* H *un sous-groupe de* G. *On note* $\bullet$ *l'action par translations de* G *sur* G/H *et* $N = \mathrm{N}_G(H)$ *le normalisateur de* H.

(i) Montrer que pour tout $n \in N$, *l'application* $G/H \to G/H, gH \mapsto gHn$, *définit bien un isomorphisme* $(G/H, \bullet)$ *dans lui-même (ou* automorphisme*).*

(ii) Montrer que le groupe des automorphismes de $(G/H, \bullet)$ *est naturellement isomorphe à* N/H.

EXERCICE 4.27. *Soient* G *un groupe, et* $\bullet$ *et* $\star$ *des actions de* G *sur des ensembles* X *et* Y. *Soit* $X = \coprod_{i\in I} X_i$ *la partition en orbites de* X, *et* $Y = \coprod_{j\in J} Y_j$ *celle de* Y.

(i) Soit $f : (X, \bullet) \to (Y, \star)$ *un isomorphisme d'actions. Montrer que pour tout* $i \in I$, *il existe un unique* $j \in J$ *vérifiant* $f(X_i) = Y_j$. *On pose* $\varphi(i) := j$.

(ii) (suite) Montrer que $\varphi : I \to J$ *est bijective, et que pour tout* $i \in I$, *les actions* $(X_i, \bullet)$ *et* $(Y_{\varphi(i)}, \star)$ *de* G *sont transitives et isomorphes.*

(iii) On suppose réciproquement qu'il existe une bijection $\varphi : I \to J$, *et pour tout* $i \in I$ *un isomorphisme* $f_i : (X_i, \bullet) \to (Y_{\varphi(i)}, \star)$. *Montrer que* $(X, \bullet)$ *est* $(Y, \star)$ *sont isomorphes.*

On donne maintenant quelques exercices sur les notions de commutateur et groupe dérivé.

EXERCICE 4.28. *Soient* G *un groupe,* $g \in G$ *d'ordre fini* n, *et* $i, j \in \mathbb{Z}$ *tels que* g^i *et* g^j *sont conjugués dans* G.

(i) On suppose $j - i = \pm 1$. *Montrer que* g *est un commutateur dans* G.
(ii) On suppose $(j - i, n) = 1$. *Montrer* $g \in \mathrm{D}(G)$.

EXERCICE 4.29. *Soit* G *un groupe. Montrer que tout sous-groupe de* G *contenant* $\mathrm{D}(G)$ *est distingué dans* G.

Dans l'exercice suivant, on note ${}^h g$ l'élément hgh^{-1}.

EXERCICE 4.30. *Soient* G *un groupe et* $x, y, z \in G$.
(i) Montrer $[x,y]^{-1} = [y,x]$, $[x, yz] = [x,y]\,{}^y[x,z]$ *et* $[xy, z] = [y,z]\,{}^x[x\,z]$.
(ii) En déduire $[x, y^n] = [x,y]\,{}^y[x,y]\,{}^{y^2}[x,y] \cdots {}^{y^{n-1}}[x,y]$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

EXERCICE 4.31. *(i) Déterminer le groupe dérivé et l'abélianisé de* H_8.
(ii) Déterminer le groupe dérivé et l'abélianisé de D_{2n}.

EXERCICE 4.32. *(i) On se donne* $n \geqslant 1$ *et une suite exacte de groupes*

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \longrightarrow 1.$$

On suppose que les G_i *sont finis pour tout* i. *Montrer* $\prod_{i=1}^{n} |G_i|^{(-1)^i} = 1$.
(ii) Soient G *un groupe abélien fini et* $n \geqslant 1$ *un entier. On rappelle les sousgroupes* $G[n] = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ *et* $G^{(n)} = \{g^n \mid g \in G\}$ *de* G. *Montrer*

$$|G[n]| = |G/G^{(n)}|$$

sans utiliser le théorème de structure.

Dans les exercices suivants, k est un corps fixé.

EXERCICE 4.33. *Montrer que l'action de* $\mathrm{GL}_2(k)$ *sur* $\mathbb{P}(k^2)$ *est* 3*-transitive.*

Soit $n \geqslant 1$. On rappelle que $\mathrm{T}_n(k) \subset \mathrm{GL}_n(k)$ désigne le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, et $\mathrm{U}_n(k) \subset \mathrm{T}_n(k)$ celui des matrices unipotentes supérieures (coefficients égaux à 1 sur la diagonale). Pour $i < j$ et $x \in k$ on note $\mathrm{e}_{i,j}(x)$ la matrice $m \in \mathrm{U}_n(k)$ vérifiant $m_{i,j} = x$ et $m_{p,q} = 0$ pour $p < q$ et $(p,q) \neq (i,j)$. On pose aussi $\mathrm{e}_{i,j} = \mathrm{e}_{i,j}(1)$.

