REMARQUE 3.7. En utilisant notamment le lemme de Zorn, on pourrait montrer que l'hypothèse $\dim V < \infty$ est en fait inutile.

EXEMPLE 3.8. *Soient E un espace euclidien et $\rho : G \to \mathrm{O}(E)$ une représentation de G sur E par isométries euclidiennes. Alors le $\mathbb{R}[G]$-module E est semi-simple.* En effet, si $W \subset E$ est un sous-espace G-invariant, alors son orthogonal $W^{\perp}$ est un supplémentaire G-invariant de W.

EXEMPLE 3.9. (*Éléments semi-simples*) Soient $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ et $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_n(k)$, $m \mapsto g^m$, la représentation de $\mathbb{Z}$ associée (Exemple 1.2 (ii)). Alors *ρ est semis-simple si, et seulement si, tout sous-espace de k^n stable par g admet un supplémentaire stable par g* ; on dit aussi dans ce cas que g est *semi-simple*. Par exemple, l'élément $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $\mathrm{GL}_2(k)$ n'est pas semi-simple. *Si k est algébriquement clos, on a g semi-simple $\iff$ g diagonalisable*, par la propriété (b) et la Proposition 3.2.

THÉORÈME 3.10. (Maschke) *On suppose G fini et $|G|$ dans $k^{\times}$. Alors tout $k[G]$-module de dimension finie est semi-simple.*

DÉMONSTRATION — Soient V un $k[G]$-module de dimension finie. Soit $W \subset V$ un sous-module. Soit $p \in \mathrm{End}_k(V)$ un projecteur arbitraire d'image W. On a $V = W \oplus \ker p$. Supposons d'abord que p commute à l'action de G, *i.e.* $p \circ \rho_V(g) = \rho_V(g) \circ p$ pour tout g dans G. Alors $\ker p$ est stable par $\rho_V(g)$ pour tout g : c'est un supplémentaire G-stable de W. En général, on pose

$$p' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g) \circ p \circ \rho_V(g)^{-1}.$$

C'est un élément bien défini de $\mathrm{End}_k(V)$ car $|G|$ est inversible dans k. On a $\mathrm{Im}\, p' \subset \mathrm{Im}\, p = W$ car W est G-stable. Pour $x \in W$ et $g \in G$, on a $\rho_V(g)^{-1}(x) \in W$ et donc $p \circ \rho_V(g)^{-1}(x) = \rho_V(g)^{-1}(x)$, et donc $p'(x) = \frac{1}{|G|}|G|x = x$. Ainsi, p' est un projecteur d'image W. Enfin, p' commute à l'action de G, car le changement de variable $g \mapsto hg$ dans G montre $\rho_V(h) \circ p \circ \rho_V(h)^{-1} = p$ pour tout $h \in H$: on est donc ramené au cas précédent. □

REMARQUE 3.11. L'exemple de la représentation de permutation de S_n sur k^n avec $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $p \mid n$, montre que l'hypothèse sur $|G|$ est nécessaire.

REMARQUE 3.12. (*Astuce unitaire de Weyl*) Dans les cas particuliers $k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{C}$, le raisonnement suivant fournit une seconde démonstration du Théorème de Maschke. Soit V un $\mathbb{R}[G]$-module de dimension finie. Fixons $\langle -, - \rangle$ un produit scalaire arbitraire sur V. On construit un autre produit scalaire sur V en posant

$$x.y = \sum_{g \in G} \langle g.x | g.y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

En effet, sa bilinéarité est évidente et il est défini positif par l'inégalité $x.x \geqslant \langle x|x \rangle$. Enfin, on constate $hx.hy = x.y$ pour tout $h \in G$. Pour ce produit scalaire sur V on a $\rho(G) \subset \mathrm{O}(V)$, et donc V est semi-simple par l'Exemple 3.8. Dans le cas $k = \mathbb{C}$ on procède de même en moyennant par G un produit scalaire hermitien sur V. Ces deux remarques sont détaillées dans les Propositions 5.7 et 7.6 du Chapitre 5.

Soit V un $k[G]$-module semisimple de dimension finie. Il existe en général plusieurs décompositions distinctes $V = \oplus_{i=1}^{n} V_i$ où les V_i sont des sous-$k[G]$-modules irréductibles. Par exemple, si G agit trivialement sur V, toute décomposition de V en somme directe de droites convient, et il y a plusieurs telles décompositions si $\dim V > 1$. Nous allons voir qu'une forme forte d'unicité persiste toutefois. L'ingrédient important pour cela est le *lemme de Schur*. (Le (ii) ne nous servira que plus tard).

LEMME 3.13. (Schur) *Soient U et V deux $k[G]$-modules irréductibles.*

(i) Toute application $k[G]$-linéaire $U \to V$ est soit nulle, soit un isomorphisme.

(ii) Si de plus k est algébriquement clos, et si U est de dimension finie, les applications $k[G]$-linéaires $U \to U$ sont exactement les homothéties.

