

Groupes et symétries

Le but de ce chapitre est d'étudier quelques groupes de symétries importants. Nous commençons par revisiter les polyèdres (convexes, compacts)¹ *réguliers* de dimension 2 (polygones réguliers) et 3 (solides de Platon) en étudiant au cas par cas leurs *groupes de symétries* (ou *groupes d'isométries*). C'est l'occasion de revoir "en action" les groupes cycliques et diédraux, de représenter les désormais familiers A_4 , S_4 et A_5 comme groupes de rotations en ces dimensions, et de retrouver de manière géométrique et assez limpide des éléments de structure de ces groupes évoqués aux chapitres précédents. Suivant Klein, on démontre ensuite qu'à conjugaison près ce sont les seuls sous-groupes finis de $SO(3)$. En particulier, il n'y a pas d'autre groupe de rotations fini possible pour une figure quelconque de l'espace. Une autre conséquence amusante est que tout sous-groupe d'un des groupes de la liste ci-dessus est isomorphe à un autre sous-groupe de cette liste.

Ce phénomène cesse quand la dimension n grandit : il devient rapidement inextricable de classifier les sous-groupes finis de $O(n)$. Par exemple, le groupe S_n , et donc tout groupe fini d'ordre n peut apparaître. Paradoxalement, on sait depuis Schläfli que les polyèdres réguliers peuvent être classifiés en toute dimension $n \geq 4$: à similitude près, il y a le n -simplexe, le n -hypercube, le n -hyperoctaèdre, ainsi que 3 autres polyèdres exceptionnels en dimension $n = 4$. Nous renvoyons à l'un des compléments culturels pour plus d'informations. Dans un autre complément culturel, nous parlerons de sous-groupes discrets de $Iso(2)$: *les groupes de frises* (chers aux architectes) et les *groupes de papiers peints* (chers aux décorateurs).

Dans une deuxième partie, nous expliquerons comment les quaternions peuvent être utilisés pour étudier les groupes $SO(3)$ et $SO(4)$. Le sous-groupe $Sp(1)$ des quaternions de norme 1 (un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{C})$) joue un rôle central. Il s'identifie à la sphère euclidienne² S^3 , et munit donc cette dernière d'une loi de groupe topologique. Cette structure joue un rôle important en géométrie, en topologie de basse dimension et en physique quantique. Nous classifions ensuite les sous-groupes finis de $Sp(1)$ et introduisons les groupes d'isométries "binaires" des solides de Platon. En plus de donner des exemples de groupes intéressants, ils permettent également d'étudier les polyèdres réguliers exceptionnels de dimension 4.

Dans une dernière partie, nous étudions le dévissage du groupe linéaire $GL_n(k)$. Le résultat central est la simplicité de $PSL_n(k)$ (sauf pour $n = 2$ et $|k| \leq 3$), que nous démontrons en utilisant la *méthode d'Iwasawa*. Quand k est un corps fini, cela fournit une nouvelle série infinie de groupes simples finis. Dans le cas $n = 2$, le groupe $PGL_2(k)$ s'identifie aussi au groupe des homographies de la droite projective sur k . Le cas des petits n ou $|k|$ est particulièrement intéressant, à cause de l'existence

1. Dans le cours, nous bornerons à développer quelques exemples élémentaires qui peuvent se traiter sans la théorie générale des polyèdres. Nous en dirons un peu plus dans le Complément 5.
2. ... ou encore au groupe $SU(2)$ de la géométrie hermitienne.

de certains isomorphismes miraculeux. Cela nous permet aussi de discuter l'un des énoncés de la dernière lettre de Galois à Chevalier concernant les actions transitives exceptionnelles de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sur p éléments.

1. Sous-groupes finis de $O(2)$ et $SO(3)$

1.1. Rappels sur le groupe orthogonal. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $(x, y) \mapsto x.y$ désigne le produit scalaire de E et $\|x\| = (x.x)^{1/2}$ la norme Euclidienne associée. On rappelle que le *groupe orthogonal* de E est le sous-groupe $O(E)$ de $\mathrm{GL}(E)$ constitué des isométries de E . Par polarisation, on a aussi

$$O(E) = \{g \in \mathrm{GL}(E) \mid gx.gy = x.y \ \forall x, y \in E\}.$$

On sait que si $e = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base orthonormée de E , l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_e(u)$ est un isomorphisme de $O(E)$ sur le sous-groupe suivant de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$(24) \quad O(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid gg^t = 1_n\}$$

(qui ne dépend que de $n = \dim E$). On identifie souvent $O(n)$ au groupe orthogonal de l'espace euclidien standard \mathbb{R}^n de produit scalaire $\sum_i x_i y_i$ à l'aide de la base orthonormée canonique de \mathbb{R}^n . La Formule (24) montre que l'on a $\det g = \pm 1$ pour tout $g \in O(n)$, puis que $\det : O(n) \rightarrow \{\pm 1\}$ est surjectif. On note $SO(n)$ son noyau. Plus généralement, on définit le *groupe spécial orthogonal* de E comme le sous-groupe

$$SO(E) = \{g \in O(E) \mid \det g = 1\}$$

de $O(E)$. Il est aussi appelé groupe des *isométries directes*, ou groupe des *rotations*, de E . Il est distingué et d'indice 2 dans $O(E)$.

