6. Exercices

Exercice 1.1. (Relation d'équivalence engendrée par une relation) *Soient X un ensemble et $R \subset X \times X$ une relation sur X.*

(i) Montrer qu'il existe une plus petite relation d'équivalence R' sur X contenant R (appelée « relation d'équivalence engendrée par R »).

(ii) Montrer que l'on a $x\, R'\, y$ si, et seulement si, il existe $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in X$ avec $x_1 = x$, $x_n = y$, et $x_i\, R\, x_{i+1}$ ou $x_{i+1}\, R\, x_i$ pour tout $1 \leq i < n$.

Exercice 1.2. *Montrer que la conclusion $|X| \equiv |\mathrm{Fix}\, X| \bmod p$ du Corollaire 1.9 vaut encore si l'on suppose $f^{p^m} = \mathrm{id}_X$ avec $m \geq 1$, au lieu de $f^p = \mathrm{id}_X$. Peut-on remplacer p par p^m dans cette congruence ?*

Exercice 1.3. (Congruence de Touchard) *Notons B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, avec la convention $\mathrm{B}_0 = 1$. Soit p un nombre premier.*

(i) En considérant la bijection de $I \coprod \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui vaut l'identité sur I et $x \mapsto x+1$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer $\mathrm{B}_{n+p} \equiv \mathrm{B}_n + \mathrm{B}_{n+1} \bmod p$, pour tout $n \geq 0$.

(ii) Montrer plus généralement $\mathrm{B}_{n+p^m} \equiv m\, \mathrm{B}_n + \mathrm{B}_{n+1} \bmod p$ pour $m \geq 1$.

Exercice 1.4. *(i) Compléter la démonstration de l'Exemple 1.10, et comprendre géométriquement les trois cas de figure de l'involution de Zagier.*

(ii) Pouvez-vous démontrer, par une méthode géométrique de ce type, que tout nombre premier $p \equiv 1 \bmod 3$ est de la forme $a^2 + 3b^2$?[5]

Exercice 1.5. *(i) Construire une fonction de choix sur $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{Q}^2$.*

(ii) Construire, sans l'axiome du choix, une fonction associant à tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ un élément de U.

(iii) (suite) Est-ce possible avec les fermés ? les dénombrables[6] *?*

Exercice 1.6. *Soient (X, d) un espace metrique et ϵ un réel > 0. Une partie $A \subset X$ est dite* ϵ-séparée *si on a $d(x, y) \geq \epsilon$ pour tout x, y distincts dans A, et* ϵ-séparée maximale *si en outre la seule partie ϵ-séparée de X contenant A est A.*

(i) Vérifier que si $A \subset X$ est ϵ-séparée maximale, alors pour tout $x \in X$ il existe $a \in A$ avec $d(x, a) < \epsilon$.

(ii) Montrer que toute partie ϵ-séparée de X est incluse dans une partie ϵ-séparée maximale.

Deux ensembles ordonnés X et Y sont dits *isomorphes*[7] s'il existe une bijection $f : X \to Y$ telle que pour tout $x, y \in X$, $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.

5. Si oui, cela m'intéresse, car je ne connais pas de telle démonstration, ni pour cet exemple, ni pour d'autres similaires !

6. On admettra ici que l'axiome du choix est nécessaire pour construire un sous-ensemble non Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ (Solovay), et on considèrera la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ (exemple de Vitali).

7. Plus généralement, un *morphisme d'ensemble ordonnés* est une application $f : X \to Y$ vérifiant $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ pour tout $x, y \in Y$ (on parle aussi d'application *croissante*).

EXERCICE 1.7. (Ordre lexicographique)

(i) Soient X et Y des ensembles ordonnés. Vérifier que $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x < x')$ ou $(x = x'$ et $y < y')$ est une relation d'ordre sur $X \times Y$.

(ii) Montrer que si X et Y sont bien ordonnés, il en va de même de $X \times Y$.

(iii) On munit $\mathbb{N}$ de son ordre usuel, ainsi que sa partie $\{0, 1\}$. Est-ce que les ensembles (lexicographiquement) ordonnés $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ sont isomorphes entre eux ? à $\mathbb{N}$?

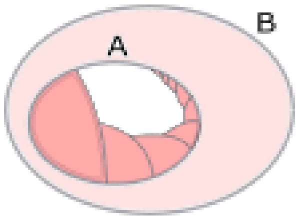
La série d'exercices suivants constitue des rappels sur la notion de cardinalité. Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont *équipotents*, et on note $A \sim B$, s'il existe une bijection de A dans B. Comme l'identité, l'inverse d'une bijection, et la composée de deux bijections, sont encore des bijections, l'équipotence est une relation d'équivalence sur la classe des ensembles. La classe d'équipotence d'un ensemble A est aussi notée $|A|$ et appelée *cardinal* de A. On a donc $|A| = |B|$ si, et seulement si, $A \sim B$. On notera $A \hookrightarrow B$, ou $|A| \leq |B|$, s'il existe une injection de A dans B. L'exercice suivant montre que c'est une relation d'ordre.

