

C'est donc un icosaèdre et il reste à voir qu'il est régulier. Mieux, il y a exactement 5 faces de I contenant le sommet x_3 , à savoir les triangles $x_3 p c_3(p)$ avec p dans P . Ces 5 triangles sont isométriques, car permutés transitivement par c_3 , et isocèles en x_3 . Comme G agit transitivement sur l'orbite I , la même chose vaut pour chacun des 12 sommets de I , de sorte que les triangles ci-dessus sont isocèles en chacun de leurs trois sommets : ils sont équilatéraux. Ainsi, I est un icosaèdre régulier. \square

REMARQUE 1.17. (Sous-groupes de $O(3)$) Soit H un sous-groupe de $O(3)$. La décomposition en produit direct interne $O(3) \simeq \{\pm 1\} \times SO(3)$ montre que si H contient -1 , il est de la forme $\{\pm 1\} \times H'$ avec $H' = H \cap SO(3)$. En revanche, si $-1 \notin H$ il faut faire attention qu'on n'a pas nécessairement $H \subset SO(3)$. Par exemple, $\text{Iso}(\mathbb{T}) \simeq S_4$ ne contient pas -1 , est distinct de $\text{Iso}^+(\mathbb{T})$. Toutefois, le morphisme $O(3) \rightarrow SO(3)$ donné par la décomposition en produit direct interne, envoyant g sur $(\det g)g$, a pour noyau $\{\pm 1\}$, de sorte qu'il identifie tout de même un tel H à un sous-groupe de $SO(3)$. Par exemple, $\text{Iso}(\mathbb{T}) \simeq S_4$ est bien isomorphe à un sous-groupe de $SO(3)$, à savoir un $\text{Iso}(\mathbb{C})$!

2. Le groupe $\text{Sp}(1)$ et géométrie euclidienne en dimensions 3 et 4

2.1. L'algèbre des quaternions de Hamilton. On se place dans $M_2(\mathbb{C})$ et l'on reconsidère les matrices I, J et $K = IJ$ de l'Exemple 6.2 Chap. 2 utilisées pour définir le sous-groupe $H_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ de $GL_2(\mathbb{C})$. Suivant Hamilton, on pose

$$\mathbb{H} := \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, I, J, K) \subset M_2(\mathbb{C}).$$

C'est à la fois un sous \mathbb{R} -espace vectoriel et un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$ (on dit que c'est une sous \mathbb{R} -algèbre) car H_8 est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$. On a

$$(26) \quad t1 + xI + yJ + zK = \begin{bmatrix} t + ix & -y - iz \\ y - iz & t - ix \end{bmatrix},$$

de sorte que $1, I, J, K$ est une \mathbb{C} -base de $M_2(\mathbb{C})$. En particulier, c'est une \mathbb{R} -base de \mathbb{H} et on a $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4$. On constate aussi que l'on a

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

On identifie \mathbb{R} au sous-corps $\mathbb{R}1 \subset \mathbb{H}$. La découverte de Hamilton est :

PROPOSITION 2.1. \mathbb{H} est un corps gauche de centre \mathbb{R} .

La clé pour comprendre cela sans calcul est *l'identité de Cayley-Hamilton*. On définit la *trace*, la *norme* et le *conjugué* d'un quaternion $q \in \mathbb{H}$ par les formules

$$t(q) = \text{trace } q, \quad n(q) = \det q \quad \text{et} \quad q^* = {}^t\bar{q} = t(q)1 - q \in \mathbb{H}.$$

Dans les coordonnées $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ on a donc

$$(27) \quad t(q) = 2t, \quad n(q) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad q^* = t1 - xI - yJ - zK.$$

En particulier, on a $n(q) = 0 \iff q = 0$. Le théorème de Cayley-Hamilton dans $M_2(\mathbb{C})$ s'écrit $q^2 - t(q)q + n(q)1 = 0$. Il est donc valable aussi dans \mathbb{H} et s'écrit :

$$(28) \quad qq^* = q^*q = n(q)1, \quad \forall q \in \mathbb{H}.$$

DÉMONSTRATION — (de la Proposition 2.1) Soit $q \in \mathbb{H} - \{0\}$. On a vu $n(q) \neq 0$ et donc $q \neq 0$ est inversible d'inverse $\frac{1}{n(q)}q^* \in \mathbb{H}$ par (28). Soit q dans le centre de \mathbb{H} . Alors q commute à $\text{vect}_{\mathbb{C}}\mathbb{H}_8 = M_2(\mathbb{C})$. Mais comme le centre de $M_n(k)$ est généralement constitué de scalaires, on a $q \in \mathbb{C}1 \cap \mathbb{H} = \mathbb{R}1$. \square

