$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ en posant $w_{i,j}(x) = u_i^*(x)\, v_j$, pour $x \in U$. On conclut en observant que pour $i, j$ donnés, le coefficient en $w_{i,j}$ de $f_{A,B}(w_{i,j})$ est [3]

$$v_j^*(f_{A,B}(w_{i,j})(u_i)) = v_j^*(B(w_{i,j}(A(u_i)))) = v_j^*(B(u_i^*(A(u_i))v_j)) = A_{ii}v_j^*(B(v_j)) = A_{ii}B_{jj}.$$

□

Proposition 4.8. *Soit $g \in G$ d'ordre $d$ et $V$ un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension $n$. Alors $\rho_V(g)$ est diagonalisable et $\chi_V(g)$ est somme de $n$ racines $d$-èmes de l'unité. De plus, on a $\chi_{V^\vee} = \overline{\chi_V}$.*

Démonstration — En effet, la relation $g^d = 1$ dans $G$ entraîne $\rho_V(g)^d = \mathrm{Id}_V$. Comme $X^d - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, $\rho_V(g)$ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifiant $\lambda_i^d = 1$. Celles de $\rho_V(g^{-1}) = \rho_V(g)^{-1}$ sont donc les $\lambda_i^{-1}$. En particulier, on a $\chi_{V^\vee}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \sum_i \lambda_i^{-1} = \overline{\chi_V(g)}$.

□

Les trois derniers lemmes impliquent en particulier.

Corollaire 4.9. *Si $\chi$ et $\chi'$ sont des caractères (de $\mathbb{C}[G]$-modules de dimension finie), il en va de même de $\chi + \chi'$, $\chi\chi'$ et $\overline{\chi}$.*

Une propriéte importante des caractères résulte du simple lemme suivant. Si $V$ est un $\mathbb{C}[G]$-module, on pose

$$V^G = \{v \in V \mid g.v = v, \ \forall g \in G\}.$$

C'est le plus grand sous-espace vectoriel de $V$ sur lequel $G$ agit trivialement.

Lemme 4.10. *Si $V$ est un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie on a*

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

Démonstration — On regarde l'endomorphisme $p : V \to V, v \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.v$. Un changement de variables montre $g.p(v) = p(v)$ pour tout $v \in V$ et $g \in G$. On a donc $\mathrm{Im}\, p \subset V^G$. Mais pour $v \in V^G$ on a aussi $p(v) = \frac{1}{|G|}|G|v = v$, donc $p$ est un projecteur d'image $V^G$. On conclut car la trace d'un projecteur est égale à son rang.
□

Reformulons ce résultat. Reconsidérons le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{L}^2(G)$ de toutes les fonctions $G \to \mathbb{C}$, muni du produit scalaire hermitien $\langle f, f'\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{f'(g)}$.

Corollaire 4.11. *(même hypothèses) On a* $\dim V^G = \langle \chi_V, 1\rangle$.

3. Une autre manière de dire est que si l'on a $A \in \mathrm{M}_q(\mathbb{C})$ et $B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$ on constate $(BE_{i,j}A)_{i,j} = B_{i,i}A_{j,j}$. Ainsi, la trace de l'endomorphisme $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $M \mapsto BMA$, est $\sum_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q} A_{i,i}B_{j,j} = (\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, B)$.

EXEMPLE 4.12. (*Où l'on retrouve la formule de Burnside-Frobenius*, Lemme 1.14 Chap. 5) Supposons que $G$ agit sur l'ensemble fini $X$ et $V = \mathbb{C}\,X$. Un élément $\sum_{x\in X} \lambda_x\, x$ est dans $V^G$ si et seulement si la fonction $X \to \mathbb{C}, x \mapsto \lambda_x$, est constante sur les $G$-orbites. En particulier, $\dim V^G$ est le nombre $r$ de $G$-orbites de $X$. On en déduit $r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)$. Mais comme $\chi_V(g)$ est le nombre de points fixes de $G$ dans $V$ (Exemple 4.5) on retrouve Burnside-Frobenius.

Un des résultats phares de la théorie est le résultat suivant, dû à Frobenius et Schur.

THÉORÈME 4.13. (Orthogonalité des caractères) *Soient $U$ et $V$ deux $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles. On a*

$$\langle \chi_U, \chi_V\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } U \text{ et } V \text{ sont isomorphes,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

DÉMONSTRATION — Posons $W = \mathrm{Hom}(V, U)$. On constate sur la Formule (70) que l'on a $W^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, U)$. Le Corollaire 4.11 montre donc $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, U) = \langle \chi_W, 1\rangle$. Mais on a $\chi_W = \chi_V\overline{\chi_U}$ par les Propositions 4.7 et 4.8, et donc $\langle \chi_W, 1\rangle = \langle \chi_V, \chi_U\rangle$ par la formule définissant $\langle -, -\rangle$. On conclut par le Lemme de Schur 3.13, cas (i) et (ii) (pour $V \simeq U$ on a $\chi_V = \chi_U$ et donc on peut supposer $V = U$). $\square$

Dans le corollaire suivant, on convient $M^0 = \{0\}$.