DÉFINITION 1.1. Soient H un hyperplan vectoriel de E . La réflexion par rapport à H est l'élément s_H de $O(E)$ défini par $s_H(h + d) = h - d$ pour $h \in H$ et $d \in H^\perp$.

Une réflexion est un cas particulier de *symétrie orthogonale*, c'est-à-dire d'élément $s \in O(E)$ avec $s^2 = 1$. Elles vérifient en outre $\det s_H = -1$. Les réflexions sont les éléments (non triviaux) de $O(E)$ dont l'espace des points fixes est de dimension maximale; elles joueront un peu le rôle des transpositions du groupe symétrique. Par exemple, *toutes les réflexions sont conjuguées dans $O(E)$* . En effet, pour tout $g \in O(E)$ et tout hyperplan $H \subset E$, on a $g(H)^\perp = g(H^\perp)$ puis

$$g s_H g^{-1} = s_{g(H)},$$

et $O(E)$ permute transitivement les hyperplans de E . De plus, les réflexions engendrent $O(E)$, et plus précisément :

PROPOSITION 1.2. (Cartan-Dieudonné) *Tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus $n = \dim E$ réflexions. En particulier, tout élément de $SO(E)$ est produit d'au plus $n/2$ produits de deux réflexions.*

DÉMONSTRATION — Le (i) est très classique (voir l'Exercice 2.16 Chap. 2, qui est plus général). Le (ii) se déduit du (i) en prenant le déterminant. \square

- EXEMPLE 1.3. (i) On a bien sûr $O(1) = \{\pm 1\}$.
- (ii) Supposons $\dim E = 2$. Dans ce cas $O(E) \setminus SO(E)$ est exactement l'ensemble des réflexions, et $SO(E)$ celui des produits de deux réflexions. Comme le produit de deux réflexions planes est une rotation d'angle double de l'angle entre les axes, le groupe $SO(E)$ est le groupe des rotations du plan, isomorphe à S^1 .

Rappelons aussi la proposition suivante, attribuée parfois à Euler.

PROPOSITION 1.4. (Euler) *Si $\dim E = 3$, tout élément non trivial de $SO(E)$ possède une et une seule droite fixe dans E .*

DÉMONSTRATION — Par la Proposition 1.2, tout élément g de $SO(3)$ est trivial ou produit de 2 réflexions orthogonales d'hyperplans distincts H_1, H_2 et donc fixe la droite $H_1 \cap H_2$. Si g fixe deux droites distinctes, il fixe le plan P qu'elles engendrent, et donc stabilise la droite P^\perp . La condition $\det g = 1$ assure alors qu'il fixe aussi P^\perp , et donc $g = 1$. \square

Nous avons utilisé, et réutiliserons constamment, le fait suivant :

LEMME 1.5. *Si $g \in O(E)$ préserve $F \subset E$, il préserve aussi F^\perp .*

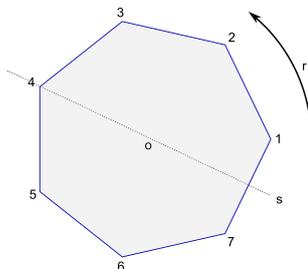
DÉMONSTRATION — Si g préserve F , il préserve aussi le sous-espace vectoriel engendré, qui a même orthogonal. On peut donc supposer que F est un sous-espace vectoriel, et donc $g(F) = F$ pour des raisons de dimension. Pour $f \in F$ et $e \in F^\perp$ on a alors $f \cdot ge = g^{-1}f \cdot e = 0$ car $g^{-1}f \in F$. Cela montre bien $g(F^\perp) \subset F^\perp$. \square

1.2. Quelques sous-groupes finis de $O(2)$ et $SO(3)$. Pour toute partie P de E , le groupe des isométries orthogonales de P dans E est le sous-groupe

$$\text{Iso}(P) = \{g \in O(E) \mid g(P) = P\}$$

On pose aussi $\text{Iso}^+(P) = \text{Iso}(P) \cap SO(E)$.

On suppose d'abord $\dim E = 2$. Soit $\mathcal{P}_m \subset E$ un polygone régulier du plan à $m \geq 3$ côtés, disons centré en 0. Notons que $\text{Iso}(\mathcal{P}_m)$ agit sur E en préservant l'ensemble \mathcal{S} des m sommets de \mathcal{P}_m : ce sont les points de \mathcal{P}_m à distance maximale de 0. Numérotons ces sommets *de manière consécutive et directe* par $1, \dots, m$. L'action de $\text{Iso}(\mathcal{P}_m)$ sur \mathcal{S} définit alors un morphisme $f : \text{Iso}(\mathcal{P}_m) \rightarrow S_m$.