2.2. Le groupe $\text{Sp}(1)$. D'après la Proposition 2.1, le groupe multiplicatif \mathbb{H}^\times a pour ensemble sous-jacent $\mathbb{H} \setminus \{0\}$. Il est particulièrement intéressant ! Il n'est pas commutatif, par exemple il contient \mathbb{H}_8 comme sous-groupe. La norme $n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est multiplicative¹⁰ $n(qq') = n(q)n(q')$ car \det est multiplicatif, et on a aussi $n(q) > 0$ pour $q \neq 0$. Elle définit donc un morphisme de groupes

$$(29) \quad \mathbb{H}^\times \rightarrow \mathbb{R}_{>0}.$$

En particulier, les éléments de norme 1 de \mathbb{H}^\times forment un sous-groupe :

DÉFINITION 2.2. *On pose $\text{Sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid n(q) = 1\}$. C'est un sous-groupe du groupe multiplicatif \mathbb{H}^\times .*

Considérons l'application $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}$, $(t, x, y, z) \mapsto t + xI + yJ + zK$. Elle identifie la sphère unité euclidienne S^3 à $\text{Sp}(1)$. La loi de groupe de $\text{Sp}(1)$ *munir donc cette sphère d'une loi de groupe par transport de structure*, de la même manière que le cercle unité S^1 de \mathbb{R}^2 s'identifie au groupe des nombres complexes de module 1. C'est la loi de groupe que nous mettrons par la suite sur S^3 . C'est une loi non commutative ! On sait depuis E. Cartan (\simeq 1940) que ce sont les deux seules sphères S^n , avec $n \geq 1$, que l'on peut munir d'une loi de groupe topologique (voir la Remarque 7.5 Chap. 2).

REMARQUE 2.3. *Remarquons aussi que $\text{Sp}(1)$ s'identifie au sous-groupe suivant*

$$\text{Sp}(1) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. Le lecteur connaissant la géométrie hermitienne reconnaitra l'égalité $\text{Sp}(1) = \text{SU}(2)$ (voir le Complément 7), et le physicien reconnaitra aussi l'égalité $\text{Sp}(1) = \text{Spin}(3)$!

10. L'identité remarquable $n(qq') = n(q)n(q')$ s'écrit aussi, en coordonnées,

$$(T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2)(T'^2 + X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

avec $A = TT' - XX' - YY' - ZZ'$, $B = TX' + XT' + YZ' - ZY'$, $C = TY' + YT' - XZ' + ZX'$ et $D = TZ' + ZT' - YX' + XY'$. Elle montre qu'un produit de deux sommes de 4 carrés est "universellement" une somme de 4 carrés. Elle joue par exemple un rôle, ainsi que les quaternions, dans la démonstration du Théorème de Lagrange : voir le complément 7 Chap. 9.

Noter que \mathbb{R}^\times est un sous-groupe central de \mathbb{H}^\times , et que l'on a $n(\lambda) = \lambda^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. Ainsi, tout $q \in \mathbb{H}^\times$ s'écrit de manière unique $q = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $u \in \text{Sp}(1)$ et $\lambda = \sqrt{n(q)}$ (*décomposition polaire*), et on a un produit direct interne

$$(30) \quad \mathbb{H}^\times = \mathbb{R}_{>0} \times \text{Sp}(1).$$

En guise d'exemple, regardons les éléments d'ordre fini de \mathbb{H}^\times . Un élément $q \in \mathbb{H}$ vérifiant $q^m = 1$ satisfait $n(q)^m = 1$ et donc $n(q) = 1$ car la norme est ≥ 0 : il est donc dans $\text{Sp}(1)$. Commençons par l'ordre 2, qui est à part.

