

5. Complément I : Polytopes réguliers (culturel)

Dans ce complément culturel, nous discutons des polyèdres de dimension générale, aussi appelés *polytopes*. Deux belles références sont les livres de M. Berger *Géométrie* (Tome 2, Chapitre 12), et de H. Coxeter *Regular Polytopes*.

Fixons E un espace euclidien. Un polytope de E est ¹⁷ *un sous-ensemble P qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide de points*. Autrement dit, il existe un entier $m \geq 1$ et des points $P_1, \dots, P_m \in E$ avec

$$P = \text{conv}(P_1, \dots, P_m) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i \mid 0 \leq \lambda_i \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Un polytope P a une dimension n , qui est celle de l'espace affine engendré par P ; on parle alors de n -polytope. Un polytope de dimension 0, 1, 2, 3 ou 4 est communément appelé respectivement *point*, *segment*, *polygone*, *polyèdre* ou *polychore*.

DÉFINITION 5.1. *Une face d'un polytope P est une partie convexe non vide $F \subset P$ telle que pour tout $x, y \in P$, si on a $]x, y[\cap F \neq \emptyset$ alors $[x, y] \subset F$.*

Un peu de réflexion montre par exemple que dans le cas d'un solide P de Platon (enveloppe convexe de ses sommets), les faces strictes de P sont non seulement les faces de ce polyèdre au sens usuel, mais aussi ses arêtes et ses sommets. On reviendra sur ce léger conflit de terminologie plus bas. Pour illustrer toutefois l'efficacité de la définition ci-dessus de face, vérifions les propriétés suivantes :

LEMME 5.2. *Soient $T \subset E$ finie non vide et $P = \text{conv}(T)$ le polytope engendré.*

- (i) *Toute face F de P est de la forme $\text{conv}(T')$ avec $T' = T \cap F$.*
- (ii) *Le polytope P a au plus $2^m - 1$ faces avec $m = |T|$.*
- (iii) *Une face d'une face de P est une face de P .*
- (iv) *Supposons $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ affine, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in P$, et que l'hyperplan $H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ rencontre P . Alors $P \cap H$ est une face de P .*
- (v) *Soient F une face de P et A le sous-espace affine de E engendré par F . Alors F est d'intérieur non vide dans A et on a $P \cap A = F$.*

DÉMONSTRATION — Montrons le (i). Supposons que l'on ait $f := \sum_i \lambda_i x_i \in F$ avec $0 < \lambda_i$ pour tout i , les x_i dans T distincts, et $\sum_i \lambda_i = 1$ (et donc $\lambda_i < 1$). On peut alors écrire $f = \lambda_i x_i + (1 - \lambda_i) y_i$ avec $y_i = \frac{1}{1 - \lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j \in P$. Comme F est une face, on en déduit $x_i \in F$. On a montré $T' \subset F \subset \text{conv}(T')$, puis $F = \text{conv}(T')$ car F est convexe. Le (ii) se déduit du (i) et de ce que T a $2^m - 1$ parties non vides.

Montrons le (iii). Soient F une face de P et F' une face de F (un polytope par le (i)). Soient $x, y \in P$ avec $]x, y[\cap F' \neq \emptyset$. On a $]x, y[\cap F \neq \emptyset$ car $F \subset F'$, et donc $[x, y] \subset F$ car F est une face de P , puis $[x, y] \subset F'$ car F' est une face de F .

Montrons le (iv). La partie $F = P \cap H$ est convexe comme intersection de deux convexes, non vide par hypothèse. Soient $x, y \in P$ avec $]x, y[\cap F \neq \emptyset$. La restriction de f au segment $[x, y]$ est une fonction affine ≥ 0 et s'annule sur $]x, y[$. Elle est donc constante égale à 0. Ainsi, on a $[x, y] \subset H$.