PROPOSITION 1.6. *Pour $m \geq 3$, le morphisme f ci-dessus induit un isomorphisme $\text{Iso}(\mathcal{P}_m) \xrightarrow{\sim} D_{2m}$. De plus, on a $\text{Iso}^+(\mathcal{P}_m) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

DÉMONSTRATION — Le stabilisateur dans $\text{Iso}(\mathcal{P}_m)$ d'un sommet S de \mathcal{P}_m est le groupe d'ordre 2 engendré par la symétrie orthogonale fixant (OS) . En considérant deux sommets non opposés, il en existe car $n \geq 3$, on en déduit que cette action est fidèle, *i.e.* f est injectif. De plus, la rotation r de centre 0 d'angle $\frac{2\pi}{m}$ est dans $\text{Iso}(\mathcal{P}_m)$ et vérifie $f(r) = (1\ 2 \dots m) = c$, donc l'action de $\text{Iso}(\mathcal{P}_m)$ sur \mathcal{S} est transitive. On en déduit $|\text{Iso}(\mathcal{P}_m)| = 2m$ (formule orbite-stabilisateur). La réflexion orthogonale s échangeant les sommets 1 et n vérifie $f(s) = (1\ m)(2\ m-1) \dots = \tau$. On a donc $D_{2m} = \langle c, \tau \rangle \subset \text{Im } f$, puis une égalité pour des raisons de cardinal. Comme $\det s = -1$ on en déduit $|\text{Iso}^+(\mathcal{P}_m)| = m$, et donc que l'inclusion $\langle c \rangle \subset \text{Iso}^+(\mathcal{P}_m)$ est une égalité. \square

REMARQUE 1.7. (Le groupe de Klein) Posons $\mathcal{P}_2 = [-1, 1] \times [-\epsilon, \epsilon]$ avec $0 \leq \epsilon < 1$ (un segment pour $\epsilon = 0$, ou *polygone dégénéré*). On constate $\text{Iso}(\mathcal{P}_2) = \langle s_1, s_2 \rangle$ où s_1 et s_2 sont les réflexions verticales et horizontales. En particulier on a $\text{Iso}(\mathcal{P}_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Iso}^+(\mathcal{P}_2) = \{\pm \text{id}_E\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On pose parfois $D_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 1.8. *Soit G un sous-groupe fini non trivial de $O(2)$. Alors soit G est d'ordre 2 engendré par une réflexion, soit il existe un polygone régulier \mathcal{P} du plan euclidien, éventuellement dégénéré, avec soit $G = \text{Iso}(\mathcal{P})$, soit $G = \text{Iso}^+(\mathcal{P})$.*

DÉMONSTRATION — Considérons le groupe fini $G' := G \cap \text{SO}(2)$, de cardinal disons m . Comme $\text{SO}(2)$ est isomorphe à S^1 et que le seul sous-groupe d'ordre m de S^1 est μ_m , le groupe G' est le sous-groupe des rotations d'angle $\frac{2\pi}{m}\mathbb{Z}$. Pour $m \geq 2$, on a $G' = \text{Iso}^+(\mathcal{P}_m)$. Cela conclut si on a $G' = G \subset \text{SO}(2)$.

Supposons donc G' d'indice 2 dans G . Soit $s \in G \setminus G'$ (une réflexion). Si on a $m \geq 2$ et quitte à faire tourner \mathcal{P}_m de sorte que l'un des sommets soit fixe par s , on peut supposer $s(\mathcal{P}_m) = \mathcal{P}_m$. Mézalor on a $G = \langle s, G' \rangle \subset \text{Iso}(\mathcal{P}_m)$, puis l'égalité pour des raisons de cardinal par la Proposition 1.6 (remarque ci-dessus pour $m = 2$). Enfin, pour $m = 1$ on a $G = \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

On s'intéresse maintenant aux sous-groupes finis de $\text{SO}(3)$ (pour le cas $O(3)$, voir la Remarque 1.17). Commençons par les sous-groupes dit *réductibles*.

REMARQUE 1.9. (Sous-groupes réductibles) Soit E un espace euclidien de dimension 3. Un sous-groupe de $\text{SO}(E)$ est dit *réductible* s'il préserve une droite D de E , ou ce qui revient au même, un plan $P \subset E$ (Lemme 1.5, on passe de l'un à l'autre en prenant l'orthogonal). Il est dit *irréductible* sinon. Mais le stabilisateur d'un plan P dans $\text{SO}(E) \simeq \text{SO}(3)$ s'identifie naturellement à $O(P) \simeq O(2)$. En effet, écrivant par exemple $D = \mathbb{R}\epsilon_3$ et $P = \mathbb{R}\epsilon_1 \oplus \mathbb{R}\epsilon_2$, avec les ϵ_i orthonormés dans E , nous sommes simplement en train de parler du morphisme injectif *diagonal*

$$O(2) \longrightarrow \text{SO}(3), \quad g \mapsto \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g \end{bmatrix}.$$

Ainsi, l'étude des sous-groupes réductibles de $\text{SO}(3)$ se ramène entièrement à celle des sous-groupes de $O(2)$, déjà résolue. En particulier, tout sous-groupe de $O(2)$ peut être vu un sous-groupe de $\text{SO}(3)$ via le plongement ci-dessus. Noter qu'une réflexion orthogonale dans $O(2)$ est un *retournement* vu dans $\text{SO}(3)$.