DÉMONSTRATION — Soit $u : U \to V$ une application $k[G]$-linéaire non nulle. Alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sous-modules de U et V respectivement : donc égaux à 0 ou au tout. Comme u est non nulle, on a $\ker u = \{0\}$ et $\operatorname{Im} u = V$, puis u est bijective : c'est un isomorphisme. Cela montre le (i).

Montrons le (ii). Les homothéties $\lambda \mathrm{id}_U$, avec $\lambda \in k$ sont clairement $k[G]$-linéaires. Réciproquement, soit $u \in \operatorname{Hom}_{k[G]}(U, U)$. Par hypothèse sur U et k, u admet une valeur propre $\lambda \in k$. Mézalor $u - \lambda \mathrm{id}_U \in \operatorname{End}_k U$ est $k[G]$-linéaire, et non injective, donc nulle par le (i), puis $u = \lambda \mathrm{id}_U$. □

PROPOSITION 3.14. *Soit V un $k[G]$-module semi-simple de dimension finie. On suppose donnée une décomposition $V = \oplus_{i \in I} V_i$, et pour tout $i \in I$, un $k[G]$-module irréductible de dimension finie S_i, tels que :*

(a) $V_i \subset V$ est un sous-module isomorphe à $S_i^{\oplus n_i}$ pour un certain $n_i \geqslant 1$,

(b) S_i et $S_{i'}$ ne sont pas isomorphes si $i \neq i'$.

Alors pour tout sous-module irréductible S de V, il existe un unique $i \in I$ tel que $S \simeq S_i$, et on a $S \subset V_i$.

On a utilisé la notation $M^{\oplus n}$ pour la somme directe externe de n copies de M (aussi isomorphe à M^n).

DÉMONSTRATION — (de la Proposition 3.14) Pour tout $i \in I$, écrivons $V_i = \oplus_{j=1}^{n_i} V_{i,j}$, avec $V_{i,j}$ un sous-module irréductible isomorphe à S_i. Tout élément v de V s'écrit alors de manière unique $v = \sum_{i,j} v_{i,j}$ avec $v_{i,j} \in V_{i,j}$. Notons $\pi_{i,j} : V \to V_{i,j}, v \mapsto v_{i,j}$, la projection canonique. Elle est $k[G]$-linéaire car les $V_{i,j}$ sont G-stables. Soit $S \subset V$ un sous-module irréductible. Alors $(\pi_{i,j})_{|S} : S \to V_{i,j}$ est soit nulle, soit un isomorphisme, par le lemme de Schur (i). Soit $v \in S$ non nul. Il existe (i, j) tels que $v_{i,j} \neq 0$: on a donc $v_{i,j} \in \pi_{i,j}(S) \neq \{0\}$. Ainsi, $(\pi_{i,j})_{|S}$ est un isomorphisme, et en particulier, on a $S \simeq S_i$. Mézalor $\pi_{i',j'}(S) = 0$ pour $i' \neq i$, toujours par Schur, ce qui signifie exactement $S \subset V_i$. □

Noter que pour tout $k[G]$-module V semi-simple de dimension finie, il existe par définition des V_i, des S_i et des n_i comme dans l'énoncé. Cette proposition montre que $V_i \subset V$ est canonique : c'est la somme des sous-modules de V isomorphes à S_i. On l'appelle *composante isotypique de S_i dans V*. L'entier n_i est appelé *multiplicité* *de* S_i dans V, ou encore *nombre de fois que* S_i *intervient dans* V. Il coincide avec $\frac{\dim V_i}{\dim S_i}$. Un problème important restant est donc :

Problème : *Peut-on classifier, à isomorphisme près, toutes les représentations* k*-linéaires irréductibles d'un groupe donné ?*

4. Théorie des caractères

Dans toute cette partie, G désigne un groupe fini et on s'intéresse aux représentations de G qui sont $\mathbb{C}$-linéaires et de dimension finie ($k = \mathbb{C}$). D'après Maschke, elle sont toutes semi-simples. On se propose d'étudier les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G, suivant Frobenius, Burnside et Schur. Nous allons notamment démontrer les résultats frappants suivants, dûs à Frobenius.

THÉORÈME 4.1. (Frobenius) *Soit* h *le nombre de classes de conjugaison du groupe fini* G.

(i) À isomorphisme près, il existe exactement h $\mathbb{C}[G]$*-modules irréductibles.*

(ii) Leurs dimensions $n_1, \ldots, n_h$ *vérifient* $|G| = \sum_{i=1}^{h} n_i^2$.

L'outil principal est la notion de caractère d'une représentation, inventée par Frobenius. (Elle aurait un sens sur tout corps k.) [2]

DÉFINITION 4.2. *Soient* V *un* $\mathbb{C}[G]$*-module de dimension finie et* $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *le morphisme associé. Le* caractère *de* V *est la fonction* $G \to \mathbb{C}, g \mapsto \mathrm{trace}(\rho(g))$. *On le note* χ_V *(ou* χ_ρ*). On a en particulier* $\chi_V(1) = \dim V$.