EXERCICE 1.8. *On veut montrer que si A et B sont deux ensembles avec $A \hookrightarrow B$ et $B \hookrightarrow A$, alors on a $A \sim B$ (Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein).*

(i) Montrer que l'on peut supposer $A \subset B$ et qu'il existe une injection $i : B \to A$.

(ii) Montrer que les $i^n(B \setminus A)$, avec $n \geq 0$, sont deux à deux disjoints.

(iii) En déduire que $j : A \to B$, définie par $j(x) = i^{-1}(x)$ s'il existe $n \geq 1$ avec $x \in i^n(B \setminus A)$, et $j(x) = x$ sinon, est une bijection ("on monte l'escalier").



Si A et B sont deux ensembles, on notera $A \twoheadrightarrow B$, ou $|A| \geq |B|$, s'il existe une surjection de A dans B. Nous allons voir $|A| \geq |B| \iff |B| \leq |A|$.

EXERCICE 1.9. *(i) Soit $f : X \to Y$ une application. Une* retraction *de f (ou* inverse à gauche*) est une application $r : Y \to X$ vérifiant $r \circ f = \mathrm{id}_X$. Montrer que f admet une retraction si, et seulement si, f est injective.*

(ii) Montrer que $A \hookrightarrow B$ est équivalent à $B \twoheadrightarrow A$.

Vous remarquerez que votre démonstration du (ii) de l'exercice précédent utilise AC, contrairement à celle du (i) ou du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

On rappelle qu'un ensemble A est dit *dénombrable* si l'on a une surjection $\mathbb{N} \to A$, ou ce qui revient au même, si on a $A \hookrightarrow \mathbb{N}$.

EXERCICE 1.10. *(Préservation de la dénombrabilité)*

(i) Montrer que si A est infini et dénombrable alors on a $A \sim \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que si on a $A \twoheadrightarrow B$ avec A dénombrable, alors B est dénombrable.

(iii) Montrer que si A et B sont dénombrables, alors $A \times B$ est dénombrable.

(iv) Soient A un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles dénombrables de A. Montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.

Exercice 1.11. *(i) Montrer les équipotences $\mathbb{R} \sim [0,1] \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

(ii) Rappeler pourquoi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et donc $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable (argument diagonal de Cantor *: si $(\epsilon_{m,n})_{m,n} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, considérer $(1-\epsilon_{n,n})_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$*).

(iii) Montrer aussi $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 1.12. *Soient A un ensemble infini et $n \geq 1$. On veut montrer*

$$A \sim A \times \{1,\dots,n\} \text{ et } A \sim A \times \mathbb{N}.$$

(i) Montrer que A admet une partition en sous-ensembles infinis dénombrables.

(ii) En déduire $A \sim B \times \mathbb{N}$ pour un certain ensemble B, puis conclure.

L'exercice suivant montre que $|A| \leq |B|$ est une relation d'ordre total sur la classe des ensembles.

Exercice 1.13. *Montrer que si A et B sont deux ensembles, on a $A \hookrightarrow B$ ou $B \hookrightarrow A$. On pourra considérer l'ensemble des couples (X,f) avec $X \subset A$ et $f : X \to B$ une injection.*

Exercice 1.14. *Soient X un ensemble infini et $A, B \subset X$ avec $X = A \cup B$ et disons $B \hookrightarrow A$. Montrer $X \sim A$.*

Exercice 1.15. *Soit X un ensemble infini. On veut montrer $X \sim X \times X$.*

(i) On suppose que $f : X \times X \to X$ est une bijection. On considère $Y = X \coprod X'$ où X' est un ensemble en bijection avec X. Montrer qu'il existe une bijection $g : Y \times Y \to Y$ dont la restriction à $X \times X$ coïncide avec f.

(ii) Conclure en appliquant le lemme de Zorn à l'ensemble convenablement ordonné des couples (A,f) avec $A \subset X$ et f une bijection $A \times A \to A$.

Exercice 1.16. *Si X est un ensemble, on note $\mathrm{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X. Montrer que si X est infini on a $X \sim \mathrm{P}_f(X)$.*

Les exercices suivants traitent des espaces vectoriels de dimension quelconque.

Exercice 1.17. *Soient V un espace vectoriel, $e = \{e_i\}_{i\in I}$ une famille génératrice de V, et $f = \{f_j\}_{j\in J}$ une base de V.*

(i) Pour $i \in I$, on écrit $e_i = \sum_{j\in J} x_j f_j$ et on pose $J_i = \{j \in J, x_j \neq 0\}$ (un ensemble fini). Montrer $J = \cup_{i\in I} J_i$.

(ii) En déduire $I \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow J$, puis $J \hookrightarrow I$.

(iii) En déduire que si e et f sont des bases de V alors $I \sim J$.

Exercice 1.18. *Soient V un k-espace vectoriel et $e = \{e_i\}_{i\in I}$ une base de V. On suppose I infini.*

(i) Montrer $V \sim k \times I$.

(ii) En déduire que l'on a $V \sim I$ ou $V \sim k$.