Des sous-groupes plus intéressants sont obtenus en considérant les *solides de Platon*. Ce sont les *polyèdres (convexes, compacts) réguliers* de l'espace euclidien de dimension 3. Nous renvoyons aux compléments pour la signification mathématique exacte de ces termes, qu'il ne sera pas utile de connaître en première approche ici.³ À similitude euclidienne près, il y a exactement 5 solides de Platon représentés ci-après,⁴ et dont nous allons étudier les groupes de symétrie.

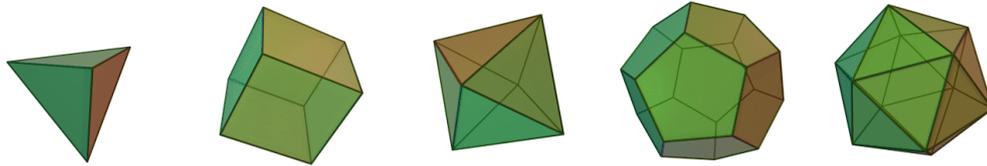


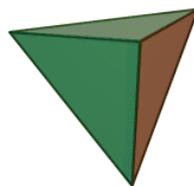
FIGURE 1. Les 5 solides de Platon.

Soit $P \subset E$ un tel polyèdre. On supposera toujours que P est centré en 0. Parmi les parties remarquables de P , il y a ses *sommets*, ses *arêtes* et ses *faces*. On voit bien sur chaque figure ce que l'on entend par là ! On peut aussi rigoureusement les définir comme les parties convexes non vides $F \subsetneq P$ vérifiant la propriété d'*extrémalité* :

$$(\star) \quad \forall x, y \in P,]x, y[\cap F \neq \emptyset \implies [x, y] \subset F.$$

On constate qu'une telle partie est soit un point (sommet), soit un segment (arête), soit un polygone régulier (face). L'hypothèse "centré en 0" dit que l'isobarycentre des sommets est 0. L'action évidente de $\text{Iso}(P)$ sur E et ses parties préserve (\star) (propriété affine) et donc l'ensemble \mathcal{S} des sommets de P , celui \mathcal{A} des arêtes de P , et celui \mathcal{F} des faces de P . L'action de $\text{Iso}(P)$ sur \mathcal{S} est fidèle car \mathcal{S} engendre E , ainsi donc que celles sur \mathcal{A} et \mathcal{F} (tout sommet est intersection de deux arêtes, toute arête est intersection de deux faces). Noter que dès que $-1 \in \text{Iso}(P)$ (symétrie centrale) on a $\text{Iso}(P) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(P)$. Regardons la situation au cas par cas.

(A) LE TÉTRAÈTRE RÉGULIER



Soit T un tel polyèdre (4 faces triangles équilatérales, 4 sommets, 6 arêtes). L'action fidèle de $\text{Iso}(T)$ sur les 4 sommets, numérotés de manière arbitraire, définit un morphisme injectif $f : \text{Iso}(T) \rightarrow S_4$. On constate que les rotations d'ordre 3 fixant un sommet de T ont pour image par f un 3-cycle des 3 sommets restants. Le retournement d'une arête échange les deux sommets restants, son image par f est une double transposition. Enfin, la symétrie orthogonale d'axe engendré par une

3. Disons simplement qu'un polytope de E est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points, et qu'on dit qu'il est régulier si son groupe d'isométries agit transitivement sur ses *drapeaux de faces*.

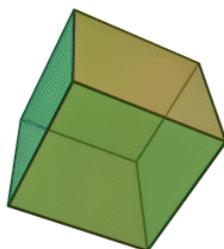
4. Cette illustration est issue de https://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_de_Platon

arête A échange les deux sommets de cette arête et fixe les deux sommets restants : son image par f la transposition des sommets de A . On a donc $f(\text{Iso}(T)) = S_4$ et $f(\text{Iso}^+(T)) = A_4$, et on a démontré la :

PROPOSITION 1.10. *On a $\text{Iso}(T) \simeq S_4$ et $\text{Iso}^+(T) \simeq A_4$.*

Noter que, dans l'isomorphisme ci-dessus, le déterminant sur $\text{Iso}(T)$ correspond à la signature sur S_4 . De plus, on constate que T possède exactement 3 paires d'arêtes orthogonales, ce qui fournit un morphisme $\text{Iso}(T) \rightarrow S_3$, et on retrouve une réalisation concrète du morphisme $S_4 \rightarrow S_3$ étudié au chapitre précédent !