COROLLAIRE 4.14. *Soit $U$ un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie. On suppose $U \simeq \oplus_{i=1}^r S_i^{\oplus n_i}$ où les $S_i$ sont des $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles deux à deux non isomorphes, et les $n_i$ sont des entiers $\geqslant 0$. Alors on a $n_i = \langle \chi_U, \chi_{S_i}\rangle$ pour tout $i = 1, \ldots, r$.*

DÉMONSTRATION — Le première assertion se déduit de la formule $\chi_U = \sum_i n_i \chi_{S_i}$ (Proposition 4.6), de la bilinéarité de $\langle -, -\rangle$, et de $\langle \chi_{S_i}, \chi_{S_j}\rangle = \delta_{i,j}$ (Théorème 4.13) $\square$

COROLLAIRE 4.15. *Si $U$ et $V$ sont des $\mathbb{C}[G]$-modules de dimension finie, on a*

$$U \simeq V \iff \chi_U = \chi_V.$$

DÉMONSTRATION — Par semi-simplicité (Maschke) il existe des $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles $S_1, \ldots, S_r$ deux à deux non isomorphes, ainsi que des entiers $n_i, m_i \geqslant 0$ pour $i = 1, \ldots, r$, tels que l'on a $U \simeq \oplus_{i=1}^r S_i^{\oplus n_i}$ et $V \simeq \oplus_{i=1}^r S_i^{\oplus m_i}$. Supposons $\chi_U = \chi_V$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ on a

$$n_i = \langle \chi_U, \chi_{S_i}\rangle = \langle \chi_V, \chi_{S_i}\rangle = m_i,$$

par la première assertion, et donc $U \simeq V$. $\square$

On en profite pour poser les définitions suivantes :

DÉFINITION 4.16. *Un* caractère *de $G$ est une fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ de la forme $\chi = \chi_V$ où $V$ est un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie. La fonction $\chi$ détermine uniquement $V$ à isomorphisme près. On dit que $\chi$ est irréductible si $V$ l'est. On note* $\mathrm{Car}\, G$ *l'ensemble des caractères de $G$, et* $\mathrm{Irr}\, G \subset \mathrm{Car}\, G$ *le sous-ensemble des caractères irréductibles.*

On a par exemple $\widehat{G} \subset \mathrm{Irr}(G)$ (caractères de degré 1, voir la Remarque 4.3). Un autre corollaire des relations d'orthogonalité est le critère d'irréductibilité suivant.

COROLLAIRE 4.17. *Soit* $\chi \in \mathrm{Car}\, G$*. On a* $\chi \in \mathrm{Irr}\, G \iff \langle \chi, \chi \rangle = 1$.

DÉMONSTRATION — Par Maschke et la Proposition 4.6, tout caractère $\chi$ s'écrit $\chi = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_i$ où les $\chi_i$ sont des caractères irréductibles distincts, et $n_i \in \mathbb{N}$. Les relations d'orthogonalité donnent $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$, et donc $\langle \chi, \chi \rangle = 1 \iff$ un et un seul des $n_i$ vaut 1 (*i.e.* ssi $\chi$ est l'un des $\chi_i$). □

On rappelle que la représentation régulière de $G$ (sur $\mathbb{C}G$) a été introduite dans l'Exemple 4.5 (ii), et que son caractère est noté $\chi_{\mathrm{reg}}$.

COROLLAIRE 4.18. *Tout* $\mathbb{C}[G]$*-module irréductible* $S$ *apparaît dans la décomposition en irréductibles de la représentation régulière, et ce avec une multiplicité* $\dim S$.

DÉMONSTRATION — Soit $S$ un $\mathbb{C}[G]$-module irréductible. D'après le corrollaire 4.14, il faut montrer $\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_S \rangle = \dim S$. On a vu $\chi_{\mathrm{reg}}(g) = 0$ pour $g \neq 1$, $\chi_{\mathrm{reg}}(1) = \dim \mathbb{C}\, G = |G|$ et $\chi_S(1) = \dim S$. On a donc bien $\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_S \rangle = \frac{1}{|G|}(|G| \dim S + 0) = \dim S$. □

On en déduit une partie du Théorème 4.1.

