

Donc ζ normalise G_1 , int_ζ échange les tétraèdres T^+ et T^- , et préserve C et O . Soit

$$G_2 = \langle G_1, \zeta \rangle = G_1 \coprod \zeta G_1.$$

C'est un groupe d'ordre 48, et $\mathrm{int} : G_2 \rightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{H}^0)$ a pour noyau ± 1 et son image d'ordre 24 et incluse dans $\mathrm{Iso}(C) = \mathrm{Iso}(O)$. On en déduit

$$(37) \quad \mathrm{int}(G_2) = \mathrm{Iso}^+(C) = \mathrm{Iso}^+(O) \simeq S_4 \text{ et donc } G_2 \simeq \widetilde{S}_4.$$

Considérons enfin l'icosaèdre régulier I de \mathbb{H}^0 ayant pour sommets les

$$\pm J \pm \varphi K, \pm I \pm \varphi J \text{ et } \pm K \pm \varphi I,$$

avec φ le nombre d'or (voir l'Exercice 5.2). Explicitons, sans démonstration, le groupe $\mathrm{Iso}^+(I)$ et le groupe binaire associé. L'élément $\xi = \frac{1}{2}(\varphi + I + \varphi^{-1}J) \in \mathrm{Sp}(1)$ est de trace φ donc vérifie $\xi^2 - \varphi\xi + 1 = 0$ par Cayley-Hamilton. Il est donc d'ordre 10 car on a $\varphi = e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/5}$ dans \mathbb{C} . Il n'est pas difficile de vérifier qu'il satisfait $\mathrm{int}_\xi(I) = I$. En posant $G_3 = \langle G_1, \xi \rangle$ on peut montrer que l'on a

$$(38) \quad \mathrm{int}(G_3) = \mathrm{Iso}^+(I) \simeq A_5 \text{ et donc } G_3 \simeq \widetilde{A}_5.$$

3. Groupes linéaires et simplicité de $\mathrm{PSL}_n(k)$

Dans cette partie, on fixe un corps k un entier $n \geq 2$. Le groupe $\mathrm{GL}_n(k)$ contient $\mathrm{SL}_n(k)$ comme sous-groupe distingué, et \det induit un isomorphisme

$$\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{SL}_n(k) \simeq k^\times.$$

Reste à étudier le dévissage de $\mathrm{SL}_n(k)$. On notera $Z_n(k)$ le sous-groupe des homothéties dans $\mathrm{SL}_n(k)$. C'est un sous-groupe central, donc distingué, de $\mathrm{SL}_n(k)$. On a un isomorphisme de groupes

$$\mu_n(k) \xrightarrow{\sim} Z_n(k), \lambda \mapsto \lambda 1_n,$$

avec $\mu_n(k) = \{x \in k^\times \mid x^n = 1\}$ (sous-groupe des racines n -ièmes de l'unité dans k^\times , un sous-groupe cyclique de k^\times d'ordre divisant n). Notre but principal est de démontrer le résultat suivant, connu semble-t-il de Galois pour $n = 2$ et $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et dû à Jordan et Dickson en général.

THÉORÈME 3.1. *On suppose $n \geq 3$, ou $n = 2$ et $|k| > 3$. Alors tout sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(k)$ est égal à $\mathrm{SL}_n(k)$, ou est inclus dans $Z_n(k)$.*

Pour $H \triangleleft G$, les sous-groupes distingués de G/H sont en bijection avec ceux de G contenant H . On en déduit, posant $\mathrm{PSL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k)/Z_n(k)$:

COROLLAIRE 3.2. *Sous les mêmes hypothèses, le groupe $\mathrm{PSL}_n(k)$ est simple.*

Nous reviendrons sur les deux cas $n = 2$ et $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ un peu plus loin.

3.1. Transvections. Tout comme dans l'étude des groupes S_n et $O(n)$, les éléments de $\mathrm{SL}_n(k)$ ayant un maximum de points fixes, c'est-à-dire un hyperplan fixe, joueront un rôle particulièrement important.

DÉFINITION 3.3. *Soit V un k -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Une transvection de V est un élément t de $\mathrm{SL}(V)$ tel que $\dim \ker(t - \mathrm{id}_V) = n - 1$, ou ce qui revient au même, tel que $t - \mathrm{id}_V$ est de rang 1.*

EXEMPLE 3.4. (*Transvections standards de $SL_n(k)$*) Ce sont les matrices de la forme $T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in k^\times$ et $1 \leq i \neq j \leq n$ (pour avoir $\det T_{i,j}(\lambda) = 1$). La transvection standard $T_{i,j}(\lambda)$ est une transvection de k^n d'hyperplan fixe $x_j = 0$. Il sera commode d'en choisir une, c'est pourquoi on pose

$$t_n := T_{n,n-1}(1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Non seulement les transvections engendrent $SL_n(k)$, mais on a :

PROPOSITION 3.5. *Les transvections standards engendrent $SL_n(k)$.*

DÉMONSTRATION — C'est un argument classique d'opérations sur les lignes et les colonnes (*pivot de Gauss*), qui sera revu plus tard dans le cours dans le contexte plus général des anneaux euclidiens : voir le Théorème 4.1 Chap. 8. \square

Soit H un hyperplan de V fixé. Décrivons les transvections d'hyperplan fixe H . Fixons pour cela $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V avec $H = \text{Vect}_k(e_1, \dots, e_{n-1})$. Un élément t de $SL(V)$ vaut l'identité sur H si et seulement si il existe $x \in k^{n-1}$ avec

$$(39) \quad \text{Mat}_e t = \begin{bmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_n(k)$$

L'image de $t - \text{id}_V$ est alors engendrée par $v := \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$, qui est un vecteur quelconque de H . Ainsi, t est une transvection si, et seulement si, on a $v \neq 0$.

PROPOSITION 3.6. *Les transvections sont conjuguées dans $GL_n(k)$, et pour $n > 2$ elles sont conjuguées dans $SL_n(k)$.*

DÉMONSTRATION — Soit t une transvection d'hyperplan fixe H . Pour $g \in GL(V)$ on a $\det(gt g^{-1}) = \det t = 1$, et $gt g^{-1} - \text{id}_V = g(t - \text{id}_V)g^{-1}$ a même rang que $t - \text{id}_V$ (et pour noyau l'hyperplan $g(H)$). Le conjugué par $GL(V)$ d'une transvection est donc une transvection.

Soit maintenant t une transvection de V d'hyperplan fixe H . Fixons $e_n \in V \setminus H$ arbitrairement. L'élément $e_{n-1} := t(e_n) - e_n$ est dans H par la discussion ci-dessus. Complétons-le en une base e_1, \dots, e_{n-1} de H . On constate que dans la base $e = (e_1, \dots, e_n)$, la matrice de t est t_n . On a montré que toute transvection dans $GL_n(k)$ est conjuguée à t_n , d'où le premier point.

Pour le second, soit $t \in SL_n(k)$ une transvection. On a montré qu'il existe $g \in GL_n(k)$ tel que $gt g^{-1} = t_n$. Observons que pour $n > 2$, et tout $\lambda \in k^\times$, il existe $h \in GL_n(k)$ qui commute avec t_n et tel que $\det h = \lambda$: l'élément $\text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$ convient ! Prenant un tel h pour $\lambda = (\det g)^{-1}$, on a alors $(hg)t(hg)^{-1} = t_n$ et $\det hg = \lambda \det g = 1$. \square

REMARQUE 3.7. *On peut montrer que pour $x, y \in k$, les transvections standards $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont conjuguées dans $SL_2(k)$ si, et seulement si, on a $y = u^2 x$ pour un certain $u \in k^\times$ (voir l'Exercice 5.41). Par exemple, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont conjuguées dans $GL_2(\mathbb{R})$ mais pas dans $SL_2(\mathbb{R})$.*

3.2. Centre et groupe dérivé de $\mathrm{SL}_n(k)$. En guise de premier pas vers le Théorème 3.1, on étudie le centre et le groupe dérivé de $\mathrm{SL}_n(k)$.

PROPOSITION 3.8. *Soit $g \in \mathrm{GL}_n(k)$. Il y a équivalence entre :*

- (i) g commute avec tous les éléments de $\mathrm{SL}_n(k)$,
- (ii) g préserve toutes les droites de k^n ,
- (iii) g est une homothétie.

DÉMONSTRATION — On peut supposer $n \geq 2$ car les trois propriétés sont toujours satisfaites pour $n = 1$. De plus, l'implication (iii) \implies (i) est évidente. Montrons (i) \implies (ii). Pour tout vecteur $v \in k^n$ non nul, et pour tout choix d'hyperplan H de k^n contenant v , l'analyse plus haut montre qu'il existe une transvection $t \in \mathrm{SL}_n(k)$ d'hyperplan fixe H telle que $\mathrm{Im}(t - I_n) = kv$. Comme g commute avec t , alors g préserve $\mathrm{Im}(t - \mathrm{id})$, et donc la droite kv , ce qui montre (ii). Montrons enfin (ii) \implies (iii). Soient e_1, \dots, e_n une base de k^n et $w = \sum_i e_i$. On a $g(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in k^\times$, et $g(w) = \lambda w$, donc $\lambda = \lambda_i$ pour tout i . \square

COROLLAIRE 3.9. *Le centre de $\mathrm{GL}_n(k)$ est $k^\times 1_n$, et celui de $\mathrm{SL}_n(k)$ est $\mathbb{Z}_n(k)$.*

PROPOSITION 3.10. *On suppose $n \neq 2$ ou $|k| > 3$. On a*

$$D(\mathrm{GL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k) \text{ et } D(\mathrm{SL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k).$$

DÉMONSTRATION — Le morphisme déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(k) \rightarrow k^\times$, et la commutativité de k^\times , montrent que l'on a $D(\mathrm{GL}_n(k)) \subset \ker \det = \mathrm{SL}_n(k)$. Il suffit donc de montrer $\mathrm{SL}_n(k) \subset D(\mathrm{SL}_n(k))$.

Observons qu'il suffit de montrer qu'il existe une transvection de $\mathrm{SL}_n(k)$ qui est un commutateur. En effet, si on a $t = [x, y]$ avec $x, y \in \mathrm{SL}_n(k)$, alors pour tout $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ on a

$$gtg^{-1} = \mathrm{int}_g(t) = [\mathrm{int}_g(x), \mathrm{int}_g(y)]$$

avec $\mathrm{int}_g(x)$ et $\mathrm{int}_g(y)$ dans $\mathrm{SL}_n(k)$, puisque $\mathrm{SL}_n(k)$ est distingué dans $\mathrm{GL}_n(k)$. L'observation découle alors du fait que les transvections sont conjuguées sous $\mathrm{GL}_n(k)$ (Proposition 3.6).

Pour $\mu \in k^\times$, on constate l'identité dans $\mathrm{SL}_2(k)$

$$(40) \quad \left[\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & \mu^2 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $|k| > 3$, il existe $\mu \in k^\times \setminus \{\pm 1\}$, et donc $\mu^2 \neq 1$. Ainsi, on a trouvé une transvection standard qui est un commutateur dans $\mathrm{SL}_2(k)$. Supposons donc $n \geq 3$. Pour $h \in \mathrm{SL}_{n-1}(k)$ et $v \in k^{n-1}$ on a

$$(41) \quad \left[\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_{n-1} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} I_{n-1} & hv - v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 3$, il existe $g \in \mathrm{SL}_{n-1}(k)$ qui n'est pas l'identité! Choisisant v tel que $gv \neq v$, le commutateur ci-dessus est une transvection. \square

3.3. Le critère de simplicité d'Iwasawa. Pour démontrer le Théorème 3.1 nous allons utiliser un critère de simplicité découvert par K. Iwasawa. Formulé de manière optimale (voir l'Exercice 5.36), ce critère semble curieusement permettre de démontrer théoriquement la simplicité de tous les groupes simples finis!¹⁵

PROPOSITION 3.11. (Critère de simplicité d'Iwasawa) *Soit G un groupe agissant 2-transitivement sur l'ensemble X . On suppose qu'il existe $x \in X$ et $A \subset G_x$ avec :*

- (i) A est un sous-groupe abélien et distingué de G_x ,
- (ii) $\cup_{g \in G} gAg^{-1}$ engendre G .

Si N est un sous-groupe distingué de G , alors soit N contient $D(G)$, soit N est inclus dans le noyau de l'action de G sur X .

EXEMPLE 3.12. Esquissons comment retrouver la simplicité de A_5 par cette proposition et le fait (plus simple) $D(A_5) = A_5$. Noter que A_5 agit 2-transitivement sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. De plus, le stabilisateur du point 5 est $\simeq A_4$, qui contient le sous-groupe abélien distingué $K_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Mais les doubles transpositions sont conjuguées dans A_5 , et on vérifie qu'elles engendrent A_5 . Cela conclut !

DÉMONSTRATION — Soit K le noyau de l'action de G sur X . Soit N un sous-groupe distingué de G non inclus dans K . Montrons que l'action de N sur X est transitive. Fixons $x \in X$ (arbitraire) et regardons la N -orbite de x , disons Nx . Elle est stable par G_x : en effet, pour $g \in G_x$ on a $gNx = gNg^{-1}gx = Nx$ car N est distingué dans G . Mais G_x agit transitivement sur $X \setminus \{x\}$ car G agit 2-transitivement sur X . On en déduit que si $Nx \neq \{x\}$ alors $Nx = X$. Mais si $Nx = \{x\}$ pour tout $x \in X$, alors on a $N \subset K$. On a bien montré que N agit transitivement sur X .

Fixons maintenant x dans X comme dans l'énoncé. On a $G = NG_x$. En effet, pour tout $g \in G$, l'élément gx est de la forme nx avec $n \in N$, et donc $n^{-1}g \in G_x$, puis $g \in NG_x$. Fixons x , et $A \subset G_x$ comme dans l'énoncé. Pour $g \in G$ on a vu $g = nh$ avec $n \in N$ et $h \in G_x$, et donc

$$gAg^{-1} = nhAh^{-1}n^{-1} = nAn^{-1}$$

car A est distingué dans G_x . On déduit de (ii) que les nAn^{-1} avec $n \in N$ engendrent G , et en particulier $G = \langle N, A \rangle = NA$ par $N \triangleleft G$. Ainsi, le morphisme $A \rightarrow G/N, a \mapsto aN$, est surjectif, donc G/N est abélien car A l'est, et donc N contient $D(G)$. \square

3.4. Démonstration du Théorème 3.1. On peut supposer $n \geq 2$. Faisons agir $\mathrm{GL}_n(k)$ sur l'ensemble X des droites vectorielles de k^n . Elle est 2-transitive, et ce même restreinte à $\mathrm{SL}_n(k)$. En effet, si (e_1, e_2) et (f_1, f_2) sont deux couples de vecteurs linéairement indépendants de k^n , on peut les compléter en des bases e_i et f_i , et il existe $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ avec $g(ke_i) = kf_i$ pour tout i . Quitte à composer g à la source par un élément de $\mathrm{GL}_n(k)$ diagonal dans la base e_i , on peut supposer $g \in \mathrm{SL}_n(k)$.

¹⁵. Formulé en terme d'action primitive comme dans les exercices, il s'agirait de savoir si pour tout groupe simple fini non abélien, il existe un sous-groupe maximal possédant un sous-groupe abélien distingué non trivial. C'est loin d'être évident, mais cela semble vrai par la classification des groupes simples finis s'il on croit ce post [Mathoverflow](#) de Derek Holt.