(B) LE CUBE (ou HEXAÈDRE RÉGULIER)

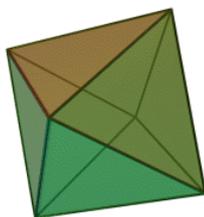


Soit C un cube (6 faces carrées, 8 sommets, 12 arêtes). On a $-1 \in \text{Iso}(C)$ et donc $\text{Iso}(C) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(C)$. Chacun des 8 sommets de C vient par paire $\{S, -S\}$, de sorte que $\text{Iso}(C)$ agit naturellement sur l'ensemble \mathcal{S}' des 4 paires de sommets du cube. On vérifie aisément que le noyau de cette action est $\{\pm 1\}$.⁵ Comme -1 n'est pas dans $\text{SO}(3)$, l'action de $\text{Iso}^+(C)$ sur \mathcal{S}' est donc fidèle. En regardant une rotation d'ordre 4 du cube fixant le centre d'une face, et une rotation d'ordre 3 fixant un sommet, on constate que l'image du morphisme $\text{Iso}^+(C) \rightarrow S_{\mathcal{S}'} \simeq S_4$ contient des 4 cycles et tous les 3-cycles : c'est donc S_4 et on a montré

PROPOSITION 1.11. *On a $\text{Iso}^+(C) \simeq S_4$ et $\text{Iso}(C) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(C)$.*

Là encore, en considérant l'action de $\text{Iso}^+(C)$ sur les 3 paires de faces opposées du cube on retrouverait un morphisme surjectif $S_4 \rightarrow S_3$!

(C) L'OCTAÈDRE RÉGULIER



Soit O un tel polyèdre (8 faces triangles équilatérales, 6 sommets, 12 arêtes). Les centres des 8 faces de O sont les sommets d'un cube C , appelé cube dual de O . De

⁵ Si on a une base e_1, e_2, e_3 de E et $g \in O(E)$ tels que $g(e_i) = \pm e_i$ pour tout i , ainsi que $g(f) = \pm f$ pour $f = e_1 + e_2 + e_3$, alors on a $g = \pm 1$.

plus, les centres des faces de C sont les sommets d'un nouvel octaèdre régulier O' , aussi appelé dual de C . On constate que O' et O sont homothétiques. On en déduit $\text{Iso}(O) = \text{Iso}(C) = \text{Iso}(O')$: on est ramené au cas précédent. On peut bien sûr aussi l'étudier directement !

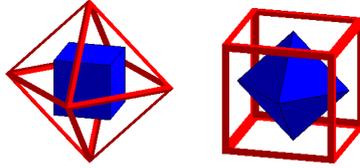
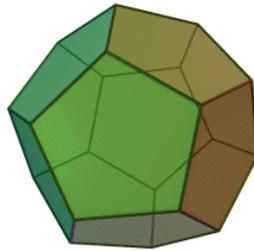


FIGURE 2. La dualité entre octaèdres et cubes

LE DODÉCAÈDRE RÉGULIER



Soit D un tel polyèdre (12 faces pentagonales, 20 sommets, 30 arêtes). On a $-1 \in \text{Iso}(D)$ et donc $\text{Iso}(D) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(D)$. Montrons d'abord $|\text{Iso}^+(D)| = 60$. Pour cela, regardons l'action (fidèle) de $\text{Iso}^+(D)$ sur les 20 de sommets de D . Elle est transitive, comme on le constate en regardant les rotations d'ordre 5 centrées en chacune des faces. Le stabilisateur d'un sommet S est le sous-groupe des 3 rotations de $\text{Iso}(D)$ fixant S et permutant cycliquement les trois faces de D contenant S . La formule orbite-stabilisateur conclut $|\text{Iso}^+(D)| = 60$. Montrons maintenant $\text{Iso}^+(D) \simeq A_5$. Il faut d'abord trouver un ensemble à 5 éléments sur lequel $\text{Iso}^+(D)$ agit. On observe d'abord que D a $30/2 = 15$ couples d'arêtes parallèles, nous appellerons *diarête* un tel couple. Ces 15 diarêtes se regroupent en 5 paquets de 3 naturels comme suit. Appelons *repère* de D un triplet de diarêtes deux à deux orthogonales. On constate que chaque diarête de D appartient à un repère. De plus, deux repères sont nécessairement disjoints car on est en dimension 3, de sorte qu'il existe exactement 5 repères. Notons \mathcal{R} l'ensemble des 5 repères de D .^{6 7}

Le groupe $\text{Iso}^+(D)$ agit naturellement sur \mathcal{R} . Pour chaque face F de D , observons que chacune des 5 arêtes de F appartient à un unique repère de D , de sorte que le pentagone F identifie \mathcal{R} à l'ensemble des 5 côtés de F . Chacune des 4 rotations non triviales de F définit alors un 5-cycle de \mathcal{R} . La rotation d'ordre 3 de D fixant un

6. Les repères correspondent aussi bijectivement aux *grands cubes* que l'on peut inscrire dans D , ou encore aux 5 *très grands cubes* circonscrits à D (chaque face du cube étant partagée en 2 par l'une des arêtes du repère) : voir la Figure 3 ci-contre.