EXEMPLE 4.3. (i) Les caractères des représentations de dimension 1 de G sont exactement les éléments de $\widehat{G}$. Les éléments de $\widehat{G}$ seront dans ce chapitre appelés *caractères de degré* 1 de G, pour éviter le conflit de terminologie.

(ii) Le caractère de la représentation triviale est la fonction 1 (constante égale à 1 sur G).

Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est dite *centrale* si elle est constante sur les classes de conjugaison de G, ou ce qui revient au même, si on a

$$f(ghg^{-1}) = f(h) \ \forall g, h \in G.$$

Il est équivalent de demander $f(gh) = f(hg)$ pour tout $g, h \in G$.

PROPOSITION 4.4. *Pour tout* $\mathbb{C}[G]$*-module* V *de dimension finie, alors* χ_V *est une fonction centrale sur* G. *De plus, si* U *et* V *sont isomorphes, on a* $\chi_U = \chi_V$.

DÉMONSTRATION — Le premier point est la formule $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$, pour $A, B \in \mathrm{GL}(V)$. Le second s'en déduit car deux $\mathbb{C}[G]$-modules de dimension finie isomorphes ont même représentation matricielle dans des bases bien choisies. □

2. En fait, la définition initiale d'un caractère chez Frobenius, en 1896, ne fait pas intervenir la notion de représentation !

Nous verrons bientôt que la réciproque a la seconde assertion est vraie ! Avant cela donnons deux exemples importants de calcul de caractère.

EXEMPLE 4.5. (i) *(Représentations de permutation)* Supposons que G agit sur l'ensemble fini X et soit $V = \mathbb{C}X$ la représentation de permutation associée. Soit $g \in G$. Regardons sa matrice dans la base des e_x : la formule $\rho(g)e_x = e_{g.x}$ montre que $\mathrm{tr}(\rho(g))$ est le nombre de points fixes de G dans X.

(ii) *(Représentation régulière)* C'est le cas particulier $X = G$, et donc $V = \mathbb{C}G = \mathbb{C}[G]$. On note $\chi_{\mathrm{reg}} := \chi_{\mathbb{C}G}$ son caractère. On a $\chi_{\mathrm{reg}}(1) = |G|$ et $\chi_{\mathrm{reg}}(g) = 0$ pour $g \neq 1$.

Le caractère d'une somme directe est la somme des caractères :

PROPOSITION 4.6. *Soient U, V des $\mathbb{C}[G]$-modules de dimension finie, et $W = U \oplus V$. On a $\chi_W = \chi_U + \chi_V$.*

DÉMONSTRATION — C'est évident ! Donnons les détails. Par définition de la somme directe externe W de U et V, on a $W = U \oplus V$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et pour $g \in G$, $u \in U$ et $v \in V$, $\rho_W(g)(u+v) = \rho_U(g)(u) + \rho_V(g)(v)$. Ainsi, si l'on considère une base w de W de la forme $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$ avec les u_i une base de U et les v_j une base de V, on a

$$\mathrm{Mat}_w\, \rho_W(g) = \begin{bmatrix} \mathrm{Mat}_u\, \rho_U(g) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_v\, \rho_V(g) \end{bmatrix}.$$

On conclut en prenant la trace. □

Si U et V sont des $k[G]$-modules, l'espace $\mathrm{Hom}_k(U, V)$ des applications k-linéaires $\phi : U \to V$ est muni d'une structure naturelle de $k[G]$-module en posant

$$(g.\phi)(x) = g.\phi(g^{-1}.x). \tag{70}$$

On note $\mathrm{Hom}(U, V)$ ce $k[G]$-module. Dans le cas particulier $V = k$ (représentation triviale), on pose aussi $U^\vee = \mathrm{Hom}(U, k)$ et on parle de *représentation duale*, ou *contragrédiente*, de U.

PROPOSITION 4.7. *Soient U, V des $\mathbb{C}[G]$-modules de dimension finie.*

(i) Pour $W = \mathrm{Hom}(U, V)$ on a $\chi_W(g) = \chi_U(g^{-1})\chi_V(g)$, $\forall g \in G$.

(ii) En particulier, on a $\chi_{U^\vee}(g) = \chi_U(g^{-1})$ pour tout $g \in G$.

DÉMONSTRATION — Le (ii) se déduit du (i) (cas $V = \mathbb{C}$ trivial, donc $\chi_V = 1$). Pour tous endomorphismes A de U et B de V, on dispose de l'endomorphisme $f_{A,B} : M \mapsto B \circ M \circ A$ de $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$. Montrons

$$\mathrm{tr}(f_{A,B}) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B).$$

La proposition s'en déduira car par définition de la représentation W, on a pour $g \in G$ la relation $\rho_W(g) = f_{\rho_U(g)^{-1}, \rho_V(g)}$ (Formule 70). Soient u_i et v_j des bases de U et V, ainsi que u_i^* et v_j^* les bases duales associées. Notons $A_{i,i'}$ et $B_{j,j'}$ les matrices respectives de A et B dans u_i et v_j. On dispose d'une base $w_{i,j}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ en