Annexe A

Corrections des exercices

Exercices du chapitre 1

Exercice 1.1. L'ensemble $\mathscr{E}$ des relations d'équivalence sur X est un sous-ensemble de $\mathrm{P}(X \times X)$. Il est stable par intersections quelconques. Pour le (i), définir R' comme l'intersection des éléments de $\mathscr{E}$ contenant R. Pour le (ii), vérifier que la relation donnée est d'équivalence, contient R, et est incluse dans toute relation d'équivalence contenant R.

Exercice 1.2. (i) On suppose $f^{p^m} = \mathrm{id}_X$. Soit $x \in X$ et $d = |[x]|$. Il suffit de montrer $d = p^k$ avec $0 \leq k \leq m$. D'après le cours, on sait que d est le plus petit entier ≥ 1 vérifiant $f^d(x) = x$. Le pgcd de d et p^m est de la forme p^k pour un certain $0 \leq k \leq m$. On a donc $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $ad + bp^m = p^k$ par Bezout, puis $f^{ad} = f^{p^k}$ et donc $f^{p^k}(x) = x$ puis $d = p^k$ par minimalité de d.

(ii) On peut avoir $|X| = p + p^m$ avec un cycle de longueur p et un autre de longueur p^m ; le nombre de points fixes est 0, mais il n'est pas congru à $|X| \bmod p^m$ si $m > 1$.

Exercice 1.3. (i) Soit X l'ensemble des partitions de $I = \{1, \ldots, n\} \coprod \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit f l'application de l'énoncé. C'est une bijection de I, mais elle induit aussi une bijection F de X, envoyant $I = \coprod_i I_i$ sur $I = \coprod_i f(I_i)$. On a $f^p = \mathrm{id}_I$ et $F^p = \mathrm{id}_X$. On a donc $\mathrm{B}_{n+p} = |X| \equiv |\mathrm{Fix}\, X| \bmod p$. Soit I une partition fixe par F, et I_0 la partie de I contenant $0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On va d'abord montrer que l'on a soit $I_0 \supset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, soit $I_0 = \{0\}$. En effet, deux parties de la forme $I_j := f^j(I_0)$ avec $j \in \mathbb{Z}$ sont soit égales soit disjointes par hypothèse. Ainsi, si I_0 rencontre $\{1, \ldots, n\}$, donc contient un point fixe de f, on a nécessairement $f(I_0) = I_0$ et donc $I_0 \supset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sinon, on a $I_0 \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc les parties de la forme I_j forment une partition de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en sous-ensembles de même cardinal $|I_0|$. Le nombre n de ces parties distinctes vérifie donc $n|I_0| = p$, ce qui force $|I_0| = 1$ ou p, *i.e.* $I_0 = \{0\}$ ou $I_0 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Au final, F a deux types de points fixes dans X : (a) les partitions telles que la partie contenant 0 contient tout $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: il y a trivialement B_{n+1} telles partitions (on identifie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à un point !), (b) les partitions de la forme $P \coprod \coprod_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \{x\}$ avec P une partition de $\{1, \ldots, n\}$: il y en a B_n.

(ii) On procède de la même manière en considérant $I = \{1, \ldots, n\} \coprod \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ et la bijection qui vaut identité sur $\{1, \ldots, n\}$ et $x \mapsto x + 1$ sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. On observera d'abord qu'il existe exactement $m + 1$ partitions de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ invariantes par $x \mapsto x + 1$, à savoir les partitions dont l'une des parties est $p^i\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ pour $0 \leq i \leq m$ (et les autres sont les $x + p^i\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ avec $x = 0, \ldots, p^i - 1$). On appliquera l'Exercice 1.2.