COROLLAIRE 4.19. *(Frobenius) Il n'y a qu'un nombre fini de* $\mathbb{C}[G]$*-modules irréductibles à isomorphisme près, et leurs dimensions* $n_1, \ldots, n_r$ *vérifient*

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2.$$

DÉMONSTRATION — D'après le corollaire précédent, on a $\mathbb{C}\, G \simeq \oplus_{i=1}^{s} S_i^{\oplus n_i}$ où les $S_i$ parcourent les classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles, nécessairement en nombre fini car $\mathbb{C}G$ est de dimension finie, et $n_i = \dim S_i$. On conclut car $|G| = \dim \mathbb{C}G = \sum_{i=1}^{s} n_i^2$. □

Soit $\mathrm{L}^2(G)_{\mathrm{cent}} \subset \mathrm{L}^2(G)$ le sous-espace vectoriel des fonctions centrales. Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est centrale si, et seulement si, elle est constante sur les classes de conjugaison. Comme ces classes sont disjointes, il en découle que $\mathrm{L}^2(G)_{\mathrm{cent}}$ a pour base les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison de $G$. En particulier, si $h$ est le nombre de telles classes, on en déduit :

$$\dim \mathrm{L}^2(G)_{\mathrm{cent}} = h \tag{71}$$

Le point culminant de cette partie est le théorème suivant, dû à Schur et Frobenius.

THÉORÈME 4.20. *Les caractères irréductibles de* $G$ *forment une base orthonormée de* $\mathrm{L}^2(G)_{\mathrm{cent}}$*. En particulier, on a* $|\mathrm{Irr}\, G| = h$.

À ce stade, presque tous les ingrédients sont en place. Notons $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$ le centre de l'anneau $\mathbb{C}[G]$. C'est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[G]$ contenant le centre $Z$ de $G$, et donc $\mathbb{C}[Z]$, mais elle contient bien d'autres éléments en général. Par exemple, on constate qu'elle contient l'élément $\sum_{g \in G} g$. Plus généralement, on a :

LEMME 4.21. (Centre de l'algèbre du groupe) *Soient* $f : G \to \mathbb{C}$ *une fonction et* $z := \sum_{g \in G} f(g)g \in \mathbb{C}[G]$*. Alors* $z \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G]) \iff f$ *est centrale.*

DÉMONSTRATION — Pour $h \in G$, on a

$$hzh^{-1} = \sum_{g \in G} f(g)hgh^{-1} = \sum_{g \in G} f(h^{-1}gh)g.$$

Comme $G$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}[G]$, cela conclut. □

Soit $S$ un $\mathbb{C}[G]$-module et $z \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$. L'application $\mathrm{m}_z : S \to S, v \mapsto z.v$, est alors $\mathbb{C}[G]$-linéaire. Supposons $S$ irréductible. Par le Lemme de Schur, $\mathrm{m}_z$ est donc une homothétie, de rapport que l'on notera $\lambda_S(z)$. On a défini une application

$$\lambda_S : \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \lambda_S(z).$$

C'est trivialement un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. Décrivons-le plus précisément :

LEMME 4.22. *Soient* $f : G \to \mathbb{C}$ *une fonction centrale,* $z := \sum_{g \in G} f(g)g \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$*, et* $S$ *un* $\mathbb{C}[G]$*-module simple. On a* $\lambda(z) = \frac{|G|}{\dim S}\langle f, \chi_{S^\vee}\rangle$*.*

DÉMONSTRATION — Comme $S \to S, v \mapsto zv$, est l'homothétie de rapport $\lambda_S(z)$, on a

$$\lambda_S(z) = \frac{\mathrm{trace}(z \mid S)}{\dim S} = \frac{\sum_{g \in G} f(g)\chi_S(g)}{\dim S} = \frac{|G|}{\dim S}\langle f, \chi_{S^\vee}\rangle.$$

□

DÉMONSTRATION — (du Théorème 4.20) Soient $\chi_1, \ldots, \chi_n$ les caractères irréductibles de $G$. Les relations d'orthogonalité montrent $\langle \chi_i, \chi_j\rangle = \delta_{i,j}$. Les $\chi_i$ sont donc $\mathbb{C}$-linéairement indépendants dans $\mathrm{L}^2(G)$ : si on a $0 = \sum_i \lambda_i \chi_i$, on en déduit en prenant $\langle -, \chi_j\rangle$ l'égalité $\lambda_j = 0$. En particulier, on a $n \leqslant \dim \mathrm{L}^2(G)_{\mathrm{cent}} = h$. Soit $f : G \to \mathbb{C}$ centrale. On veut montrer que $f$ est combinaison $\mathbb{C}$-linéaire des $\chi_i$. Quitte à remplacer $f$ par $f - \sum_{i=1}^n \langle f, \chi_i\rangle\chi_i$, on peut supposer $\langle f, \chi_i\rangle = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, et donc $\langle f, \chi\rangle = 0$ pour tout caractère $\chi$ (par Maschke). Mais le Lemme 4.22 montre alors que l'élément $z := \sum_{g \in G} f(g)g$ agit par 0 dans toutes les représentations irréductibles de $G$, et donc dans tous les $\mathbb{C}[G]$-modules de dimension finie. Il agit donc par 0 sur le $\mathbb{C}[G]$-module $\mathbb{C}\,G = \mathbb{C}[G]$ (représentation régulière). Mais on a $z.1 = z$, et donc $z = 0$ dans $\mathbb{C}[G]$, puis $f = 0$. □