7. Comme le souligne Coxeter dans son livre, ces constructions sont déjà présentes dans les éléments d'Euclide livre XV, 3-5. Les figures ci-dessus sont empruntées au contributeur *aes* de cette [discussion MSE](#), et à [ce site](#). Internet regorge d'illustrations sur le dodécaèdre, et de patrons pour le construire ([un exemple](#)).

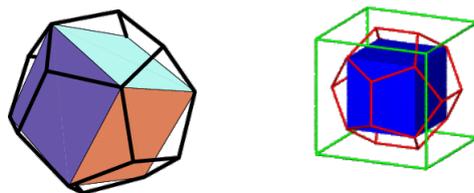


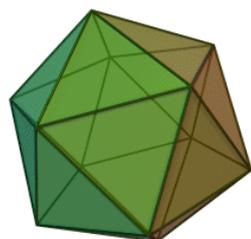
FIGURE 3. L'un des 5 cubes inscrits ou circonscrits au dodécaèdre

sommet de F induit manifestement un élément non trivial de \mathcal{R} , donc un 3-cycle. Comme un 3-cycle et un 5-cycle de S_5 engendrent A_5 , on a démontré la :

PROPOSITION 1.12. *On a $\text{Iso}^+(\text{D}) \simeq A_5$ et $\text{Iso}(\text{D}) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(\text{D})$.*

Remarquons que l'action naturelle de $\text{Iso}^+(\text{D})$ sur les 6 paires de faces opposées est manifestement transitive. Elle définit donc une action transitive de A_5 sur un ensemble à 6 éléments : c'est la restriction à A_5 de l'action exotique du chapitre précédent !

L'ICOSAÈDRE RÉGULIER



Soit I un tel polyèdre (20 faces triangles équilatérales, 12 sommets, 30 arêtes). On vérifie comme pour le cube que le dual de I est un dodécaèdre D et que l'on a $\text{Iso}(I) = \text{Iso}(D)$: on est ramené au cas précédent. Nous renvoyons à l'Exercice 5.2 pour une construction très simple de l'icosaèdre et du dodécaèdre.

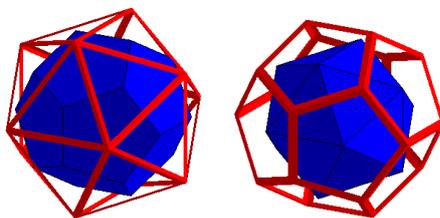


FIGURE 4. La dualité entre icosaèdres et dodécaèdres

1.3. Le théorème de Klein. Un résultat remarquable dû à Klein⁸ est qu'il n'y a pas d'autres sous-groupes finis de $SO(3)$, à conjugaison près, que les groupes évoqués ci-dessus.

8. *Lectures on the ikosahedron and the solution of equations of the fifth degree.*

THÉORÈME 1.13. (Klein) *Tout sous-groupe fini irréductible de $SO(3)$ est le groupe des isométries directes d'un solide de Platon, et donc isomorphe à A_4 , S_4 ou A_5 .*

Remarquer que le groupe des isométries directes d'un solide de Platon est bien irréductible, car ses rotations fixant un sommet sont d'ordre > 2 et ont des axes distincts. Le reste de la section est consacré à la démonstration⁹ du théorème de Klein. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1.14. (Burnside-Frobenius) *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . On note r le nombre de G -orbites dans X , et pour $g \in G$, on note $\text{Fix}(g)$ l'ensemble des points fixes de g dans X . On a alors $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$.*

Autrement dit, le nombre d'orbites de G dans X est la moyenne arithmétique des nombres de points fixes des éléments de G dans X .

DÉMONSTRATION — On calcule de deux façons le cardinal de l'ensemble

$$S = \{(g, x) \mid g \in G, x \in X, gx = x\}.$$

En sommant d'abord sur $g \in G$ on a d'une part $|S| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$. Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ les orbites de G dans X . En sommant d'abord sur $x \in X$, on a aussi

$$|S| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O_x|} = |G| \sum_{i=1}^r \left(|\Omega_i| \times \frac{1}{|\Omega_i|} \right) = |G| r,$$

et on conclut en égalisant les deux formules pour $|S|$. \square

REMARQUE 1.15. Ce résultat permet de résoudre plusieurs problèmes d'énumérations, comme ceux du type *colliers de Polya* : voir l'Exercice 5.8. Une autre application classique, due à Jordan, est la suivante. Soit G un groupe agissant transitivement sur ensemble fini X avec $|X| > 1$. Alors il existe au moins un élément de G qui n'a aucun point fixe dans X . Voir l'Exercice 5.9.

OBSERVATION PRÉLIMINAIRE IMPORTANTE : Avant d'entamer la démonstration du théorème de Klein, commençons par une analyse utile. Supposons que le sous-groupe $G \subset SO(3)$ préserve un solide de Platon P . Tout élément non trivial $g \in G$ a une unique droite fixe dans \mathbb{R}^3 par Euler. On constate que cette droite intersecte P en un segment dont chaque extrémité (fixe par g) est soit un sommet, soit le milieu d'un segment, soit le centre d'une face. Réciproquement, tout sommet/milieu d'une arête/centre d'une face, est fixé par une rotation non triviale de G bien choisie. Ainsi, ces éléments particuliers de P se déduisent dans leur ensemble du groupe G .