Exercice 1.5. (i) Soit $E \subset \mathbb{Q}$ non vide. Notons q_E le plus petit entier $q \geq 1$ tel qu'il existe un élément de E de la forme p/q avec $p \in \mathbb{Z}$. Parmi les éléments de E de la forme p/q_E avec $p \in \mathbb{Z}$, il existe un unique élément $e \in E$ avec $|e|$ minimal, et avec $e \geq 0$ dans le cas $\pm e \in E$. On pose $\tau(E) = e$. On a $\tau(E) \in E$, de sorte que τ est une fonction de choix sur $\mathbb{Q}$. Considérons maintenant le cas de $\mathbb{Q}^2$. On fixe τ une fonction de choix sur $\mathbb{Q}$, par exemple celle construite ci-dessus. Soit $E \subset \mathbb{Q}^2$ non vide. Soit E' son image dans $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto x$. Soit $E'' \subset \mathbb{Q}$ l'unique partie telle que $E \cap (\tau(E') \times \mathbb{Q}) = \tau(E') \times E''$. Alors $E \mapsto (\tau(E'), \tau(E''))$ est une fonction de choix sur $\mathbb{Q}^2$.

(ii) Soit τ une fonction de choix sur $\mathbb{Q}^2$. Si U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, alors $U\cap\mathbb{Q}^2$ est non vide par densité de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et on a $\tau(U\cap\mathbb{Q}^2)\in U$. Ainsi, $U\mapsto\tau(U\cap\mathbb{Q}^2)$ convient.

Considérons le (iii). Soit F est un fermé non vide de $\mathbb{C}$. Si $0\in F$ on pose $\tau(F)=0$. Sinon, un argument de compacité montre qu'il existe un plus petit réel $r_F>0$ tel que F contienne un élément de module r_F. Un autre argument de compacité montre qu'il existe un plus petit réel $\theta_F\in[0,2\pi]$ tel que $r_F e^{i\theta_F}\in F$. Alors $\tau(F)=r_F e^{i\theta_F}$ est dans F.

Supposons enfin donnée une fonction de choix τ sur les parties dénombrables non vides de $\mathbb{R}$ (plutôt que de $\mathbb{R}^2$, pour simplifier). Soit $\sim$ la relation d'équivalence de Vitali sur $\mathbb{R}$: $x\sim y$ si, et seulement si, $x-y\in\mathbb{Q}$. Ses classes d'équivalence sont dénombrables et denses dans $\mathbb{R}$. La fonction τ permet donc de définir l'ensemble $V=\{\tau(C\cap[0,1])\,|\,C\in\mathbb{R}/\sim\}\subset[0,1]$ (*ensemble de Vitali*). Rappelons, suivant Vitali, pourquoi V n'est pas Lebesgue-mesurable. On a $[0,1]\subset\coprod_{x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}}(x+V)\subset[-1,2]$, la réunion du milieu étant dénombrable et disjointe. Si V était mesurable, il serait de mesure nulle par la seconde inclusion, ce qui contredirait la première. Ainsi, d'après l'énoncé admis de Solovay, l'axiome du choix est nécessaire pour définir τ.

Exercice 1.6. Pour le (i), s'il existe $x\in X$ avec $d(x,a)\geq\epsilon$ pour tout $a\in A$, alors $A\cup\{x\}$ serait ϵ-séparée, et contenant strictement A, contredisant la maximalité de A. Pour le (ii), soit A une partie ϵ-séparée de X. Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties ϵ-séparées de X contenant A, ordonné par l'inclusion. Vérifions qu'il est inductif. Si $\{B_i\}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathscr{A}$ alors on constate $B=\cup_i B_i\in\mathscr{B}$. En effet, deux éléments distincts b,b' de B sont dans un même B_i, et vérifient donc $d(b,b')\geq\epsilon$. On a bien sur $A\subset B_i\subset B$ pour tout i. On conclut par Zorn.

