

	1	τ
1	1	1
η	1	-1

	1	τ	τ^2
1	1	1	1
η	1	j	j^2
η^2	1	j^2	j

TABLE 1. Table des caractères de $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, avec $j = e^{2i\pi/3}$.

Considérons maintenant $G = S_3$. Il a 3 classes de conjugaisons, avec pour représentants disons 1, (12) et (123), et de cardinaux respectifs 1, 3 et 2. Il y a donc 3 caractères irréductibles à trouver. Les caractères irréductibles de degré 1 sont les éléments de \hat{G} , et il y en a 2 évidents à savoir $\chi_1 = 1$ et $\chi_2 = \varepsilon$ (la signature). La formule $|G| = \sum_{i=1}^h \chi_i(1)^2$, ici $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, donne donc $\chi_3(1) = \dim \chi_3 = 2$. Des relations d'orthogonalité des colonnes on déduit :

# cent	6	2	3
# conj	1	3	2
	1	(12)	(123)
1	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

TABLE 2. Table des caractères de S_3 .

En fait, nous avons déjà rencontré à plusieurs reprise la représentation irréductible de dimension 2 de S_3 découverte ci-dessus :

– Par exemple, si T est un triangle équilatéral du plan euclidien (centré en 0), le groupe d'isométries de T est naturellement isomorphe à S_3 (permutation des 3 sommets). On a donc une représentation

$$S_3 \xrightarrow{\sim} \text{Iso}(T) \subset O(2) \subset GL_2(\mathbb{C}).$$

Elle a bien χ_3 pour caractère car elle envoie une transposition sur une réflexion orthogonale (de trace nulle) et un 3-cycle sur une rotation d'ordre 3 (de trace $2 \cos(\pm 2\pi/3) = -1$).

– On a aussi montré, pour tout $n \geq 2$, que la représentation naturelle de permutation de S_n sur \mathbb{C}^n se décompose sous la forme

$$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C} \oplus H, \quad \text{avec } H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_i x_i = 0\},$$

et aussi que H irréductible de dimension $n-1$. Pour $n=3$ on a donc nécessairement $\chi_H = \chi_3$. On peut le vérifier simplement car on connaît le caractère de χ_H : on a $\chi_{\mathbb{C}^n} = \chi_H + 1$ et $\chi_{\mathbb{C}^n}(\sigma)$ est le nombre de point fixe de $\sigma \in S_n$ sur $\{1, \dots, n\}$. Cela colle manifestement avec la table ci-dessus. Dans la base $e_1 - e_2, e_2 - e_3$ de H , remarquons que les éléments (12) et (123) de S_3 ont pour matrices matrices respectives $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

On a donc montré que toute représentation de dimension finie de S_3 est somme directe de a copies de la représentation triviale, b copies de la signature, et c copies de H , avec a, b, c uniques. Concrètement, cela signifie :

PROPOSITION 5.1. *Pour tout morphisme de groupe $\rho : S_3 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, il existe une unique décomposition $n = a + b + 2c$, avec $a, b, c \in \mathbb{N}$, telle que quitte à conjuguer ρ par une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on ait*

$$\rho((12)) = \begin{bmatrix} 1_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_c & 1_c \\ 0 & 0 & 0 & 1_c \end{bmatrix} \text{ et } \rho((123)) = \begin{bmatrix} 1_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1_c \\ 0 & 0 & 1_c & -1_c \end{bmatrix}.$$

LES GROUPES S_4 ET A_4

Considérons maintenant le cas $G = S_4$. D'après la Prop. 2.9 Chap. 4, il a 5 classes de conjugaisons, avec pour représentants disons 1, (12), (12)(34), (123) et (1234), et de cardinal 1, 6, 3, 8 et 6 respectivement. Il y a donc 5 caractères irréductibles à trouver. On prend encore $\chi_1 = 1$ et $\chi_2 = \varepsilon$. On dispose aussi du caractère irréductible $\chi_H = \chi_{\mathbb{C}^4} - 1$, de degré 3, donné par

$$\chi_H \mid 3 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1.$$

On rappelle que le produit de deux caractères est un caractère (Cor.4.9). On constate que le caractère $\varepsilon\chi_H$ est distinct de χ_H (valeurs différentes sur (12) par exemple). Comme ε est de degré 1, il est nécessairement irréductible car on a $\langle \varepsilon\chi, \varepsilon\chi \rangle = \langle \chi, \chi \rangle$ pour tout caractère χ : voir l'Exercice 9.26 pour une explication plus directe (et raisonnable). Ainsi, $\varepsilon\chi_H$ est un second caractère irréductible de dimension 3. Le caractère restant χ_3 est donc de dimension 2 car on a $24 - 1^2 - 1^2 - 3^2 - 3^2 = 2^2$. Des relations d'orthogonalité des colonnes on déduit par exemple les valeurs de χ_3 , et donc la table des caractères toute entière de S_4 :

