

5. Extensions et cohomologie

Le premier but de cette section est de démontrer le cas abélien du théorème de Schur-Zassenhaus, et donc de compléter les démonstrations des théorèmes précédents. Cela va nous conduire à réexaminer d'un peu plus près la théorie des extensions de groupes (Hölder, Schreier), et d'aborder des notions de *cohomologie des groupes*. Pour une exposition plus systématique, nous renvoyons par exemple au Chapitre 4 du cours *Groupes finis* de J.-P. Serre.

Fixons deux groupes A et G (non nécessairement finis). On s'intéresse aux *extensions* (E) de G par A , c'est-à-dire aux suites exactes courtes

$$(E) \quad 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

Deux questions naturelles sont : peut-on classifier toutes ces extensions ? Une extension étant donnée, à quelle condition est-ce que le sous-groupe distingué $i(A) = \ker \pi$ de \tilde{G} admet un complément K dans \tilde{G} ? En effet, si c'est le cas alors \tilde{G} est produit semi-direct interne de K par $i(A)$ par la Proposition 7.7 Chap. 4.

On rappelle que la notion de section d'une surjection a été introduite au chapitre 1. Si $\pi : G \rightarrow G'$ est un *morphisme de groupes surjectif*, on appellera *section de groupes* une section de π qui est en outre un morphisme de groupes $G' \rightarrow G$.

LEMME 5.1. *Soit (E) comme ci-dessus. Il y a équivalence entre :*

- (i) $i(A)$ admet un complément dans \tilde{G} ,
- (ii) π admet une section de groupes $s : G \rightarrow \tilde{G}$,

Plus précisément, $s \mapsto s(G)$ est une bijection entre l'ensemble des sections de groupes de π et l'ensemble des compléments de $i(A)$ dans \tilde{G} .

DÉMONSTRATION — Montrons d'abord (ii) \implies (i). Soit s une section (ensembliste) de $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$. Tout élément de \tilde{G} s'écrit de manière unique $i(a)s(g)$ pour certains $a \in A$ et $g \in G$, et on a $i(A) \cap s(G) = \{s(1)\}$. Si s est un morphisme de groupes, le sous-groupe $K = s(G)$ vérifie donc $\tilde{G} = i(A)K$ et $i(A) \cap s(G) = \{1\}$: c'est un complément de $i(A)$.

Supposons réciproquement que K est un complément de $i(A)$ dans \tilde{G} : on a donc $i(A) \cap K = \{1\}$ et $\tilde{G} = i(A)K$. Le morphisme $\pi|_K : K \rightarrow G$ a donc pour noyau $i(A) \cap K = \{1\}$, et pour image $\pi(K) = \pi(i(A)K) = \pi(\tilde{G}) = G$ car $\pi(i(A)) = \{1\}$. C'est donc un isomorphisme. Notons $s : G \rightarrow K$ l'inverse de $\pi|_K$. C'est aussi un morphisme de groupes $G \rightarrow \tilde{G}$ vérifiant $\pi \circ s = \text{id}$: c'est la section de groupes de π vérifiant $s(G) = K$.

Les deux applications ci-dessus $K \mapsto s$ et $s \mapsto K$ sont clairement bijectives, d'où la dernière assertion. \square

DÉFINITION 5.2. *On dit que la suite exacte courte (E) est scindée si les conditions équivalentes du Lemme 5.1 sont satisfaites.*

Notre premier but dans ce qui suit sera d'examiner en détails l'obstruction à ce que la suite exacte courte (E) soit scindée *dans le cas particulier où A est abélien*. Soulignons cette hypothèse.

HYPOTHÈSE : On suppose désormais que le groupe A est abélien, noté additivement.

Nous allons commencer par observer que sous cette hypothèse, la donnée d'une suite exacte (E) munit le groupe abélien A d'une structure de G -module.

DÉFINITION 5.3. Un G -module est la donnée d'un groupe abélien $(A, +)$, muni d'une action $(g, a) \mapsto g.a$ de G sur A , vérifiant $g.(a + b) = g.a + g.b$ pour tout $g \in G$ et $a, b \in A$, ou ce qui revient au même, telle que le morphisme $G \rightarrow S_A$ associé à l'action de G sur A est à valeurs dans $\text{Aut}(A)$.

Vérifions que la donnée de la suite exacte courte (E) munit naturellement le groupe abélien A d'une structure de G -module. Pour $g \in G$ et $a \in A$ on pose

$$(51) \quad g.a = i^{-1}(\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1}),$$

où $\tilde{g} \in \tilde{G}$ est un élément quelconque de la fibre de π au dessus de g , i.e. avec $\pi(\tilde{g}) = g$. Cette définition a un sens car $i(A)$ est distingué dans \tilde{G} et i est injective. De plus, elle ne dépend pas du choix de \tilde{g} . En effet, tout autre élément de cette fibre est de la forme $\tilde{g}i(b)$ avec $b \in A$, et on a $\tilde{g}i(b)i(a)i(b)^{-1}\tilde{g}^{-1} = \tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1}$ car $A \simeq i(A)$ est abélien.

PROPOSITION-DÉFINITION 5.4. Pour toute extension (E) de G par un groupe abélien A , la formule (51) munit A d'une structure de G -module. On l'appellera structure de G -module induite par (E) , et on dira aussi que (E) est une extension de G par le G -module A .

DÉMONSTRATION — Il est clair que l'on a $1.a = a$ (prendre $\tilde{1} = 1$), $g.(h.a) = (gh).a$ (prendre $\tilde{gh} := \tilde{g}\tilde{h}$) et $g.(a + b) = g.a + g.b$ car on a $\text{int}_{\tilde{g}|_A} \in \text{Aut}(i(A))$. \square

EXEMPLE 5.5. (Extensions centrales) Une extension (E) de G par A est dite centrale si on a $i(A) \subset Z(\tilde{G})$, ou ce qui revient au même, si on a $g.a = a$ pour tout $g \in G$ et $a \in A$ (de sorte que le G -module A associé est trivial). Ce cas est déjà très intéressant. Par exemple, les extensions $1 \rightarrow \mu_n(k) \rightarrow \text{SL}_n(k) \rightarrow \text{PSL}_n(k) \rightarrow 1$, $1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3) \rightarrow 1$, ou encore les extensions de A_4, S_4 et A_5 par $\{\pm 1\}$ qui s'en déduisent, sont des extensions centrales.

Fixons une extension (E) de G par A et considérons une section *ensembliste* $s : \tilde{G} \rightarrow G$. Il en existe car π est surjective. Bien entendu, s n'a aucune raison d'être un morphisme de groupes. Observons que pour $g, g' \in G$, il existe un unique élément $c(g, g') \in A$ tel que

$$(52) \quad s(g)s(g') = i(c(g, g'))s(gg').$$

En effet, on a $\pi(s(g)s(g')) = \pi(s(g))\pi(s(g')) = gg' = \pi(s(gg'))$, et donc l'élément $s(gg')^{-1}s(g)s(g')$ est dans $i(A) = \ker \pi$. Par définition s est un morphisme de groupes si, et seulement si, on a $c(g, g') = 0$ pour tout $g, g' \in A$ (on rappelle que A est noté additivement). Ainsi, la fonction $c : G \times G \rightarrow A$ mesure l'obstruction à ce que s soit un morphisme de groupes. On la note $\text{Ob}(s)$. Ce n'est pas une fonction quelconque :

LEMME 5.6. Soient (\tilde{G}, i, π) une extension de G par A , s une section ensembliste de π et $c = \text{Ob}(s)$. On a

$$(53) \quad g.c(g', g'') - c(gg', g'') + c(g, g'g'') - c(g, g') = 0, \quad \forall g, g', g'' \in G.$$

DÉMONSTRATION — Pour $g, g', g'' \in G$ on calcule de deux façons, par associativité de la loi de groupes de \tilde{G} , l'élément $s(g)s(g')s(g'')$. On obtient d'une part

$$\begin{aligned} s(g) (s(g')s(g'')) &= s(g) i(c(g', g'')) s(g'g'') = \\ &= s(g) i(c(g', g'')) s(g)^{-1} s(g)s(g'g'') = i(g.c(g', g'')) i(c(g', g'')) s(gg'g'') \end{aligned}$$

(noter que $s(g)$ est un relèvement de g), et d'autre part

$$(s(g)s(g'))s(g'') = i(c(g, g')) s(gg')s(g'') = i(c(g, g')) i(c(gg', g'')) s(gg'g''),$$

puis la formule de l'énoncé (en notation additive) en simplifiant par $s(gg'g'')$ et par injectivité du morphisme i . \square

DÉFINITION 5.7. Si A est un G -module, on note $Z^2(G, A)$ l'ensemble des fonctions $G \times G \rightarrow A$ vérifiant l'identité (53). Une telle fonction est appelée 2-cocycle de G à valeurs dans A .

Que se passe-t-il si l'on change de section ? Une autre section de π est nécessairement de la forme $s_\epsilon : g \mapsto i(\epsilon(g)) s(g)$, où ϵ est une fonction arbitraire $G \rightarrow A$. Les 2-cocycles $c = \text{Ob}(s)$ et $c_\epsilon = \text{Ob}(s_\epsilon)$ sont alors liés par la formule

$$(54) \quad c_\epsilon(g, g') = c(g, g') + g.\epsilon(g') - \epsilon(gg') + \epsilon(g), \quad \forall g, g' \in G.$$

En effet, il suffit de constater

$$\begin{aligned} s_\epsilon(g)s_\epsilon(g') &= i(c_\epsilon(g, g'))s_\epsilon(gg') = i(c_\epsilon(g, g')) i(\epsilon(gg')) s(gg') \\ &= i(\epsilon(g)) s(g) i(\epsilon(g')) s(g') = i(\epsilon(g)) i(g.\epsilon(g')) s(g)s(g') = i(\epsilon(g) + g.\epsilon(g') + c(g, g')) s(gg'). \end{aligned}$$

DÉFINITION 5.8. Si A est un G -module, on note $B^2(G, A)$ l'ensemble des fonctions $f : G \times G \rightarrow A$ de la forme $(g, g') \mapsto g.\epsilon(g') - \epsilon(gg') + \epsilon(g)$, avec $\epsilon : G \rightarrow A$. Une telle fonction f est appelée 2-cobord de G à valeurs dans A .

Notons que $Z^2(G, A)$ et $B^2(G, A)$ sont manifestement des sous-groupes du groupe abélien de toutes les fonctions $G \times G \rightarrow A$ (pour l'addition des fonctions).

PROPOSITION-DÉFINITION 5.9. Pour tout G -module A , le groupe $B^2(G, A)$ est un sous-groupe de $Z^2(G, A)$ et on définit le 2ème groupe de cohomologie de G à valeurs dans A comme le groupe abélien quotient

$$H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A).$$

DÉMONSTRATION — Quand le G -module A est issu de notre construction, (ce qui est en fait toujours le cas comme on le verra plus loin) on constate que tout cobord est la différence de deux cocycles par la Formule (54). En général, le calcul trivial suivant montre $B^2(G, A) \subset Z^2(G, A)$:

$$gg'.\epsilon(g'') - g.\epsilon(g'g'') + g.\epsilon(g') - gg'.\epsilon(g'') + \epsilon(gg'g'') - \epsilon(gg') + g.\epsilon(g'g'') - \epsilon(gg'g'') + \epsilon(g) - g.\epsilon(g') + \epsilon(gg') - \epsilon(g) = 0$$

\square

SCHOLIE : Résumons les observations ci-dessus. Chaque extension (E) d'un groupe G par un groupe abélien A définit d'abord une structure de G -module sur A . De plus, si s est une section ensembliste de $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$, la classe

$$[\text{Ob}(s)] \in H^2(G, A)$$

ne dépend pas du choix de la section s par la formule (52), on la note $[E]$ et on l'appelle *classe de cohomologie* associée à (E).

PROPOSITION 5.10. *La suite exacte courte (E) est scindée si, et seulement si sa classe $[E] \in H^2(G, A)$ est nulle.*

DÉMONSTRATION — Si (E) est scindée, on peut trouver une section s qui est un morphisme de groupes par le Lemme 5.1. Pour une telle section, on a $\text{Ob}(s) = 0$, et on a donc $[E] = [\text{Ob}(s)] = [0] = 0$. Supposons inversement $[E] = 0$. Soient s une section arbitraire de π et $c = \text{Ob}(s) \in Z^2(G, A)$. On a donc $[E] = [c] = 0$ et donc $c \in B^2(G, A)$. Autrement dit, il existe $\epsilon : G \rightarrow A$ avec $c(g, g') = g \cdot \epsilon(g') - \epsilon(gg') + \epsilon(g)$. Mais par la Formule (54) cela signifie $c_{-\epsilon} = \text{Obs}(s_{-\epsilon}) = 0$, autrement dit la section $s_{-\epsilon}$ est un morphisme de groupes, et la suite est scindée par le Lemme 5.1. \square

EXEMPLE 5.11. Pour tout sous-groupe fini G d'ordre pair dans $\text{SO}(3)$, par exemple $G \simeq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}, D_{2n}, A_4, S_4$ et A_5 , on a construit à l'aide du morphisme $\text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3)$ une extension centrale non scindée

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1.$$

On en déduit dans chacun de ces cas que l'on a $H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est vu comme G -module trivial. De même on a $H^2(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$ pour $p \neq 2$, car l'extension centrale $1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow 1$ est non scindée.

Le cas abélien du théorème de Schur-Zassenhaus découle alors du :

THÉORÈME 5.12. (Schur-Zassenhaus, version cohomologique) *Soient G un groupe et A un G -module.*

- (i) *Si G est fini, alors on a $|G|x = 0$ pour tout $x \in H^2(G, A)$.*
- (ii) *Si A est fini, alors on a $|A|x = 0$ pour tout $x \in H^2(G, A)$.*

En particulier, si G et A sont finis avec $|G| \wedge |A| = 1$ on a $H^2(G, A) = 0$.

DÉMONSTRATION — Montrons le (i). Soit $c \in Z^2(G, A)$. Il faut montrer $|G|c \in B^2(G, A)$. Mais on a

$$c(g, g') = g \cdot c(g', g'') - c(gg', g'') + c(g, g'g''), \quad \forall g, g', g'' \in G.$$

Pour $g \in G$, considérons la somme finie $\epsilon(g) = \sum_{h \in G} c(g, h)$. Fixant g, g' et sommant sur tous les g'' dans le groupe fini G l'équation ci-dessus, on constate

$$|G|c(g, g') = g \cdot \epsilon(g') - \epsilon(gg') + \epsilon(g),$$

et on a gagné! Pour le (ii), on observe que pour toute fonction $f : G \times G \rightarrow A$ on a $|A|f = 0$ (Lagrange). Enfin, la dernière assertion découle de Bézout : il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u|A| + v|G| = 1$. Pour tout $x \in H^2(G, A)$ on a donc $x = u|A|x + v|G|x = 0 + 0 = 0$ par (i) et (ii). \square

Terminons cette section en expliquant, suivant Hölder et Schreier, comment $H^2(G, A)$ permet de classifier, pour une relation d'isomorphisme adéquate, les extensions de G par A . Il y a deux énoncés, de type existence et unicité.

PROPOSITION 5.13. (Existence) *Pour tout G -module A , et tout $x \in H^2(G, A)$, il existe une extension (E) de G par le G -module A vérifiant $[E] = x$.*

DÉMONSTRATION — Fixons $c \in Z^2(G, A)$. Observons d'abord que quitte à ajouter à c le cobord $(g, g') \mapsto -c(1, g) - g.c(1, g') + c(1, gg')$, qui vaut $-c(1, 1)$ en $(1, 1)$, on peut supposer $c(1, 1) = 0$.³ En prenant respectivement $(g, 1, 1)$, $(1, g, g^{-1})$ et (g^{-1}, g, g^{-1}) pour (g, g', g'') dans l'équation fonctionnelle de c on trouve alors

$$(55) \quad c(1, g) = c(g, 1) = 0 \text{ et } c(g, g^{-1}) = g.c(g^{-1}, g), \quad \forall g \in G.$$

On définit une loi de composition \star sur l'ensemble produit $A \times G$ en posant

$$(a, g) \star (a', g') = (a + g.a' + c(g, g'), gg').$$

(C'est une loi de produit semi-direct si $c = 0$!) La propriété $c \in Z^2(G, A)$ est alors équivalente à l'associativité de \star : c'est exactement le calcul fait dans le Lemme 5.6. La relation $c(1, g) = c(g, 1) = 0$ pour tout g montre que $(0, 1)$ est un élément neutre de \star , puis que (a, g) a pour inverse (a', g^{-1}) avec a' l'unique élément de A tel que $a + g.a' + c(g, g^{-1}) = 0$, ou ce qui revient au même $a' + g^{-1}a + c(g^{-1}, g) = 0$ car $c(g^{-1}, g) = g^{-1}c(g, g^{-1})$. Cela montre que \star est une loi de groupe sur $A \times G$.

L'application $i : A \rightarrow A \times G, a \mapsto (a, 1)$, est clairement injective, et un morphisme de $(A, +)$ dans $(A \times G, \star)$ par $c(1, 1) = 0$. La surjection canonique $\pi : A \times G \rightarrow G, (a, g) \mapsto g$, est clairement un morphisme de noyau $i(A)$. Une section ensembliste naturelle de π est $s(g) = (0, g)$. On a bien défini une suite exacte courte du type (E) avec $\tilde{G} = (A \times G, \star)$. Pour $a \in A$ et $g \in G$, un calcul direct montre

$$s(g) \star i(a) \star s(g)^{-1} = (g.a, 1) = i(g.a)$$

(utiliser $s(g)^{-1} = (-c(g^{-1}, g), g^{-1})$ et $c(g^{-1}, g) = g^{-1}.c(g, g^{-1})$) de sorte que la structure de G -module sur A induite par \tilde{G} est bien le G -module A dont on est parti. Enfin, par définition on a

$$s(g) \star s(g') = (0, g) \star (0, g') = (c(g, g'), gg') = (c(g, g'), 1) \star (0, gg')$$

et on a donc $c = \text{Ob}(s)$, puis $[c] = [E]$. □

PROPOSITION 5.14. (Unicité) *Soient A un G -module et $E_k = (\tilde{G}_k, i_k, \pi_k)$ pour $k = 1, 2$ deux extensions de G par le même G -module A . On a $[E_1] = [E_2]$ si, et seulement si, il existe un isomorphisme $\varphi : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ vérifiant $\varphi \circ i_1 = i_2$ et $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$.*

DÉMONSTRATION — Si $\varphi : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ est un morphisme comme dans l'énoncé, et si s_1 est une section de π_1 , on constate que $s_2 := \varphi \circ s_1$ est une section de π_2 . De plus, appliquant φ à $s_1(g)s_1(g') = i_1(c(g, g'))s_1(gg')$, et en utilisant $i_2 = \varphi \circ i_1$, on a $\text{Ob}(s_2) = \text{Ob}(s_1)$, puis $[E_1] = [E_2]$.

Supposons réciproquement $[E_1] = [E_2]$. Soient s_1 une section de π_1 , et $c = \text{Ob}(s_1)$. Comme $[E_2] = [c]$, on peut également trouver une section s_2 de π_2 avec

³ C'est typiquement ce qui se passe si on a $c = \text{Ob}(s)$ avec s vérifiant $s(1) = 1$, et c'est cela qui nous permet de deviner le calcul à faire.

$\text{Ob}(s_2) = c$. On a donc $s_k(g)s_k(g') = i_k(c(g, g'))s_k(gg')$ pour tout $g, g' \in G$ et $k = 1, 2$. Comme tout élément \widetilde{G}_k s'écrit de manière unique sous la forme $i_k(a)s_k(g)$ avec $a \in A$ et $g \in G$, on dispose d'une bijection $\varphi : \widetilde{G}_1 \rightarrow \widetilde{G}_2, i_1(a)s_1(g) \mapsto i_2(a)s_2(g)$, vérifiant manifestement $\varphi \circ i_1 = i_2$ et $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$. Pour $a, a' \in A, g, g' \in G$, et $k = 1, 2$, on constate $i_k(a)s_k(g)i_k(a')s_k(g') = i_k(a + g.a' + c(g, g'))s_k(gg')$, donc φ est un morphisme de groupes. \square

La notion d'isomorphisme entre deux extensions mise en avant dans l'énoncé ci-dessus s'exprime graphiquement par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & \widetilde{G}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \text{id} & \circlearrowleft & \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \downarrow \text{id} \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_2} & \widetilde{G}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

On prendra garde que la notion d'isomorphisme ci-dessus est très fine : il est fréquent d'avoir deux extensions $(\widetilde{G}_1, i_1, \pi_1)$ et $(\widetilde{G}_2, i_2, \pi_2)$ non isomorphes en tant qu'extensions, mais avec $\widetilde{G}_1 \simeq \widetilde{G}_2$. Toutefois, c'est cette notion d'isomorphisme qui donne lieu à des énoncés élégants.

COROLLAIRE 5.15. *Soit A un G -module. L'application $(E) \mapsto [E]$ induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}(G, A)$ des classes d'isomorphisme d'extensions de G par le G -module A et l'ensemble $H^2(G, A)$.*

On en déduit, par transport de structure, que $\mathcal{E}(G, A)$ est muni d'une loi de groupe abélien ! (Nous verrons dans l'Exercice 6.32, suivant Baer, comment définir cette loi de manière directe.) Par la Proposition 5.10, son élément neutre est l'extension naturelle de G par A définie par le produit semi-direct $A \rtimes G$ associé au morphisme donné $G \rightarrow \text{Aut}(A)$.

Tout ceci est un point de départ pour une étude plus approfondie de $\mathcal{E}(G, A)$, ou ce qui revient au même, des groupes $H^2(G, A)$. C'est une question en générale difficile. Pour aller plus loin, par exemple pour être en mesure de déterminer $H^2(G, A)$ pour des A et G concrets, il devient nécessaire d'avoir un point de vue plus abstrait sur les groupes $H^2(G, A)$ (voire même un point de vue topologique!). Ces développements dépassent le cadre introductif de ce cours. Mentionnons simplement le théorème suivant, dû à Schur (1911), qui classe les extensions centrales de A_n par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 5.16. (Schur) *Considérons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme A_n -module trivial. On a*

$$H^2(A_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ pour } n \geq 4.$$

On a aussi $H^2(A_3, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, par exemple par Schur-Zassenhaus ou même simplement par la classification des groupes d'ordre 6. On a déjà vu que \widetilde{A}_4 et \widetilde{A}_5 définissent des extensions centrales non scindées de A_4 et A_5 par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ respectivement : ce sont des générateurs de $H^2(A_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. D'après le théorème ci-dessus, ces groupes \widetilde{A}_n ont donc des analogues pour tout $n > 5$. En fait, Schur a aussi étudié les extensions centrales de A_n par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier impair. Pour $n \geq 3$, il a montré qu'elles sont toutes scindées, *i.e.* $H^2(A_n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$, sauf pour $p = 3$ et $n = 3, 4, 6$ ou 7 , auquel cas on a $H^2(A_n, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.