PROPOSITION 2.4. *L'élément -1 est l'unique élément d'ordre 2 de $\text{Sp}(1)$.*

DÉMONSTRATION — Pour $q \in \mathbb{H}$ on a $q^2 = 1 \iff (q-1)(q+1) = 0 \iff q = \pm 1$, car \mathbb{H} est un corps gauche. \square

Regardons maintenant les éléments d'ordre 4.

PROPOSITION 2.5. *Soit $q \in \text{Sp}(1)$. On a des équivalences entre : (i) q est d'ordre 4, (ii) $q^2 = -1$, et (iii) $t(q) = 0$.*

DÉMONSTRATION — Si q est d'ordre 4 si, et seulement si, q^2 est d'ordre 2, de sorte que l'on a (i) \implies (ii) par la proposition précédente. Par Cayley-Hamilton, on a $q^2 - t(q)q + 1 = 0$. On en déduit $q^2 = -1 \iff t(q)q = 0 \iff t(q) = 0$ (car q est inversible). \square

On pose $\mathbb{H}^0 = \{q \in \mathbb{H} \mid t(q) = 0\} = \mathbb{R}I + \mathbb{R}J + \mathbb{R}K$. un élément de \mathbb{H}^0 est appelé *quaternion pur*. Ainsi, les éléments $q \in \text{Sp}(1)$ avec $q^2 = -1$ constituent la sphère unité euclidienne $\{xI + yJ + zK \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, et en particulier il y en a une infinité!¹¹. Pour chaque tel q on constate que

$$\mathbb{C}_q = \{a + bq \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est une sous- \mathbb{R} -algèbre de \mathbb{H} isomorphe à \mathbb{C} (via $a + bi \mapsto a + bq$). Aucune de ces copies de \mathbb{C} à l'intérieure de \mathbb{H} n'est plus naturelle que les autres!¹² Pour $q \in \text{Sp}(1)$ avec $q^2 = -1$ on a $q^* = q^{-1} = -q$. Autrement dit, l'application $h \mapsto h^*$ induit la conjugaison complexe usuelle sur \mathbb{C}_q . En particulier, $\mathbb{C}_q^\times \cap \text{Sp}(1)$ est un sous-groupe de $\text{Sp}(1)$ isomorphe à S^1 , ce qui démontre que $\text{Sp}(1)$ contient des éléments de tout ordre fini possible.

2.3. L'espace euclidien \mathbb{H} . Nous allons maintenant utiliser la structure de quaternions pour faire de la géométrie euclidienne en dimensions 3 et 4. L'expression (27) pour n montre que $q \mapsto n(q)^{1/2}$ est une norme euclidienne sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{H} de dimension 4. Mieux, elle dit que $1, I, J, K$ en est une base orthonormée. Le produit scalaire associé est donné par la formule suivante :

$$(31) \quad \langle q, q' \rangle = \frac{1}{2}t(q^*q') = \frac{1}{2}(q^*q' + (q')^*q).$$

11. Le polynôme $X^2 + 1$ a donc une infinité de racines dans \mathbb{H} . C'est par ce que \mathbb{H} n'est pas commutatif! Par exemple, on a $h^2 + 1 \neq (h+I)(h-I)$ pour tout $h \in \mathbb{H}$, car le terme de droite vaut plutôt $h^2 + 1 + Ih - hI$.

12. Il n'est pas difficile de montrer que toute sous- \mathbb{R} -algèbre de \mathbb{H} est soit \mathbb{R} , soit \mathbb{H} , soit un \mathbb{C}_q (Exercice 5.28).

(On a utilisé $q + q^* = t(q)$ et $(qq')^* = (q')^*q^*$ pour tout $q, q' \in \mathbb{H}$, qui découle de $q^* = t\bar{q}$). En effet, il est manifestement \mathbb{R} -bilinéaire symétrique, et vérifie $\langle q, q \rangle = n(q)$ (et donc défini positif). On dispose alors gratuitement des jolies isométries suivantes :

(a) Pour $q \in \mathbb{H}^\times$ on définit deux éléments $L_q, R_q \in \mathrm{GL}(\mathbb{H})$ en posant $L_q(h) = qh$ et $R_q(h) = hq^{-1}$. Pour $q \in \mathrm{Sp}(1)$ ce sont des isométries ! car pour tout $h \in \mathbb{H}$ on a $n(qh) = n(q)n(h) = n(h)$ et de même $n(hq^{-1}) = n(h)$. On a les formules évidentes

$$(32) \quad L_{qq'} = L_q \circ L_{q'}, \quad R_{qq'} = R_q \circ R_{q'}, \quad L_q \circ R_{q'} = R_{q'} \circ L_q, \quad \forall q, q' \in \mathrm{Sp}(1).$$