Regardons par exemple le vecteur $e = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Le stabilisateur de ke dans $\mathrm{SL}_n(k)$ est le sous-groupe P des matrices de la forme

$$p_{g,x} = \begin{pmatrix} \det g^{-1} & x \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

avec $g \in \mathrm{GL}_{n-1}(k)$ et x un vecteur ligne dans k^{n-1} . On a $p_{g,x}p_{g',x'} = p_{gg',x''}$ avec $x'' = (\det g)^{-1}x' + gx$. On a donc une suite exacte courte naturelle (scindée !)

$$1 \rightarrow k^n \xrightarrow{x \mapsto p_{1,x}} P \xrightarrow{p_{g,x} \mapsto g} \mathrm{GL}_{n-1}(k) \rightarrow 1.$$

De sorte que $A := \{p_{1,x}, x \in k^{n-1}\}$ est un sous-groupe distingué de P isomorphe à $(k^{n-1}, +)$ (donc abélien). Noter que A contient par exemple les transvections standards $T_{1,j}(\lambda)$ avec $\lambda \in k^\times$ et $j > 1$ (en fait tout élément non trivial de A est une transvection !). Mais les $\mathrm{SL}_n(k)$ -conjugués de ces transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(k)$. En effet, pour $n \geq 3$ cela découle de la Proposition 3.6. Pour $n = 2$, cela vient de ce que pour $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(k)$ on a $wT_{1,2}(\lambda)w^{-1} = T_{2,1}(-\lambda)$, puis de la Proposition 3.5. On a montré que A vérifie les conditions (i) et (ii) d'Iwasawa.

Ainsi, le critère d'Iwasawa s'applique, et montre que tout sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(k)$ contient soit $D(\mathrm{SL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k)$ (Proposition 3.10 (ii)), soit est inclus dans le noyau de l'action, à savoir $\mu_n(k)$ (Proposition 3.8).

La même démonstration (en plus simple), montre aussi :

COROLLAIRE 3.13. *Sous les mêmes hypothèses, tout sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(k)$ est soit inclus dans k^\times , soit contient $\mathrm{SL}_n(k)$.*

REMARQUE 3.14. Les sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(k)$ contenant $\mathrm{SL}_n(k)$ s'identifient à ceux de $\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{SL}_n(k) \simeq k^\times$ (surjectivité du déterminant). Comme k^\times est abélien, ils sont tous distingués.

3.5. Groupes linéaires sur les corps finis. Lorsque k est un corps fini, le Théorème 3.1 fournit donc une série doublement infinie de groupes simples finis. On sait depuis Galois que le cardinal q d'un corps fini est toujours de la forme $q = p^n$ avec p premier et $n \geq 1$, et que pour tout tel q il existe un unique tel que corps à isomorphisme près, noté génériquement \mathbb{F}_q . On peut prendre bien sûr $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier. On a aussi $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, 1 + \omega\}$ avec $\omega^2 = \omega + 1$. Ces corps seront étudiés dans le cours Algèbre 2. Le cas $q = p$ sera déjà suffisamment riche pour nous ! Depuis Artin, les théoriciens des groupes notent souvent $L_n(q)$ le groupe $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, une notation pratique mais qui prête à confusion (et peu utilisée hors de ce sujet).

LEMME 3.15. *Si k est un corps fini à q éléments, on a*

$$|\mathrm{GL}_n(k)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n (q^i - 1).$$

DÉMONSTRATION — Une matrice $M \in M_n(k)$ est inversible si, et seulement si, ses colonnes forment une k -base de k^n . Il s'agit donc de dénombrer les bases ordonnées e_1, e_2, \dots, e_n de k^n . L'élément e_1 est quelconque non nul ($q^n - 1$ possibilités), et pour $i = 2, \dots, n$, on choisit récursivement e_i arbitrairement hors du sous-espace de dimension $i - 1$ engendré par les e_j avec $j < i$: il y a $q^n - q^{i-1}$ possibilités. \square