Exercice 1.7. Le (i) est une vérification immédiate. Pour le (ii), si $A\subset X\times Y$ est non vide, un élément (x,y) de A d'abscisse x minimale (existe car X bien ordonné), et de coordonnée y minimale telle que $(x,y)\in A$ (existe car $\{x\}\times Y$ est bien ordonné), convient. Pour le (iii), considérons l'ensemble lexicographiquement ordonné $\mathbb{N}\times\{0,1\}$. On a $(0,0)<(0,1)<(1,0)<(1,1)<(2,0)<(2,1)<\cdots$. On constate qu'il est isomorphe à $\mathbb{N}$ via $(n,e)\mapsto 2n+e$. En revanche, $\{0,1\}\times\mathbb{N}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{N}$, car la suite des $(0,n)$ y est strictement croissante, et majorée par $(1,0)$.

Exercice 1.8. (i) S'il existe une injection $j:A\to B$, alors j induit une bijection entre A et $A'=j(A)\subset B$. Quitte à remplacer A par A', on peut donc supposer $A\subset B$. Pour le (ii), écrivons $B=A\coprod C$. Supposons qu'il existe $x,y\in C$, et $m\geq n\geq 0$, avec $i^m(x)=i^n(y)$. On a $i^n(i^{m-n}(x))=i^n(y)$, puis $i^{m-n}(x)=y$ car i^n est injective. Si $m-n>0$ on a $i^{m-n}(x)\subset i(B)\subset A$, contredisant $y\in C=B\smallsetminus A$. On a donc $m=n$, puis $x=y$. Le (iii) est évident.

Exercice 1.9. (i) Si f admet une rétraction $r:Y\to X$, la relation $r\circ f=\mathrm{id}_X$ montre que f est injective et r est surjective. Supposons réciproquement f injective. Fixons $x_0\in X$. Pour $y\in Y$, on pose $r(y)=x_0$ si $y\notin f(X)$, et si $y\in f(X)$ on définit $r(y)$ comme étant l'unique élément $x\in X$ tel que $f(x)=y$. On a clairement $r\circ f=\mathrm{id}_X$.

(ii) Si on a une injection $f:A\to B$, toute rétraction r de f est une surjection $B\to A$. Si on a une surjection $f:A\to B$, toute section s de f (donnée par AC) est une injection $A\to B$ (car f est une retraction de s !).

Exercice 1.10. (i) Il faut voir qu'une partie infinie $A\subset\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. On définit pour cela par récurrence une suite $\{a_n\}_{n\geq0}$ d'éléments de A, et $A_n=\{a_0,\dots,a_n\}\subset A$, en posant $a_0=\min(A)$ et $a_n=\min A\smallsetminus A_{n-1}$. La suite a_n est strictement croissante et on a $A\cap\{0,\dots,n\}\subset A_n$: l'application $n\mapsto a_n,\mathbb{N}\to A$, est bijective.

Pour le (ii), si $\mathbb{N}$ se surjecte sur A et A se surjecte sur B alors $\mathbb{N}$ se surjecte sur B. Pour le (iii), il suffit de voir par (ii) que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Mais $(a,b) \mapsto 2^a 3^b$ est une injection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour le (iv), on choisit une surjection $\varphi_n : \mathbb{N} \to A_n$. Alors $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \cup_n A_n, (m,n) \mapsto \varphi_n(m)$, est surjective.

Exercice 1.11. (i) On a clairement $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ et aussi $\mathbb{R} \hookrightarrow [0,1]$ (considérer par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctan}$), donc $\mathbb{R} \sim [0,1]$ par Cantor-Bernstein. De plus $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ s'injecte dans $[0,1[$ par $(\epsilon_i) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon_i}{3^i}$. Enfin, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se surjecte sur $[0,1[$ par $(\epsilon_i) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon_i}{2^i}$. On a donc $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1[$ par Cantor-Bernstein. On a bien sûr $[0,1[\sim [0,1]$ car $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et $\mathbb{N} \hookrightarrow [0,1]$.