(b) Pour $h \in \mathbb{H}$ on pose aussi $s(h) = -h^*$. On constate en coordonnées t, x, y, z que c'est la réflexion orthogonale par rapport à 1^\perp . On a les formules évidentes

$$(33) \quad s \circ L_q = R_q \circ s \text{ et } s \circ R_q = L_q \circ s, \quad \forall q \in \mathrm{Sp}(1).$$

Si $q \in \mathbb{H}$ est de norme 1, la réflexion orthogonale s_q de \mathbb{H} par rapport à l'orthogonal de $q = L_q(1)$ est donc donnée par la formule $s_q = L_q s L_{q^{-1}} = L_q R_{q^{-1}} s = s R_q L_{q^{-1}}$.

PROPOSITION 2.6. *L'application $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{O}(\mathbb{H}), (q_1, q_2) \mapsto L_{q_1} R_{q_2}$, est un morphisme d'image $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$ et de noyau d'ordre 2, engendré par $(-1, -1)$.*

DÉMONSTRATION — L'application π de l'énoncé est un morphisme de groupes par la Formule (32). Si (q, q') est dans $\ker \pi$, on a d'abord $qh = hq'$ pour tout $h \in \mathbb{H}$ puis $q = q'$ (cas particulier $h = 1$), puis $q \in \mathbb{R}$ par la Proposition 2.1, et donc $q = q' \in \mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}(1) = \{\pm 1\}$.

L'application $\mathrm{Sp}(1) \rightarrow \{\pm 1\}, q \mapsto \det L_q$, est continue donc constante égale à 1, car $\mathrm{Sp}(1)$ est homéomorphe au connexe \mathbb{S}^3 . On a donc $L_q \in \mathrm{SO}(\mathbb{H})$, et de même $R_q \in \mathrm{SO}(\mathbb{H})$. On en déduit $\mathrm{Im} \pi \subset \mathrm{SO}(\mathbb{H})$. On conclut par Cartan-Dieudonné car le produit de deux réflexions orthogonales de \mathbb{H} de vecteurs unités quelconques q_1 et q_2 est dans l'image de π : on a $s_{q_1} s_{q_2} = L_{q_1} R_{q_1^{-1}} s^2 R_{q_2} L_{q_2^{-1}} = L_{q_1 q_2^{-1}} R_{q_1^{-1} q_2}$. \square

Ainsi, le choix d'une base orthonormée de \mathbb{H} , par exemple $1, I, J, K$ pour fixer les idées, nous permet d'identifier $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$ à $\mathrm{SO}(4)$, et nous fournit donc une s.e.c.

$$(34) \quad 1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(4) \rightarrow 1.$$

Le cas de la dimension 3 n'est pas en reste. Considérons le sous-espace euclidien

$$\mathbb{H}^0 = 1^\perp = \{q \in \mathbb{H} \mid t(q) = 0\} = \mathbb{R}I + \mathbb{R}J + \mathbb{R}K.$$

Les éléments de \mathbb{H}^0 sont appelés *quaternions purs*.¹³ Pour $q \in \mathbb{H}^\times$ et $x \in \mathbb{H}$, on pose $\mathrm{int}_q(x) = qxq^{-1}$. Autrement dit, on a $\mathrm{int}_q = L_q R_q$. C'est un élément de $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$ fixant 1 : il préserve donc \mathbb{H}^0 et définit un élément de $\mathrm{SO}(\mathbb{H}^0)$.