Ceci étant dit, fixons maintenant $G \neq 1$ un sous-groupe fini arbitraire de $SO(3)$. Le groupe G agit naturellement sur la sphère euclidienne S^2 , et tout élément $g \neq 1$ admet exactement deux points fixes x et $-x$ dans S^2 par Euler. Suivant Euler, ces deux éléments seront appelés *pôles* de g . On introduit l'ensemble $X \subset S^2$ des pôles des éléments non triviaux de G . Conformément à l'observation ci-dessus, nous allons montrer *in fine* que les éléments de X correspondent aux sommets/arêtes/faces du polyèdre cherché. Notons que $X \subset S^2$ est stable par G : c'est l'ensemble des points $x \in S^2$ tels que $G_x \neq \{1\}$, et on a $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ pour $g \in G$ et $x \in X$. Ainsi, G agit sur X et :

9. La preuve employée est classique mais nous n'en connaissons pas l'origine. La preuve donnée par Coxeter, qu'il attribue à Bravais, et assez similaire mais utilise un peu de géométrie sphérique.

- (a) tout élément de $G \setminus \{1\}$ a exactement deux points fixes dans X ,
 (b) tout point de X est fixé par au moins un élément de $G \setminus \{1\}$.

LEMME 1.16. Soient x_1, \dots, x_r des représentants des orbites de G dans X , et $n_i = |G_{x_i}|$ avec $n_1 \leq \dots \leq n_r$. Alors on a soit $r = 2$, $|X| = 2$ et $G = G_{x_1} = G_{x_2}$, soit $r = 3$ et $|G|$ et les n_i sont donnés par la table ci-dessous :

$ G $	n_1	n_2	n_3	$ O_{x_1} $	$ O_{x_2} $	$ O_{x_3} $	$ X $
$2m$	2	2	m	m	m	2	$2m + 2$
12	2	3	3	6	4	4	14
24	2	3	4	12	8	6	26
60	2	3	5	30	20	12	60

DÉMONSTRATION — D'après Burnside-Frobenius et (a), pour $n = |G|$ on a

$$r = |X|/n + 2(n-1)/n.$$

L'équation aux classes pour X s'écrit $|X| = \sum_{i=1}^r |O_{x_i}|$. On a aussi $n_i |O_{x_i}| = n$ pour tout i , et donc $|X|/n = \sum_{i=1}^r 1/n_i$ puis

$$(25) \quad 2 - 2/n = \sum_{i=1}^r (1 - 1/n_i),$$

en incorporant la formule plus haut pour r . Noter $n_i \mid n$, et aussi $n_i \geq 2$ par (b). Comme $n > 1$ on en déduit $2 \leq r \leq 3$.

(Cas $r = 2$) On a alors $2 - 2/n = 1 - 1/n_1 + 1 - 1/n_2$ avec $n_1 \leq n_2 \leq n$. Cela force $n_1 = n_2 = n$, puis $|X| = 2$ et donc $X = \{x_1, x_2\}$ et $G_{x_1} = G_{x_2}$ par (a).

(Cas $r = 3$) Supposant $n_1 \geq 3$ on constate que le terme de droite est $\geq 6/3 = 2$, donc on a $n_1 = 2$. De même, si $n_2 \geq 4$, le terme de droite est encore $\geq 1/2 + 3/4 + 3/4 = 2$, donc on a $2 \leq n_2 \leq 3$. Le cas $n_1 = n_2 = 2$ conduit à $n = 2n_3$. On peut donc supposer $n_2 = 3$. L'équation (25) devient $2 - 2/n = 7/6 + 1 - 1/n_3$ avec $n_3 \geq 3$. Pour $n_3 \geq 6$ le terme de droite est > 2 : absurde. Enfin, pour $n_3 = 3, 4, 5$ on trouve respectivement $n = 12, 24, 60$. \square

DÉMONSTRATION — (du Théorème 1.13) On peut supposer $n = |G| > 1$. Pour $x \in X$, le stabilisateur G_x est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(x^\perp) \simeq \mathrm{SO}(2) \simeq \mathrm{S}^1$. Il est donc cyclique. Soient x_1, \dots, x_r comme dans le lemme ci-dessus. On choisit c_i un générateur de G_{x_i} (une rotation d'angle $2\pi/n_i$ dans x_i^\perp .) Faisons d'abord deux remarques :

(R1) Si Ω est une G -orbite avec $|\Omega| > 2$ alors le morphisme $G \rightarrow \mathrm{S}_\Omega$ est injectif, par la propriété (a).

(R2) L'ensemble X est stable par $x \mapsto -x$, et si Ω est une G -orbite alors il en va de même de $-\Omega$. De plus, pour $x, y \in X$ on a $G_y = G_x \Leftrightarrow y = \pm x$ par (a).