Pour le (ii), on observe que si $\{e_n\}_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, alors la suite $f = (f_n)$ définie par $f_n = 1 - (e_n)_n$ est dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, mais est distincte de tous les e_n. Pour le (iii), on a vu $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, donc $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \sim\sim (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Mais il est clair que l'on a $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, d'où $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 1.12. Pour le (i), on regarde l'ensemble $\mathscr{E}$ des couples (B,P) avec $B \subset A$ et $P \subset \mathrm{P}(B)$ une partition de B en sous-ensembles infinis dénombrables. On ordonne $\mathscr{E}$ par $(B,P) \leq (C,Q)$ si et seulement si on a $B \subset C$ et $P \subset Q$ (en particulier, B est réunion de parties dans Q). Cet ordre est (trivialement !) inductif. Détaillons tout de même l'argument. Soit (B_i, P_i) une partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$. On pose $B = \cup_i B_i$ et $P = \cup_i P_i$. Vérifions que l'on a $(B,P) \in \mathscr{E}$. On a $B_i = \coprod_{E \in P_i} E$ et donc $B = \cup_{E \in P} E$. Soient E, F distincts dans P, disons $E \in P_i$ et $F \in P_j$. Comme (B_i, P_i) est totalement ordonnée, on peut supposer $(B_i, P_i) \leq (B_j, P_j)$. En particulier, on a E, F dans P_j, et donc $E \cap F = \emptyset$, ce qui conclut.

Par Zorn, il existe (B,P) maximal dans $(\mathscr{E}, \leq)$. Regardons $A \smallsetminus B$. S'il est infini, alors il existe une partie $C \subset A \smallsetminus B$ avec $C \sim \mathbb{N}$. Mézalor on a $B' = B \coprod C \subset A$, et $P' = P \cup \{C\}$ est une partition de B' vérifiant $(B,P) \leq (B', C')$. C'est absurde par maximalité. On en déduit que $F := A \smallsetminus B$ est fini. Mais comme A est infini, B est infini et on peut l'écrire $B = E \coprod B''$ pour un certain $E \sim \mathbb{N}$ appartenant à P. On a alors $A = (E \coprod F) \coprod B'$, $E \coprod F \sim \mathbb{N}$, et B' est réunion disjointe de parties infinies dénombrables, à savoir les $E' \in P'$ tels que $E' \neq E$. Cela prouve le (i).

Montrons le (ii). Par le (i) on peut écrire $A = \coprod_{i \in I} A_i$ avec $A_i \sim \mathbb{N}$ pour tout $\in I$. Soit $\varphi_i : \mathbb{N} \to A_i$ une bijection. L'application $I \times \mathbb{N} \to A, (i,n) \mapsto \varphi_i(n)$ est donc bijective. On a montré $A \sim I \times \mathbb{N}$. On a alors $A \times \mathbb{N} \sim (I \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \sim I \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \sim I \times \mathbb{N} \sim A$. Pour $n \geq 1$, on a aussi les injections $A \hookrightarrow A \times \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow A \times \mathbb{N} \sim A$, et donc $A \sim A \times \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 1.13. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble de l'énoncé. On l'ordone par $(X,f) \leq (Y,g)$ si, et seulement si, on a $X \subset Y$ et $g_{|X} = f$. L'ensemble ordonné $(\mathscr{E}, \leq)$ est inductif. En effet, si $\{(X_i, f_i)\}$ en est une famille totalement ordonnée, on vérifie immédiatement que l'ensemble $X := \cup_i X_i$, et l'application $f : X \to B$ (bien) définie par $f(x) = f_i(x)$ pour $x \in X_i$, vérifie $(X,f) \in \mathscr{E}$ et $(X_i, f_i) \leq (X,f)$ pour tout i. Par Zorn, on peut donc considérer $(X,f) \in \mathscr{E}$ maximal. Par construction, on a $X \subset A$ et $f : X \hookrightarrow B$. Si on a $X = A$ ou $f(X) = B$, on a respectivement $A \hookrightarrow B$ ou $B \hookrightarrow A$, et on a gagné. C'est toujours le cas. En effet, s'il existe $a \in A \smallsetminus X$ et $b \in B \smallsetminus f(X)$, on peut considérer $X' = X \cup \{a\}$ et définir $f' : X' \to B$ par $f'(x') = f(x)$ pour $x \in X$, et $f(a) = b$. On a clairement $(X', f') \in \mathscr{E}$ et $(X,f) \leq (X', f')$, contredisant la maximalité de (X,f).

Exercice 1.14. Par hypothèse on a $A \twoheadrightarrow B$. Comme $X = A \cup B$ est infini, A l'est aussi. Mais par l'Exercice 1.12 on a $A \sim A \times \{1,2\} \sim A \coprod A \twoheadrightarrow A \cup A = X$, et clairement $A \hookrightarrow X$, donc $A \sim X$.

Exercice 1.15. (i) On a $Y \times Y = (X \times X) \coprod Z$ avec $Z = (X \times X') \coprod (X' \times X) \coprod (X' \times X')$. Il suffit donc de montrer $X' \sim Z$. Mais on a $X' \sim X$ et $X \times X \sim X$ par hypothèse, et donc $Z \sim X \times X \times \{1,2,3\} \sim X \times \{1,2,3\} \sim X \sim X'$ par l'Exercice 1.12.

Pour le (ii), notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples (A, f) en question. On l'ordonne par $(A, f) \leq (B, g)$ si, et seulement si, $A \subset B$, $g(A \times A) \subset A$ et $g_{|A \times A} = f$. On vérifie immédiatement que $(\mathscr{E}, \leq)$ est inductif. Soit (A, f) un élément maximal. On a en particulier $A \sim A \times A$. Écrivons $X = A \coprod C$. Si on a $C \hookrightarrow A$, on a vu à l'exercice précédent que l'on a $X \sim A$, et donc $X \times X \sim A \times A \sim A \sim X$. Sinon, on a $A \hookrightarrow C$, et donc $A' \subset X \smallsetminus A$ avec $A' \sim A$. Mais le (i) montre que l'on peut trouver $(A \coprod A', g)$ dans $\mathscr{E}$ avec $(A, f) \leq (A \coprod A', g)$ une contradiction car $A \subsetneq A \coprod A'$.

Exercice 1.16. Pour $n \geq 1$ entier, notons $\mathrm{P}(X)_n \subset \mathrm{P}(X)$ l'ensemble des parties non vides à $\leq n$ éléments de X. On a $\mathrm{P}(X)_m \subset \mathrm{P}(X)_n$ pour $m \leq n$, et une bijection $X \hookrightarrow \mathrm{P}(X)_1, x \mapsto \{x\}$. On a donc $X \hookrightarrow \mathrm{P}_f(X)$, et par Cantor-Bernstein il s'agit de montrer que l'on a $\mathrm{P}_f(X) \hookrightarrow X$. Comme X est infini, l'ensemble $\mathrm{P}'_f(X) = \mathrm{P}_f(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$ des parties finies non vides de X vérifie $\mathrm{P}'_f(X) \sim \mathrm{P}_f(X)$, il suffit donc de montrer $X \twoheadrightarrow \mathrm{P}'_f(X)$.

Pour $n \geq 1$, l'application $X^n \to \mathrm{P}(X)_n, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$, est surjective. On a donc une surjection $X \sim X^n \twoheadrightarrow \mathrm{P}(X)_n$ par l'Exercice 1.15. Notons la f_n. On aussi $\mathrm{P}'_f(X) = \cup_{n \geq 1} \mathrm{P}(X)_n$, et donc une surjection $X \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathrm{P}'_f(X)$, $(x, n) \mapsto f_n(x)$. Mais on a vu $X \times \mathbb{N} \sim X$ à l'Exercice 1.12, ce qui conclut.

Exercice 1.17 . (i) Soient $j \in J$ et V_j le sous-espace vectoriel de V engendré par les f_i avec $i \neq j$. On a $j \notin J_i$ si et seulement si $e_i \in V_j$, car f est une base. Ainsi, si j n'est dans aucun J_i, $i \in I$, on a $e_i \in V_j$ pour tout i, et donc $V = V_j$ car e est génératrice. Mais f étant une base, on a aussi $f_j \notin V_j$: une contradiction. Pour le (ii), on constate que comme J_i est fini, on a une surjection $\varphi_i : \mathbb{N} \to J_i$, puis une surjection $\mathbb{N} \times I \to J, (n, i) \mapsto \varphi_i(n)$. Si I est infini, on a vu $\mathbb{N} \times I \sim I$, et donc $I \twoheadrightarrow J$, puis $J \hookrightarrow I$. Si I est fini, alors V est de dimension finie et on sait $I \sim J$. Pour le (iii), on a $I \hookrightarrow J$ et $J \hookrightarrow I$ par symétrie, et donc $I \sim J$ par Cantor-Bernstein.

Exercice 1.18. On a $V \sim k^{(I)}$ comme e est une base. Posons $W = k^{(I)}$. Pour $n \geq 1$, notons $\mathscr{I}_n$ l'ensemble des parties à $\leq n$ éléments de I. On note aussi $W_n \subset W$ le sous-ensemble des éléments (x_i) tels que $x_i = 0$ pour tout i sauf au plus n d'entre eux. On a $W = \cup_{n \geq 1} W_n$. Noter que l'application $k^\times \times I \to k^{(I)}, (x, i) \mapsto (0, .., 0, x, 0, ...)$, le x étant à la place i, est une bijection $k^\times \times I \twoheadrightarrow W_1 \smallsetminus \{0\}$. On a donc $W_1 \sim W_1 \smallsetminus \{0\} \sim k^\times \times I$. Mais comme $\{0,1\} \times I \sim I$, on a aussi $k^\times \times I \sim k \times I$. On a donc montré $W_1 \sim k \times I$. Il suffit donc de montrer $W_n \sim k \times I$ pour tout $n \geq 1$. En effet, on aura alors

$$k \times I \sim W_1 \hookrightarrow W \hookrightarrow k \times I \times \mathbb{N} \sim k \times I,$$

puis $W \sim k \times I$ (Exercice 1.12 et Cantor-Bernstein). Fixons $n \geq 1$. Comme on a $W_1 \subset W_n$, il ne reste qu'à montrer $k \times I \twoheadrightarrow W_n$. Notons $\mathscr{I}_n$ l'ensemble des parties non vides de I à $\leq n$ éléments, ainsi que Σ_n l'ensemble des couples (J, φ) avec $J \in \mathscr{I}_n$ et $\varphi : \{1, \ldots, |J|\} \to J$ une bijection. On a une surjection naturelle $k^n \times \Sigma_n \to W_n$, envoyant $((x_1, \ldots, x_n), (J, \varphi))$ sur l'élément w vérifiant $w_j = x_{\varphi^{-1}(j)}$ pour tout $j \in J$, et $w_j = 0$ pour $j \notin J$. On a $\mathscr{I}_n \sim I$ par l'Exercice 1.16, car I est infini. La surjection $\Sigma_n \to \mathscr{I}_n, (J, \varphi) \mapsto J$, étant à fibres finies et non vides, on a aussi $\mathscr{I}_n \hookrightarrow \Sigma_n \hookrightarrow \mathbb{N} \times \mathscr{I}_n$, et donc $\mathscr{I}_n \sim \Sigma_n$ (Exercice 1.12 et Cantor-Bernstein), puis $\Sigma_n \sim I$. Il ne reste qu'à montrer que l'on a $k^n \times I \sim k \times I$. C'est clair si k est infini, car on a alors $k^n \sim k$. Si k est fini, c'est vrai aussi, car on a même $k \times I \sim I$. Cela termine la démonstration du (i). Pour le (ii), on constate que si on a $Y \hookrightarrow X$ avec X infini et Y non vide, alors on a $X \hookrightarrow Y \times X \hookrightarrow X \times X \sim X$, et donc $Y \times X \sim X$.