# cent	24	4	8	3	4
# conj	1	6	3	8	6
	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_H	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi_H$	3	-1	-1	0	1

TABLE 3. Table des caractères de S_4 .

En fait, nous aurions pu deviner "la" représentation irréductible de dimension 2. En effet, on sait qu'il existe un morphisme surjectif $f : S_4 \rightarrow S_3$, et de sorte que "la" représentation irréductible de dimension 2 de S_3 mentionnée plus haut définit par composition (on dit aussi par *restriction*, voir aussi l'Exercice 9.27) une représentation irréductible de dimension 2 de S_4 . On sait que l'on a $f((12)(34)) = 1$, que $f(12)$ et $f(1234)$ sont des transpositions, et que $f(123)$ est un 3-cycle, de sorte que son caractère se déduit de la dernière ligne de la table des caractères de S_3 : on retrouve bien χ_3 ! Noter enfin que l'on a $\varepsilon\chi_3 = \chi_3$.

REMARQUE 5.2. C'est un exercice de vérifier que χ_H (resp. $\varepsilon\chi_H$) est le caractère de la représentation de dimension 3 obtenue en réalisant S_4 comme groupe des isométries d'un tétraèdre régulier (resp. groupe des isométries directes d'un cube).

En utilisant que f induit un morphisme surjectif $A_4 \rightarrow A_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, ainsi que la restriction à A_4 de la représentation H de S_4 , on vérifierait que la table des caractères de A_4 est :

# cent	12	4	3	3
# conj	1	3	4	4
	1	(12)(34)	(123)	(132)
1	1	1	1	1
η	1	1	j	j^2
η^2	1	1	j^2	j
χ_H	3	1	0	0

TABLE 4. Table des caractères de A_4 .

LE GROUPE A_5

Considérons maintenant le cas du groupe simple $G = A_5$, d'ordre 60. D'après l'Exercice 4.13 Chap. 4, il a exactement 5 classes de conjugaison, avec pour représentants disons 1, (12)(34), (123), (12345) et (12354), de cardinal 1, 15, 20, 12 et 12 respectivement. Il y a donc 5 caractères irréductibles à trouver. Comme $D(A_5) = A_5$, il n'y a qu'un caractère de degré 1 : le caractère trivial.

On dispose encore de la restriction à A_5 du caractère $\chi_H = \chi_{C^5} - 1$, de degré 4, donné par

$$\chi_H \mid 4 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1.$$

On constate $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = \frac{1}{60}(4^2 + 15 \cdot 0 + 20 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1^2) = 1$: c'est donc un caractère irréductible de A_5 par le Corollaire 4.17.⁴

Les degrés a, b, c des trois autres caractères vérifient donc $60 - 1^2 - 4^2 = 43 = a^2 + b^2 + c^2$. En regardant modulo 8 on constate que a, b, c sont impairs, donc égaux à 3 ou 5, et que la seule possibilité est $43 = 9 + 9 + 25$. On a donc $\chi_3(1) = \chi_4(1) = 3$ et $\chi_5(1) = 4$.

En fait, on connaît un caractère de degré 5. En effet, on sait que A_5 agit transitivement sur un ensemble Y à 6 éléments (encore l'action exotique!). On a donc encore une décomposition en somme directe de deux sous-modules

$$\mathbb{C}Y = D \oplus H'$$

avec $D = \mathbb{C} \sum_{y \in Y} e_y \simeq \mathbb{C}$ (trivial) et $H' = \{\sum_{y \in Y} \lambda_y e_y \mid \sum_y \lambda_y = 0\}$, puis $\chi_{H'} = \chi_{\mathbb{C}Y} - 1$. On a vu que dans l'action exotique, un 3-cycle de A_5 agit par un double 3-cycle de Y , un 5-cycle de A_5 agit par un 5-cycle de Y , et une double-transposition de A_5 par une double-transposition de Y . On en déduit

$$\chi_{H'} \mid 5 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0.$$

Comme $5^2 + 15 + 20 = 60$ c'est bien un caractère irréductible! En fait l'action exotique est 3-transitive, donc cela suivrait aussi de l'Exercice 9.1.

4. On aurait pu aussi le déduire du fait que A_5 agit 2-transitivement sur $\{1, \dots, 5\}$: voir l'Exercice 9.1).

REMARQUE 5.3. Si l'on ne connaissait pas l'action exotique, nous aurions en fait pu retrouver $\chi_{H'}$ comme suit. Considérons l'action naturelle de A_5 sur l'ensemble Z des parties à 2 éléments de $\{1, \dots, 5\}$. C'est une action transitive et on a $|Z| = 10$. On a clairement

$$\chi_{CZ} \mid 10 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0,$$

ainsi que $\langle \chi_{CZ}, 1 \rangle = \frac{1}{60}(10 + 2 \cdot 15 + 20) = 1$ et $\langle \chi_{CZ}, \chi_H \rangle = \frac{1}{60}(40 + 20) = 1$, de sorte que $\chi = \chi_{CZ} - 1 - \chi_H$ est un caractère de degré 5, et on constate que c'est $\chi_{H'}$.

Reste à déterminer les deux caractères de degré 3. On suppose qu'ils sont reliés au fait que A_5 se plonge dans $O(3) \subset GL_3(\mathbb{C})$ comme groupe d'isométrie de l'icosaèdre, et on pourrait en effet calculer ainsi ces caractères. Déduisons-les plutôt des relations d'orthogonalité. Posons

$$\begin{array}{c|ccccc} \chi_2 & 3 & a & b & c & d \\ \chi_3 & 3 & a' & b' & c' & d' \end{array}$$

On fait les observations suivantes :

- En contemplant la colonne (1 2 3) on a $|b|^2 + |b'|^2 = 0$, donc $b = b' = 0$.
- En écrivant $\langle \chi_2, \chi_{H'} \rangle = \langle \chi_3, \chi_{H'} \rangle = 0$, on a aussi $15 + 15a = 15 + 15a' = 0$, donc $a = a' = -1$.
- Tout 5-cycle $c = (super)$ est conjugué dans à $c^{-1} = (repus)$ par la double transposition $(rs)(eu) \in A_5$. On a donc $\chi(c) = \chi(c^{-1}) = \overline{\chi(c)}$ pour tout caractère χ de A_5 . On en déduit que c, d, c', d' sont des nombres réels.
- En contemplant chacune des deux dernières colonnes, on trouve donc $c^2 + (c')^2 = d^2 + (d')^2 = 3$ (cela utilise l'observation précédente), et par orthogonalité des colonnes $\{1, 4, 5\}$ on a aussi $1 + 3c + 3c' - 4 = 0$ et donc $c + c' = 1$, et de même $d + d' = 1$, de sorte que c et c' sont solutions de $x^2 + (1 - x)^2 = 3$, i.e $x^2 = x + 1$.

On a donc $c, c' \in \{\phi, \phi'\}$ avec

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(le nombre d'or et son conjugué, chers à l'icosaèdre!). Si on a $c = c'$, alors $1 - c = d = d' = 1 - c'$ et $\chi_2 = \chi_3$, une contradiction. Quitte à échanger χ_2 et χ_3 , on peut supposer $c = \phi$, et donc $d = 1 - \phi = \phi'$, et $c' = \phi'$ puis $d' = 1 - \phi' = \phi$. Cela conduit à la Table 5 ci-après !

#cent	60	4	3	5	5
#conj	1	15	20	12	12
	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	ϕ	ϕ'
χ_3	3	-1	0	ϕ'	ϕ
χ_H	4	0	1	-1	-1
$\chi_{H'}$	5	1	-1	0	0

TABLE 5. Table des caractères de A_5 .

On a vu que $SO(3)$ ne possède qu'une classe de conjugaison de sous-groupes isomorphes à A_5 : les groupes d'isométries directes des icosaèdres et dodécaèdres réguliers de l'espace euclidien de dimension 3 qui sont centrés en 0. Il peut donc sembler curieux qu'il y ait deux lignes de dimension 3. On rappelle que si D est un dodécaèdre régulier, son groupe d'isométries directes s'identifie au groupe alterné sur l'ensemble des 5 repères de D (Proposition 1.12 Chap. 4). C'est le choix d'une numérotation de ces 5 repères qui donne un isomorphisme $\text{Iso}^+(D) \simeq A_5$, puis par composition une représentation

$$\rho : A_5 \xrightarrow{\sim} \text{Iso}^+(D) \subset O(3) \subset GL_3(\mathbb{C}) \subset GL_3(\mathbb{C}).$$

Changer de numérotation des 5 repères revient à composer ρ à la source le morphisme ci-dessus par un int_σ avec $\sigma \in S_5$ (on rappelle que A_5 est distingué dans S_5). Si σ est dans A_5 , la représentation $\rho \circ \text{int}_\sigma$ de A_5 est isomorphe à ρ . En effet, on a $\rho \circ \text{int}_\sigma(g) = \rho(\sigma)\rho(g)\rho(\sigma)^{-1}$ pour $g \in A_5$. Mais il n'y a pas de raison que ce soit encore le cas si σ ne l'est pas... et ce n'est pas le cas pour χ_2 et χ_3 ! En effet, dans tous les cas le caractère de $\rho \circ \text{int}_\sigma$ est clairement $\chi_\rho \circ \text{int}_\sigma$. Pour $\sigma = (45)$, on constate que int_σ préserve les classes de conjugaison de 1, $(12)(34)$ et (123) dans A_5 , mais échange (12345) et (12354) . Comme χ_2 ne prend pas les même valeurs sur ces deux éléments (ce sont ϕ et ϕ'), $\chi_2 \circ \text{int}_{(45)}$ et χ_2 sont différents, et tout s'éclaircit !

REMARQUE 5.4. ([ATLAS des groupes finis](#)) Nous renvoyons au fabuleux [ATLAS des groupes finis](#), par Conway, Curtis, Norton, Parker & Wilson, pour des tables de caractères des 93 premiers groupes simples (incluant tous les 26 groupes sporadiques), ainsi qu'une multitude de renseignements les concernant. Les Figures 1 et 2 ci-contre reproduisent par exemple la page A_5 de [ATLAS](#) (pour que ce soit lisible, nous en avons fait deux pages, le format de [ATLAS](#) étant 42 cm \times 30 cm). Bien que la plus simple de toutes, une des caractéristique de l'[ATLAS](#) est déjà frappante sur cette page : le côté minimaliste, et admettons-le, un peu cryptique, des notations et des explications ! Nous renvoyons à l'introduction de l'[ATLAS](#) pour le détail des conventions et notations. Par exemple, la page A_5 ci-dessus contient aussi les tables des caractères de S_5 (noté $G.2$) et de \widetilde{A}_5 (noté $2.G$).

$A_5 \cong L_2(4) \cong L_2(5)$

Alternating group A_5 ; Linear group $L_2(4) \cong A_1(4) \cong U_2(4) \cong S_2(4) \cong O_3(4) \cong O_4^-(2)$;

Linear group $L_2(5) \cong A_1(5) \cong U_2(5) \cong S_2(5) \cong O_3(5)$

Order = $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Mult = 2

Out = 2

Constructions

Alternating $S_5 \cong G.2$: all permutations of 5 letters;

$A_5 \cong G$: all even permutations; 2.G and 2.G.2 : the Schur double covers

Linear (4) $GL_2(4) \cong 3 \times G$: all non-singular 2×2 matrices over F_4 ;

$SL_2(4) \cong PGL_2(4) \cong PSL_2(4) \cong G$; $\Gamma L_2(4) \cong (3 \times G).2$; $P\Gamma L_2(4) \cong \Sigma L_2(4) \cong P\Sigma L_2(4) \cong G.2$

Unitary (4) $GU_2(4) \cong 5 \times G$: all 2×2 matrices over F_{16} preserving a non-singular Hermitian form;

$PGU_2(4) \cong SU_2(4) \cong PSU_2(4) \cong G$

Orthogonal (4) $GO_3(4) \cong PGO_3(4) \cong SO_3(4) \cong PSO_3(4) \cong O_3(4) \cong G$: all 2×2 matrices over F_4 preserving a non-singular quadratic form; $\Gamma O_3(4) \cong P\Gamma O_3(4) \cong \Sigma O_3(4) \cong P\Sigma O_3(4) \cong G.2$