Toujours sous l'hypothèse que k a un nombre fini q d'éléments, on en déduit les cardinaux de $\mathrm{SL}_n(k)$ et $\mathrm{PSL}_n(k)$. En effet, la surjectivité du déterminant $\mathrm{GL}_n(k) \rightarrow k^\times$, et $|k^\times| = q - 1$, montrent

$$(42) \quad |\mathrm{SL}_n(k)| = \frac{|\mathrm{GL}_n(k)|}{q-1} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^n (q^i - 1).$$

De plus, le groupe multiplicatif k^\times est cyclique car k est fini d'après le Théorème 5.1 Chap. 2. On en déduit $|\mu_m(k)| = n \wedge (q - 1)$ puis

$$(43) \quad |\mathrm{PSL}_n(k)| = \frac{|\mathrm{SL}_n(k)|}{m} \text{ avec } m = |\mu_n(k)| = n \wedge (q - 1).$$

3.6. Le groupe $\mathrm{PGL}_n(k)$ versus $\mathrm{PSL}_n(k)$. On pose aussi

$$\mathrm{PGL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k)/k^\times.$$

On pose $k^{\times,n} = (k^\times)^{(n)} = \{x^n \mid x \in k^\times\}$ pour des raisons de lisibilité.

PROPOSITION 3.16. *On a une suite exacte courte naturelle*

$$1 \rightarrow \mathrm{PSL}_n(k) \longrightarrow \mathrm{PGL}_n(k) \longrightarrow k^\times/k^{\times,n} \rightarrow 1.$$

DÉMONSTRATION — Notons Z le sous-groupe des homothéties de $\mathrm{GL}_n(k)$, on a $Z \simeq k^\times$. En composant l'injection naturelle $\mathrm{SL}_n(k) \rightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ avec la projection naturelle $\mathrm{GL}_n(k) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$, on obtient un morphisme naturel $\mathrm{SL}_n(k) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$, $g \mapsto gZ$. Il a pour noyau $Z \cap \mathrm{SL}_n(k) = Z_n(k)$. Il induit donc un morphisme injectif

$$\mathrm{PSL}_n(k) \xrightarrow{i} \mathrm{PGL}_n(k), \quad gZ_n(k) \mapsto gZ.$$

D'autre part, on compose le déterminant $\mathrm{GL}_n(k) \rightarrow k^\times$ (surjectif) et la projection canonique $k^\times \rightarrow k^\times/k^{\times,n}$, on obtient un morphisme surjectif $f : \mathrm{GL}_n(k) \rightarrow k^\times/k^{\times,n}$, $g \mapsto (\det g)k^{\times,n}$. Comme on a $\det Z \subset k^{\times,n}$, ce morphisme f se factorise en

$$\pi : \mathrm{PGL}_n(k) \rightarrow k^\times/k^{\times,n}, \quad gZ \mapsto (\det g)k^{\times,n},$$

toujours un morphisme surjectif. Observons que pour $g \in \mathrm{GL}_n(k)$, on a $\det g \in k^{\times,n} \iff \exists \lambda \in Z, g\lambda \in \mathrm{SL}_n(k)$ (pourquoi?). On en déduit bien $\ker \pi = \mathrm{Im} i$. \square

On verra souvent $\mathrm{PSL}_n(k)$ comme un sous-groupe (distingué) de $\mathrm{PGL}_n(k)$ via l'injection naturelle i introduite ci-dessus.

EXEMPLE 3.17. (i) *Si le sous-groupe des carrés de k^\times est d'indice 2, par exemple pour $k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p > 2$, alors $\mathrm{PSL}_2(k)$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathrm{PGL}_2(k)$.*

(ii) *Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est d'ordre $p(p-1)(p+1) = p^3 - p$.*

(iii) *Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ont même cardinal. Ils sont isomorphes si, et seulement si, n est premier à $p-1$. En effet, cette condition est nécessaire car le centre de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est trivial, alors que celui $Z_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ l'est si et seulement si on a $\mu_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{1\}$, i.e. n premier à $p-1$. Elle est suffisante car le morphisme naturel $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est alors injectif entre deux groupes de même cardinal, et donc bijectif.*