PROPOSITION 2.7. *L'application $\mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{H}^0), q \mapsto \mathrm{int}_{q|_{\mathbb{H}^0}}$, est un morphisme surjectif noyau d'ordre 2 engendré par -1 .*

DÉMONSTRATION — Soit π l'application de l'énoncé. C'est clairement un morphisme de groupes. Si $q \in \ker \pi$ on a $qh = hq$ pour tout $h \in \mathbb{H}$, donc $q \in \mathbb{R}^\times$ par la Proposition 2.1, puis $q = \pm 1$. Toute isométrie directe de \mathbb{H}^0 se prolonge uniquement en une isométrie directe de \mathbb{H} fixant 1. Mais les isométries directes de \mathbb{H} sont de la forme $L_q R_{q'}$ par la Proposition 2.6. Une telle isométrie fixe 1 si et seulement si on a $qq'^{-1} = 1$, i.e. $q' = q$ et donc π est surjectif. \square

13. Le théorème de Cayley-Hamilton montre que l'on a $q \in \mathbb{H}^0$ si, et seulement si, $q^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Là encore, le choix d'une base orthonormée de \mathbb{H}^0 , par exemple I, J, K pour fixer les idées, nous permet d'identifier $\mathrm{SO}(\mathbb{H}^0)$ à $\mathrm{SO}(3)$, et fournit donc une suite exacte

$$(35) \quad 1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(3) \rightarrow 1.$$

Cette suite exacte est assez importante en mathématiques et en physique. Elle permet par exemple d'étudier la topologie de $\mathrm{SO}(3)$, vu comme fermé (en fait, compact) du sous-espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$. Sans rentrer dans les détails, qui seront abordés dans d'autres cours, le morphisme $\mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ est continu, et c'est même un revêtement à deux feuillets. Il montre que $\mathrm{SO}(3)$ est homéomorphe au quotient de S^3 par l'antipode $x \mapsto -x$: c'est l'espace projectif réel $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$. En particulier, l'espace topologique $\mathrm{SO}(3)$ n'est pas *simplement connexe*, et son *revêtement universel* est la sphère S^3 (qui le recouvre avec deux feuillets).¹⁴ Cela permet notamment de justifier mathématiquement le phénomène de torsion/détorsion du bras se produisant lorsque l'on fait faire deux tours complets à une tasse posée à plat dans sa main, ou encore le dénouage par translation d'une ceinture vrillée un nombre paire de fois (*expérience de la ceinture* de Dirac, comme sur cette [animation](#) issue du site [analysis situs](#)).

REMARQUE 2.8. Définissons $\mathrm{PSO}(n)$ comme le groupe quotient de $\mathrm{SO}(n)$ par son sous-groupe d'homothéties : on a $\mathrm{PSO}(n) = \mathrm{SO}(n)$ pour n impair et $\mathrm{PSO}(n) = \mathrm{SO}(n)/\{\pm 1\}$ pour n pair. Les suites exactes (35) et (34) montrent

$$\mathrm{PSO}(4) \simeq \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3).$$

Ce comportement est exceptionnel : on peut montrer que pour $n \geq 3$ et $n \neq 4$, le groupe $\mathrm{PSO}(n)$ est simple : voir les Exercices 5.14 et 5.16.

2.4. Sous-groupes finis de $\mathrm{Sp}(1)$. Nous allons maintenant utiliser la suite exacte (35) pour déterminer les sous-groupes finis de la sphère $\mathrm{Sp}(1)$. Fixons $\pi : \mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ le morphisme ci-dessus, surjectif de noyau $\{\pm 1\}$. On sait que π^{-1} induit une bijection entre sous-groupes de $\mathrm{SO}(3)$ et sous-groupes de G contenant $\{\pm 1\}$. Pour tout sous-groupe G de $\mathrm{SO}(3)$, on posera $\tilde{G} = \pi^{-1}(G)$. Par définition on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1.$$

En particulier on a $|\tilde{G}| = 2|G|$ et $\{\pm 1\}$ est dans le centre de G .

EXEMPLE 2.9. *Le sous-groupe H_8 de $\mathrm{Sp}(1)$ contient ± 1 . Son image $\pi(H_8) \subset \mathrm{SO}(3)$ est le groupe de Klein préservant chaque droite $\mathbb{R}I, \mathbb{R}J$ et $\mathbb{R}K$. Par exemple $\mathrm{int}_I(I) = I$, $\mathrm{int}_I(J) = -J$ et $\mathrm{int}_I(K) = -K$.*

Le théorème suivant ramène la classification des sous-groupes finis de $\mathrm{Sp}(1)$ à celle des sous-groupes de $\mathrm{SO}(3)$, déjà comprise.