Orthogonal (2) $GO_4^-(2) \cong PGO_4^-(2) \cong SO_4^-(2) \cong PSO_4^-(2) \cong G.2$: all 4×4 matrices over F_2 preserving a quadratic form of Witt defect 1, for example $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3x_4$; $O_4^-(2) \cong G$

Linear (5) $GL_2(5) \cong 2.(G \times 2).2$: all non-singular 2×2 matrices over F_5 ;

$PGL_2(5) \cong G.2$; $SL_2(5) \cong 2.G$; $PSL_2(5) \cong G$

Unitary (5) $GU_2(5) \cong 3 \times 2.G.2$: all 2×2 matrices over F_{25} preserving a non-singular Hermitian form;

$PGU_2(5) \cong G.2$; $SU_2(5) \cong 2.G$; $PSU_2(5) \cong G$

Orthogonal (5) $GO_3(5) \cong 2 \times G.2$: the 3×3 matrices over F_5 preserving a non-singular quadratic form;

$PGO_3(5) \cong SO_3(5) \cong PSO_3(5) \cong G.2$; $O_3(5) \cong G$

Quaternionic 2.G is the group of those quaternions q for which the coordinates of $2q$ are :

$(\pm 2, 0, 0, 0)^A, (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm 1, \pm b5, \pm b5^*)^A$; these generate the icosian ring

Icosahedral $G \times 2$: symmetries of the vectors $(0, \pm 1, \pm b5^*)^C$ (vertices of icosahedron), or of $(\pm 1, \pm 1, \pm 1),$

$(0, \pm b5^*, \pm b5)^C$ (dodecahedron), or of $(\pm 2, 0, 0)^C, (\pm 1, \pm b5, \pm b5^*)^C$ (icosidodecahedron: the

reflections in these generate $G \times 2$). These vectors are obtained by deleting the real parts of

the above quaternions. G is the group of symmetries of determinant 1.

Presentations $2.G \cong \langle 2, 3, 5 \rangle$; $G \cong \langle 2, 3, 5 \rangle \cong G^{3,5,5} \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^3 = (x_1 x_2)^2 = 1 \rangle$;

$G.2 \cong \langle 2, 4, 5; 3 \rangle \cong \langle 2, 5, 6; 2 \rangle$; $G \times 2 \cong \xrightarrow{5} \cong G^{3,5,10}$; $G.2 \times 2 \cong G^{4,5,6}$

FIGURE 1. La page A_5 de l'ATLAS (moitié supérieure).

Maximal subgroups			Specifications					
Order	Index	Structure	G.2	Character	Abstract	Alternating	Linear (4)	Orthogonal (4)
12	5	A_4	: S_4	1a+4a	$N(2A^2)$	point	point	isotropic point
10	6	D_{10}	: 5:4	1a+5a	$N(5AB)$		$O_2^-(4), L_1(16)$	minus line
6	10	S_3	: 2 x S_3	1a+4a+5a	$N(3A)$	duad	$O_2^+(4)$, base	plus line

Orthogonal (2) Linear (5) Orthogonal (5) Icosahedral

isotropic point base base

$O_2^-(4)$ point isotropic point pentad axis

non-isotropic point $O_2^-(5), L_1(25)$ minus point triad axis

; @ @ @ @ @ ; ; @ @ @

60 4 3 5 5 6 2 3
 p power A A A A A A AB
 p' part A A A A A A AB
 ind 1A 2A 3A 5A B* fus ind 2B 4A 6A

x_1 + 1 1 1 1 1 : ++ 1 1 1
 x_2 + 3 -1 0 -b5 * + 0 0 0
 x_3 + 3 -1 0 * -b5 ↓
 x_4 + 4 0 1 -1 -1 : ++ 2 0 -1
 x_5 + 5 1 -1 0 0 : ++ 1 -1 1
 ind 1 4 3 5 5 fus ind 2 8 6
 2 6 10 10 8 6

x_6 - 2 0 -1 b5 * - 0 0 0
 x_7 - 2 0 -1 * b5 ↓
 x_8 - 4 0 1 -1 -1 : oo 0 0 13
 x_9 - 6 0 0 1 1 : oo 0 12 0

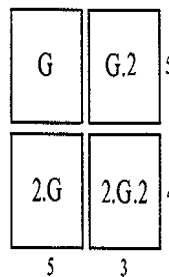


FIGURE 2. La page A_5 de l'ATLAS (moitié inférieure).