EXERCICE 4.34. *(i) Montrer que les* $\mathrm{e}_{i,j}(x)$ *avec* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *et* $x \in k$ *engendrent* $\mathrm{U}_n(k)$.
(ii) Déterminer le centre de $\mathrm{T}_n(k)$ *et celui de* $\mathrm{U}_n(k)$.

EXERCICE 4.35. *(i) Montrer* $\mathrm{D}(\mathrm{T}_n(k)) = \mathrm{U}_n(k)$ *pour* $k \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(ii) Montrer $[\mathrm{e}_{i,i+2^m}, \mathrm{e}_{i+2^m,i+2^{m+1}}] = \mathrm{e}_{i,i+2^{m+1}}$ *pour* $m \geqslant 0$ *et* $1 \leqslant i + 2^{m+1} \leqslant n$.
(iii) En déduire $\mathrm{e}_{i,j} \in \mathrm{D}^m(\mathrm{U}_n(k))$ *pour* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *et* $i \equiv j \bmod 2^m$.
(iv) Montrer que $\mathrm{U}_n(k)$ *est de classe* $1 + \lfloor \log_2(n-1) \rfloor = \lceil \log_2 n \rceil$ *pour* $n \geqslant 2$.

Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On appelle *drapeau complet* de V la donnée d'une suite croissante de sous-espaces $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ avec $\dim V_i = i$ pour tout i. Le *drapeau standard* de $V = k^n$ est le drapeau défini pour $1 \leqslant i \leqslant n$ par $V_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$, où e_i est la base canonique de k^n.

EXERCICE 4.36. *Soit* $\mathscr{F}$ *l'ensemble des drapeaux complets de* V.

(i) Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{GL}(V)$ *sur* $\mathscr{F}$ *est transitive.*

(ii) Quel est le stabilisateur du drapeau standard de k^n *?*

(iii) En déduire que pour G *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(k)$*, il y a équivalence entre :*

(a) G *préserve un drapeau complet de* k^n,

(b) il existe $p \in \mathrm{GL}_n(k)$ *tel que* $p\,G\,p^{-1} \subset \mathrm{T}_n(k)$ *(*G *est co-trigonalisable).*

EXERCICE 4.37. (Le théorème de Lie-Kolchin) *Soient* $n \geqslant 1$ *et* G *un sous-groupe résoluble connexe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *On se propose de montrer que* G *est co-trigonalisable. On raisonne par récurrence sur* $n + r$ *où* r *est la classe de résolubilité de* G.

(i) Montrer que $\mathrm{D}(G)$ *est connexe.*

(ii) Montrer que $\mathrm{D}(G)$ *est inclus dans* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

(iii) Conclure si $\mathrm{D}(G)$ *est constitué d'homothéties.*

(iv) Conclure s'il existe un sous-espace $\{0\} \subsetneq W \subsetneq \mathbb{C}^n$ *avec* $g(W) \subset W$ *pour tout* $g \in G$.

Soit $\mathscr{C} = \widehat{\mathrm{D}(G)}$. *Pour un caractère* $\chi \in \mathscr{C}$ *on considère le sous-espace vectoriel*

$$V_\chi = \{v \in \mathbb{C}^n \mid g(v) = \chi(g)v, \ \ \forall g \in \mathrm{D}(G)\}.$$

On pose $S = \{\chi \in \mathscr{C} \mid V_\chi \neq 0\}$ *et* $V = \sum_{\chi \in S} V_\chi$.

(v) Montrer $S \neq \varnothing$.

(vi) Montrer $V = \oplus_{\chi \in S} V_\chi$.

(vii) En déduire que S *est fini.*

Pour $g \in G$ *et* $\chi \in \mathscr{C}$ *on pose* ${}^g\chi : \mathrm{D}(G) \to \mathbb{C}^\times, x \mapsto \chi(g^{-1}xg)$.

(viii) Montrer que $(g, \chi) \mapsto {}^g\chi$ *est une action de* G *sur* $\mathscr{C}$, *et vérifier* $g(V_\chi) = V_{{}^g\chi}$.