THÉORÈME 2.10. *Un sous-groupe fini de $\mathrm{Sp}(1)$ est soit d'ordre impair et cyclique, soit d'ordre pair et de la forme \tilde{G} pour un unique sous-groupe G de $\mathrm{SO}(3)$.*

¹⁴. En faisant agir $\mathrm{Sp}(1)$ sur la sphère euclidienne S^2 via le morphisme $\mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ ci-dessus, on construit aussi une application continue $S^3 \rightarrow S^2$ de fibres homéomorphes à S^1 : c'est la *fibration de Hopf*, chère aux topologues.

DÉMONSTRATION — On a déjà dit que $G \mapsto \tilde{G}$ est une bijection entre sous-groupes (d'ordre n) de $\mathrm{SO}(3)$ et sous-groupes (d'ordre $2n$) de $\mathrm{Sp}(1)$ contenant -1 .

Observons d'abord que H est d'ordre pair si, et seulement si, on a $-1 \in H$. En effet, si l'élément -1 (d'ordre 2) est dans H alors $|H|$ est pair par Lagrange. Réciproquement, si on a $|H|$ alors H possède un élément d'ordre 2, mais on sait que le seul élément d'ordre 2 de \mathbb{H}^\times est -1 par la Proposition 2.4, on a donc $-1 \in H$.

Soit enfin H un sous-groupe fini de $\mathrm{Sp}(1)$ ne contenant pas -1 , ou ce qui revient au même, d'ordre impair. Le morphisme $\pi|_H : H \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ est alors injectif, donc $H \simeq \pi(H)$ est isomorphe à un sous-groupe d'ordre impair de $\mathrm{SO}(3)$. Mais on constate sur la classification de Klein que les seuls sous-groupes d'ordres impairs de $\mathrm{SO}(3)$ sont cycliques, donc H est cyclique. \square

2.5. Groupes binaires des solides de Platon. Identifions encore l'espace euclidien \mathbb{H}^0 à l'espace euclidien standard \mathbb{R}^3 via la base orthonormée I, J, K . Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ un solide de Platon centré en 0. Le sous-groupe

$$\widetilde{\mathrm{Iso}^+(P)}$$

est appelé *groupe binaire de P* , c'est un groupe intéressant ! Si P est un tétraèdre (resp. cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre), on a vu que $\mathrm{Iso}^+(P)$ est un A_4 (resp. S_4, S_4, A_5, A_5), de sorte que l'on note aussi

$$\tilde{A}_4, \tilde{S}_4 \text{ et } \tilde{A}_5$$

les 3 groupes binaires correspondants. L'abus de langage consistant à oublier le solide P est assez anodin. En effet, les groupes d'isométries directes de deux solides de Platon P et P' centrés en 0 supposés similaires ou duaux l'un de l'autre sont conjugués dans $\mathrm{SO}(3)$, disons $\mathrm{Iso}^+(P') = g\mathrm{Iso}^+(P)g^{-1}$ avec $g \in \mathrm{SO}(3)$. Par surjectivité de $\pi : \mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ on peut choisir $q \in \mathrm{Sp}(1)$ vérifiant $\pi(q) = g$, et on constate

$$\widetilde{\mathrm{Iso}^+(P')} = q \widetilde{\mathrm{Iso}^+(P)} q^{-1}.$$

Ainsi, \tilde{A}_4, \tilde{S}_4 et \tilde{A}_5 sont des sous-groupes bien définis à conjugaison près dans $\mathrm{Sp}(1)$.

EXEMPLE 2.11. (i) Le groupe \tilde{A}_4 est aussi appelé *groupe binaire tétraédral*.

Il est d'ordre 24. Remarquer que \tilde{A}_4 n'est ni isomorphe à S_4 , ni à $A_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui ont eux de nombreux éléments d'ordre 2. On verra ci-dessous qu'il est conjugué dans $\mathrm{Sp}(1)$ au sous-groupe $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K, \frac{\pm 1 \pm I \pm J \pm K}{2}\}$ (inversibles des quaternions de Hurwitz), aussi étudié dans l'Exercice A.3. Ce n'est pas tout : on verra aussi que \tilde{A}_4 est l'ensemble des sommets d'un 4-polytope régulier exceptionnel de \mathbb{H} , appelé 24 *cellules* : voir l'Exemple 5.6.

(ii) Les groupes \tilde{S}_4 et \tilde{A}_5 , d'ordres respectifs 48 et 120, sont respectivement appelés *groupe binaire octaédral* et *icososaédral*. Comme il a un seul élément d'ordre 2, \tilde{S}_4 n'est pas isomorphe à $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De même, \tilde{A}_5 n'est pas isomorphe à S_5 ou à $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Enfin, on peut montrer que les 120 éléments de $\tilde{A}_5 \subset \mathbb{H}$, aussi appelés *icosiens*, sont les sommets du fameux 600-cellules. L'espace quotient $\mathrm{Sp}(1)/\tilde{A}_5$ est bien connu des topologues : c'est la *sphère d'homologie* de Poincaré.

Revisitons pour finir les groupes d'isométries des solides de Platon du point de vue des quaternions. C'est un bon exercice pour se familiariser avec les constructions ci-dessus. (Ce qui suit n'a pas été traité en classe). Considérons pour cela les éléments

$$\pm I, \pm J, \pm K$$

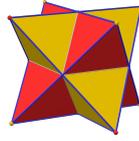
dans l'espace euclidien \mathbb{H}^0 de dimension 3. Ce sont manifestement les 6 sommets d'un octaèdre régulier O . Le dual de O est homothétique au cube C de sommets les

$$\pm I \pm J \pm K.$$

Partitionnons les sommets de ce cube C en les deux sous ensembles

$$C = T^+ \amalg T^- \text{ avec } T^\pm = \{\epsilon_I I + \epsilon_J J + \epsilon_K K \mid \epsilon_I \epsilon_J \epsilon_K = \pm 1\}.$$

Ce sont les sommets de deux tétraèdres réguliers T^\pm :



La conjugaison par $I \in \text{Sp}(1)$ fixe I et envoie J sur $-J$ et K sur $-K$. Elle induit donc des isométries de O , C et T^\pm , et de même pour celle par J et par K . L'image du morphisme $\text{int} : \mathbb{H}_8 \rightarrow \text{SO}(\mathbb{H}^0)$ est donc un groupe de Klein, inclus dans ces quatre groupes d'isométries. Posons

$$\omega = \frac{1}{2}(1 + I + J + K) \in \text{Sp}(1).$$

Il est de trace 1, donc vérifie $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, puis $\omega^3 = -1$ (ordre 6). Les 16 éléments distincts ωh et $\omega^{-1}h = \omega^*h$, avec $h \in \mathbb{H}_8$, sont les

$$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm I \pm J \pm K)$$

et sont aussi d'ordre 6 (cas de trace 1) ou 3 (cas de trace -1). Le même argument vaut bien sûr pour les $h\omega$ et $h\omega^*$, et on constate en fait

$$\omega I = J\omega, \quad \omega J = -K\omega \text{ et } \omega K = -I\omega.$$

En particulier, ω normalise \mathbb{H}_8 et int_ω préserve aussi T^+ et T^- (et O et C). Posons

$$G_1 = \langle \mathbb{H}_8, \omega \rangle = \mathbb{H}_8 \amalg \omega \mathbb{H}_8 \amalg \omega^2 \mathbb{H}_8.$$

C'est un groupe d'ordre 24, et on a reconnu $G_1 = \text{Hur}^\times$ de l'Exercice A.3 Chap. 2. Le morphisme $\text{int} : G_1 \rightarrow \text{SO}(\mathbb{H}^0)$, de noyau ± 1 , a son image d'ordre 12 et incluse dans $\text{Iso}(T^\pm)$. On en déduit

$$(36) \quad \text{int}(G_1) = \text{Iso}^+(T^+) = {}^+ \text{Iso}(T^-) \simeq A_4 \text{ et donc } \text{Hur}^\times = G_1 \simeq \widetilde{A}_4.$$

Regardons maintenant l'élément

$$\zeta = \frac{1+I}{\sqrt{2}} \in \text{Sp}(1).$$

On a $\zeta^2 = -I$: c'est une racine 8-ème de l'unité dans \mathbb{H}^\times . On constate

$$\zeta I = I\zeta, \quad \zeta J = K\zeta, \quad \zeta K = -J\zeta.$$