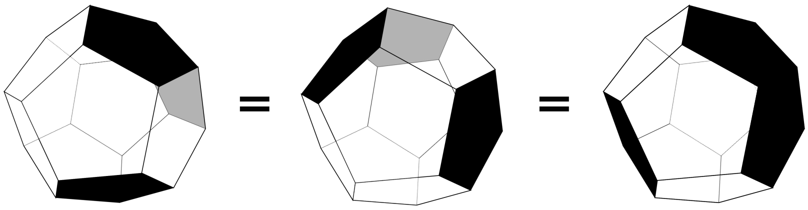
Examen du cours d'Algèbre 1, ENS Ulm, 16 Janvier 2024

Aucun document n'est autorisé. Temps de composition : 3h. Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir le maximum des points. On soignera la rédaction.

Problème 1. (Dodécaèdres noirs et blancs) *Soit* D *un dodécaèdre régulier. On se propose de déterminer le nombre de façons de colorier chaque face de* D *en noir ou en blanc, sachant que l'on identifie deux coloriages s'ils se déduisent l'un de l'autre par une rotation de* D.



(i) Déterminer le nombre de 3*-cycles, de doubles-transpositions, et de* 5*-cycles, dans* A_5.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble fini X, et soit E un ensemble fini de cardinal m. Pour $g \in G$ et $\phi : X \to E$, on définit $g.\phi : X \to E$ par la formule $(g.\phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$.

(ii) Vérifier que $(g, \phi) \mapsto g.\phi$ est une action de G sur l'ensemble E^X.

(iii) Soit $g \in G$. Montrer que le nombre de points fixes de g dans E^X est de la forme $m^{\mathrm{r}_X(g)}$, où $\mathrm{r}_X(g)$ est un entier que l'on exprimera en fonction du type de la décomposition en cycles de g sur X.

On suppose désormais que G est le groupe des isométries directes d'un dodécaèdre régulier, et que X est l'ensemble des 12 *faces de ce dodécaèdre, muni de l'action naturelle de G.*

(iv) Soit $g \in G \smallsetminus \{1\}$ possédant un point fixe dans X. Justifier brièvement pourquoi g est d'ordre 5 *et possède exactement deux points fixes dans X.*

(v) En déduire que l'action de G sur E^X a exactement $\frac{1}{60}(m^{12} + 15\,m^6 + 44\,m^4)$ orbites.

(vi) Conclure.

Problème 2. (Groupes auto-transitifs et critère de simplicité de Rotman) *On commence par une question préliminaire. Soit G un groupe agissant k-transitivement*[1] *sur un ensemble X, avec $k \geq 2$, et soit $x \in X$.*

(o) Vérifier que G_x agit $(k-1)$-transitivement sur $X \smallsetminus \{x\}$.

Partie I : groupes auto-transitifs

On s'intéresse aux groupes finis G tels que l'action naturelle du groupe $\operatorname{Aut} G$ *sur l'ensemble $G \smallsetminus \{1\}$, $(\alpha, g) \mapsto \alpha(g)$, est transitive. Dans les questions (i) à (iii) on fixe un tel groupe $G \neq \{1\}$, et on choisit un nombre premier p divisant $|G|$.*

1. On rappelle que notre convention est que si un groupe agit k-transitivement sur un ensemble X alors on a $|X| \geq k$.

(i) Montrer que tout élément non trivial de G est d'ordre p.

(ii) Montrer $\mathrm{Z}(G) = G$.

(iii) En déduire que l'on a $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ avec $n \geq 1$.

(iv) Réciproquement, montrer que pour p premier et $n \geq 1$, le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ a la propriété requise.

On se donne enfin un entier $k \geq 2$ et un groupe fini G tels que l'action naturelle de $\operatorname{Aut} G$ sur $G \smallsetminus \{1\}$ est k-transitive.

(v) On suppose $k = 2$. Montrer que l'on a soit $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, soit $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et $n \geq 2$.

(vi) On suppose $k \geq 3$. Montrer $k = 3$ et $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Partie II : le critère de simplicité de Rotman

Soit G un groupe fini agissant fidèlement et k-transitivement sur un ensemble fini X, avec $k \geq 2$. Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que le groupe G_x est simple. Suivant J. Rotman, nous allons démontrer que l'une des assertions suivantes est satisfaite :

(a) *G est simple,*

(b) *on a $k = 3$ et, soit $|X| = 3$ et $G = \mathrm{S}_X$, soit $|X|$ est une puissance de 2,*

(c) *on a $k = 2$ et $|X|$ est une puissance d'un nombre premier.*

On fixe $x_0 \in X$ tel que G_{x_0} est simple. Soit N un sous-groupe distingué de G avec $N \neq \{1\}$ et $N \neq G$.

(i) Montrer que N agit transitivement X. On pourra considérer $x \in X$ tel que $|Nx| > 1$ et montrer $X = Nx$.

(ii) Montrer $N \cap G_{x_0} = \{1\}$.

(iii) Vérifier que l'application $N \smallsetminus \{1\} \longrightarrow X \smallsetminus \{x_0\}, n \mapsto nx_0$, est bien définie et bijective.

(iv) En déduire que l'action par conjugaison de G_{x_0} sur $N \smallsetminus \{1\}$ est $(k-1)$-transitive.

(v) Conclure.

Partie III : deux applications du critère de Rotman

(i) Montrer que la simplicité de A_5 entraîne celle de A_n pour $n \geq 6$.