(Cas 0) Dans le cas $r = 2$, le lemme entraîne $X = \{x_1, x_2\}$ avec $G = G_{x_1} = G_{x_2}$, donc $G = \langle c_1 \rangle$ est cyclique d'ordre n . Dans ce cas, G n'est pas irréductible. On suppose donc désormais $r = 3$.

(Cas 1) Cas $|G| = 2m$ et $(n_1, n_2, n_3) = (2, 2, m)$, avec $m \geq 2$. Pour $m = 2$, on a $|G| = 4$ et trois éléments distincts d'ordre 2 : les pôles de ces éléments sont donc deux à deux orthogonaux (le produit de deux retournements est une rotation du double de l'angle entre les deux pôles) et G est un groupe de Klein. On suppose maintenant $m > 2$. Dans ce cas O_{x_3} est l'unique orbite à 2 éléments, et elle donc égale à $-O_{x_3}$ par (R2), *i.e.* $O_{x_3} = \{x_3, -x_3\}$. Par (b) on en déduit $g(x_3) = \pm x_3$ pour tout $g \in G$. Là encore, G n'est pas irréductible (on pourrait voir qu'il est diédral).

(Cas 2) Cas $|G| = 12$ et $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 3)$. On considère la G -orbite $T = O_{x_3}$, qui a $12/3 = 4$ éléments. Pour $x \in T$, le groupe G_x est cyclique d'ordre 3 (conjugué dans G à G_{x_3}). L'action de $G_x = \langle \sigma \rangle$ sur T a au moins un point fixe (à savoir x), et au plus 2 par (a), donc σ est un 3-cycle de T . Au final, chaque élément de T est à même distance des 3 autres éléments : T est l'ensemble des sommets d'un tétraèdre régulier T dans E . Ainsi G préserve ce tétraèdre régulier (enveloppe convexe de T) et on a donc $G \subset \text{Iso}^+(T)$, puis égalité pour des raisons de cardinal (et donc $G \simeq A_4$).

(Cas 3) Cas $|G| = 24$ et $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 4)$. On considère l'unique G -orbite O de X à $6 = 24/4$ éléments, à savoir $O = O_{x_4}$. Montrons que c'est l'ensemble des sommets d'un octaèdre régulier O . Par le même argument que ci-dessus, cela montrera $G \subset \text{Iso}^+(O)$ puis $G = \text{Iso}^+(O) \simeq S_4$ pour des raisons de cardinal. Pour $x \in O$, le stabilisateur $G_x \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ fixe $x, -x$, et est une rotation d'ordre 4 de x^\perp . Il induit donc un 4-cycle de l'ensemble $\mathcal{C}_x = O \setminus \{x, -x\} = -\mathcal{C}_x$. Ainsi, \mathcal{C}_x est un carré de centre 0 dans le plan orthogonal à x , et $|x - y|$ ne dépend pas de $y \in \mathcal{C}_x$. Comme le choix initial de x dans O est arbitraire, on a montré aussi que deux éléments non égaux ou opposés de O sont toujours à la même distance : c'est bien l'ensemble des sommets d'un octaèdre régulier.

(Cas 4) Cas $|G| = 60$ et $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 5)$. On considère l'unique G -orbite $I \subset X$ ayant $60/5 = 12$ éléments, à savoir $I = O_{x_3}$. Nous allons (un peu laborieusement!) montrer que I est l'ensemble des sommets d'un icosaèdre régulier. On en déduira $G = \text{Iso}(I)^+ \simeq A_5$ comme ci-dessus. Le stabilisateur $G_{x_3} = \langle c_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ fixe x_3 et $-x_3$. Cette rotation c_3 induit donc un produit de deux 5-cycles à supports disjoints de l'ensemble à 10 éléments $I \setminus \{x_3, -x_3\}$. Notons P et P' ces supports : chacun est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier d'un plan affine orthogonal à x_3 .

La relation $I = -I$ montre que $I \setminus \{x_3, -x_3\}$ est stable par $x \mapsto -x$, puis $P' = -P$. En effet, $P = -P$ est impossible car on a $|P| \equiv 1 \pmod{2}$. Quitte à échanger P et P' , on peut aussi supposer que P est « du côté de x », c'est à dire que la quantité $h := p \cdot x_3$ pour $p \in P$ (elle ne dépend pas du choix de p) est ≥ 0 . On ne peut avoir $h = 0$, car alors les pentagones P et $P' = -P$ seraient tous deux dans le plan x_3^\perp , et x_3 serait équidistant des 10 éléments de $X \setminus \{\pm x_3\}$ (sommets d'un décagone régulier). Cela contredit la transitivité de G sur X car un sommet d'un polygone régulier n'est équidistant qu'à deux autres sommets au plus de ce polygone. On a donc $h > 0$.

Soit I l'enveloppe convexe de I . On constate que ce polyèdre convexe a pour 12 sommets les éléments de I et 20 faces triangulaires (avec $\pm x_3$ les pôles nord et sud) :