(ix) (suite) En déduire que cette action de G *sur* S *est triviale.*

(x) Conclure.

(xi) Donner un contre-exemple dans le cas $n = 2$ *pour* G *non connexe.*

On termine par quelques exercices sur le produit semi-direct.

EXERCICE 4.38. *Déterminer le centre des groupes* G_s *définis dans l'Exemple 7.11.*

Le titre de l'exercice suivant est évidemment provocateur.

EXERCICE 4.39. (Tout automorphisme est intérieur) *Soient* G *un groupe et* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. *Montrer qu'il existe un groupe* G', *un morphisme injectif* $f : G \to G'$ *et un élément* $x \in G'$, *tels que pour tout* $g \in G$ *on a* $f(\alpha(g)) = xf(g)x^{-1}$.

EXERCICE 4.40. (Groupes d'ordre pq) *Soient* p *et* q *deux nombres premiers avec* $p < q$, *et* G *un groupe d'ordre* pq.

(i) Montrer que G *possède un sous-groupe d'ordre* p *et un sous-groupe distingué d'ordre* q.

(ii) On suppose que p *ne divise pas* $q - 1$. *Montrer* $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

(iii) On suppose que p divise $q-1$. Montrer qu'il existe un groupe non abélien $\Gamma_{p,q}$ d'ordre pq.

(iv) (suite) Montrer que l'on a soit $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, soit $G \simeq \Gamma_{p,q}$.

(v) (suite) Exhiber un sous-groupe de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ isomorphe à $\Gamma_{p,q}$.

Dans les deux exercices suivants on étend la définition de D_{2n} à $1 \leqslant n \leqslant 2$ en posant $\mathrm{D}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathrm{D}_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Avec cette définition, on constate que l'on a $\mathrm{D}_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où α est comme dans l'Exemple 7.6. De plus, l'Exercice 4.42 utilise la notion de groupe défini par générateurs et relations vue dans le complément §8 Chap. 2.

Exercice 4.41. *Soient $m, n \geqslant 1$ des entiers. Montrer que D_{2m} possède un sous-groupe isomorphe à D_{2n} si, et seulement si, on a $n|m$.*

Exercice 4.42. *Montrer $\mathrm{D}_{2n} \simeq \langle\, s,\, t \mid s^2 = t^2 = (st)^n = 1 \,\rangle$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Exercice 4.43. *Soit $n \geqslant 2$ un entier. L'action de S_n sur $\{1, \ldots, n\}$ induit un morphisme $\alpha : \mathrm{S}_n \to \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)$ par permutation des coordonnées, et on pose*

$$G_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_\alpha \mathrm{S}_n.$$

On introduit aussi $\varphi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme de groupes $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, son noyau $H_n = \ker\varphi$ et l'élément $e := (1, 1, \ldots, 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

(i) Déterminer le centre de G_n.

(ii) Soit $V \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ un sous-groupe vérifiant $\alpha_\sigma(V) \subset V$ pour tout $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Montrer que l'on a soit $V \subset \langle e \rangle$, soit $H_n \subset V$.

(iii) Vérifier que l'application $G_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{S}_n$ envoyant (v, σ) sur $(\varphi(v), \sigma)$ est un morphisme de groupes.

(iv) Montrer que le sous-groupe dérivé de G_n est $H_n \rtimes_\alpha \mathrm{A}_n$.

(v) Pour quels entiers n est-ce que G_n est résoluble ?

(vi) Montrer que $H_n \rtimes_\alpha \mathrm{S}_n$ agit sur H_n via $((v, \sigma), w) \mapsto v + \sigma(w)$, et que cette action est fidèle pour $n \geqslant 3$.

(vii) (suite) En déduire $H_3 \rtimes_\alpha \mathrm{S}_3 \simeq \mathrm{S}_4$.

Exercice 4.44. (Groupe diédral infini) *Soient s et t les isométries de la droite euclidienne $\mathbb{R}$ définies par $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - x$, et $G := \langle s, t \rangle \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{R})$.*

(i) Montrer que $H := \langle st \rangle$ est un sous-groupe distingué de G isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(ii) Montrer que la conjugaison par s induit l'automorphisme $x \mapsto x^{-1}$ de H.

(iii) En déduire $G \simeq \mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ envoie $\overline{1}$ sur $x \mapsto -x$.