É. Mathieu a construit un sous-groupe G de S_{24} agissant 5-transitivement sur $\{1, 2, \ldots, 24\}$ et vérifiant $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \simeq \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$, où G_i désigne le stabilisateur dans G de l'élément $i \in \{1, 2, \ldots, 24\}$ et $\mathbb{F}_4$ est un corps à 4 éléments. On note respectivement M_{24}, M_{23} et M_{22} les groupes G, G_1 et $G_1 \cap G_2$.

(ii) Montrer que M_{22}, M_{23} et M_{24} sont simples.[2]

2. Ce sont les trois plus gros groupes simples sporadiques découverts par Mathieu.

Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de V. On rappelle que V_u désigne le $K[X]$-module de K-espace vectoriel sous-jacent V et vérifiant $Xv = u(v)$ pour tout $v \in V$. On note ${}^t u$ l'endomorphisme du dual V^* de V défini par ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$ pour tout $\varphi \in V^*$ (*transposée* de u).

Problème 3. (Dualité, et actions non isomorphes de représentations de permutation associées isomorphes) *Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, u un endomorphisme de V. On se propose d'abord de montrer que les $K[X]$-modules V_u et $(V^*)_{{}^t u}$ sont isomorphes.*

(i) On suppose que le $K[X]$-module V_u est isomorphe à $K[X]/(P)$ avec $P \in K[X]$ unitaire. Montrer qu'il existe $v \in V$ tel que $v, Xv, X^2v, \ldots, X^{n-1}v$ est une base de V, et aussi $Pv = 0$.

(ii) (suite) Montrer que le $K[X]$-module $(V^*)_{{}^t u}$ est monogène, et $P\psi = 0$ pour tout $\psi \in V^*$. On pourra considérer une forme linéaire ϕ sur V vérifiant $\phi(X^i v) = 0$ pour $0 \leq i < n-1$, et $\phi(X^{n-1}v) = 1$.

(iii) (suite) En déduire un isomorphisme de $K[X]$-modules $(V^*)_{{}^t u} \simeq K[X]/(P)$.

(iv) On suppose $V = \oplus_{i=1}^r V_i$ avec $V_i \subset V$ un sous-espace vectoriel stable par u pour tout $i = 1, \ldots, r$, et on pose $u_i = u_{|V_i}$. Vérifier que l'on a un isomorphisme de $K[X]$-modules $\oplus_{i=1}^r (V_i^*)_{{}^t u_i} \simeq (V^*)_{{}^t u}$.

(v) Conclure.

(vi) (Application) Montrer que toute matrice dans $\mathrm{M}_n(K)$ est semblable à sa transposée.

On suppose désormais que K est un corps fini. On note X l'ensemble des droites vectorielles de K^n et Y celui des hyperplans de K^n. Ces deux ensembles sont munis d'une action naturelle du groupe $G = \mathrm{GL}_n(K)$.

(vii) Montrer que tout $g \in G$ a le même nombre de points fixes dans X et dans Y.

(viii) En déduire que les $\mathbb{C}[G]$-modules $\mathbb{C}\,X$ et $\mathbb{C}\,Y$ sont isomorphes.

(ix) Montrer que toutefois, les actions de G sur X et sur Y ne sont pas isomorphes pour $n \geq 3$.

Problème 4. (Groupes de l'année) *On se propose de montrer qu'à isomorphisme près, il existe exactement 6 groupes d'ordre $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ possédant un élément d'ordre 8. Soit*[3] *G un groupe d'ordre 2024.*

(i) Montrer que G possède un unique sous-groupe distingué V d'ordre 23.

(ii) En déduire que G possède un sous-groupe Q d'ordre 88, puis que l'on a $G = V \rtimes Q$.

(iii) Montrer que Q possède un unique sous-groupe distingué O d'ordre 11.

(iv) En déduire $Q = O \rtimes H$ pour tout 2-Sylow H de Q.

(v) Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}\,O$ est cyclique d'ordre 10, et a un unique élément d'ordre 2, à savoir $x \mapsto x^{-1}$. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}\,V$ possède exactement 4 sous-groupes, cycliques et engendrés par les automorphismes $v \mapsto v^i$ avec $i \in \{1, -1, 2, -2\}$. On donne la congruence $2^{11} \equiv 1 \bmod 23$.

On suppose désormais que G possède un élément d'ordre 8, et on fixe un 2-Sylow H de Q.

(vi) Montrer $H \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

3. On utilisera la lettre V pour rappeler Vingt-trois, Q pour Quatre-vingt-huit, O pour Onze et H pour huit.

On fixe dans ce qui suit un générateur h de H.

(vii) *En considérant un morphisme de groupes $H \to \operatorname{Aut} O$ bien choisi, montrer que soit Q est abélien, soit on a $hxh^{-1} = x^{-1}$ pour tout $x \in O$.*

(viii) *Montrer que si Q est abélien, il est cyclique.*

(ix) *On suppose Q cyclique. Montrer qu'il existe un générateur g de Q, et $i \in \{1, -1, 2, -2\}$, tels que pour tout $v \in V$ on a $gvg^{-1} = v^i$.*

(x) *On suppose Q non cyclique. Montrer qu'il existe $i \in \{1, -1\}$ tel que pour tout $v \in V$, et tout $x \in O$, on a $hvh^{-1} = v^i$ et $xvx^{-1} = v$.*

(xi) *Conclure.*