Cela termine d'abord de démontrer le Théorème 4.1. La décomposition obtenue

$$\mathrm{L}^2(G)_{\mathrm{cent}} = \overset{\perp}{\bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G}} \mathbb{C}\chi,$$

redonne pour $G$ abélien la décomposition du Théorème 2.1 Chap. 3, et peut donc être vue comme une généralisation de ce dernier. C'est la *décomposition de Fourier des fonctions centrales*. Il existe également une décomposition de Fourier de toutes les fonctions : voir le Complément § 8.

Exemple 4.23. Soient $C$ une classe de conjugaison dans $G$ et $1_C \in \mathrm{L}^2(G)_{\mathrm{cent}}$ sa fonction caractéristique. Comme pour toutes les fonctions (Théorème 4.20), on a

$$1_C = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \lambda_\chi \chi$$

avec $\lambda_\chi = \langle 1_C, \chi \rangle$ (relations d'orthogonalité). Par définition de $\langle -, - \rangle$ on a aussi $\lambda_\chi = \frac{|C|}{|G|}\overline{\chi(C)}$, où $\chi(C)$ désigne $\chi(g)$ pour un $g$ arbitraire de $C$. Soient maintenant $C$ et $C'$ deux classes de conjugaison de $G$. On constate $\langle 1_C, 1_{C'} \rangle = \frac{|C|}{|G|}\delta_{C,C'}$. En développant, il vient $\langle 1_C, 1_{C'} \rangle = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \frac{|C||C'|}{|G|^2}\overline{\chi(C)}\chi(C')$. On a donc montré

$$\sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \chi(C)\overline{\chi(C')} = \begin{cases} 0 & \text{si } C \neq C', \\ \frac{|G|}{|C|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette relation s'appelle la *seconde relation d'orthogonalité*. Pour $C = C' = \{1\}$ elle redonne $\sum_\chi \chi(1)^2 = |G|$.

## 5. La table des caractères et exemples

Fixons $G$ un groupe fini. Notons $C_1, \ldots, C_h$ les classes de conjugaison de $G$, choisissons $g_j \in C_j$ pour tout $j$, et notons $\chi_1, \ldots, \chi_h$ les caractères irréductibles de $G$ (numérotations arbitraires). La *table des caractères* de $G$ est le tableau :

| | $g_1$ | $g_2$ | $\ldots$ | $g_h$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | $\chi_1(g_1)$ | $\chi_1(g_2)$ | $\ldots$ | $\chi_1(g_h)$ |
| $\chi_2$ | $\chi_2(g_1)$ | $\chi_2(g_2)$ | $\ldots$ | $\chi_2(g_h)$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\chi_h$ | $\chi_h(g_1)$ | $\chi_h(g_2)$ | $\cdots$ | $\chi_h(g_h)$ |

On rajoutera souvent en dessus de la premiere ligne la ligne des cardinaux $|C_j|$ des classes de conjugaison, et encore au dessus celle des $|G|/|C_j|$ (cardinal du centralisateur de $g_j$). Ces données permettent de vérifier *de visu* les deux familles de *relations d'orthogonalité* (colonnes et lignes) : pour tout $1 \leqslant a, b \leqslant h$

$$\sum_{j=1}^{h} |C_j|\, \chi_a(g_j)\overline{\chi_b(g_j)} \;=\; |G|\, \delta_{a,b} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{h} \chi_i(g_a)\overline{\chi_i(g_b)} = \frac{|G|}{|C_a|}\delta_{a,b}.$$

On retrouve par exemple $|G| = \sum_j |C_j|$ et $|G| = \sum_i \dim \chi^2$ pour $a = b = 1$. En général, on prend $g_1 = 1$ et on ordonne les $g_i$ par ordre croissant, et on prend aussi $\chi_1 = 1$ (caractère trivial) et on ordonne les $\chi_i$ par dimension croissante. Dans ce cas, la ligne $\chi_1$ ne contient que des 1, et la colonne $g_1$ les dimensions des $\chi_i$.

### Groupes abéliens

Pour $G$ abélien, on a clairement $h = |G|$ et aussi $\operatorname{Irr} G = \widehat{G}$ (Proposition 3.2). Ce cas n'est donc pas très interessant ! Par exemple, les tables de caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont donnés par la Table 1.

### Le groupe $\mathrm{S}_3$