¹⁷. Il existe une seconde définition équivalente, ou *duale*, des polytopes : ce sont les *parties bornées du plan qui sont intersection finie de demi-espaces affines fermés*. L'équivalence entre les deux est utile et non triviale : voir le chapitre du livre de Berger susmentionné.

Vérifions enfin le (v). L'inclusion $F \subset A \cap P$ est évidente. Par l'algèbre linéaire, F contient un repère affine e_0, \dots, e_r de A (avec $r = \dim F$). Par convexité, F contient $\text{Conv}(\{e_0, \dots, e_r\})$ qui est d'intérieur non vide dans A . Fixons x un point dans cet intérieur. Soit $y \in A \cap P \setminus F$. Alors $[x, y]$ est dans le convexe $P \cap A$ et $]x, y[$ rencontre $F \cap A$ par choix de x . On en déduit $[x, y] \subset F$ car F est une face, puis $y \in F$. \square

REMARQUE 5.3. *Il est important de souligner que la réciproque du (i) est fausse. Par exemple, les diagonales d'un carré ne sont pas des faces du carré.*

On parle aussi de k -face pour *face de dimension k* . Une 0-face de P s'appelle un *sommet* de P (ou *point extrémal*). Les sommets de P sont en nombre fini par le (ii) du Lemme ci-dessus. On peut montrer que P est toujours l'enveloppe convexe de ses sommets (théorème de Krein-Milman). D'après le (v), P est l'unique face de dimension $\dim P$. Enfin, une face de dimension $\dim P - 1$ est appelée *cellule* de P . On peut montrer que toute k -face de P avec $k < \dim P$ est incluse dans une $k + 1$ -face de P . Au final, toute face de P s'insère dans un *drapeau* de P , c'est-à-dire dans une suite de faces $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = P$ avec $\dim F_i = i$. On est maintenant en mesure de définir un polytope *régulier*.

DÉFINITION 5.4. *Un polytope P d'un espace euclidien E est dit régulier si l'action naturelle de $\text{Iso}(P)$ sur l'ensemble des drapeaux de P est transitive.*

Les polygones réguliers plans et les solides de Platon sont manifestement des polytopes réguliers, de dimension respectives 2 et 3. Noter aussi qu'une face d'un polytope régulier est un polytope régulier. De plus, pour tout $n \geq 0$ les trois familles infinies suivantes sont aussi des n -polytopes réguliers (notations de Coxeter) :

$$\alpha_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1\},$$

$$\gamma_n = [-1, 1]^n,$$

$$\beta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}.$$

– Le polytope α_n est appelé n -*simplexe* régulier. Il a $n + 1$ sommets (base canonique ϵ_i de \mathbb{R}^{n+1}) et $n + 1$ cellules. Pour $n \geq 0$ ces cellules sont définies par $x_i = 0$ et sont des $n - 1$ -simplexes. Son groupe d'isométries est S_{n+1} (permutation des coordonnées). Pour $n = 0, 1, 2, 3$ on trouve respectivement un point, un segment, un triangle équilatéral et un tétraèdre régulier. Pour $n = 4$, on l'appelle aussi *5-cellules* ou *pentachore*.

– Le polytope γ_n , avec $n \geq 1$, est le n -*hypercube* ou simplement n -*cube*. Il a 2^n sommets (les $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$) et $2n$ cellules (définies par $x_i = \pm 1$), qui sont des $n - 1$ -cubes pour $n > 1$. Son groupe d'isométries est le groupe à $2^n n!$ éléments des permutations et changements de signes des coordonnées de \mathbb{R}^n , c'est un produit semi-direct $\{\pm 1\}^n \rtimes S_n$. Pour $n = 0, 1, 2, 3$ on trouve respectivement un point, un segment, un carré et un cube. Pour $n = 4$, on l'appelle aussi *8-cellules* ou *tesseract*.

– Le polytope β_n , avec $n \geq 1$, est le n -*hyperoctaèdre*. Il a $2n$ sommets (les $\pm \epsilon_i$) et $2n$ cellules (définies par $\sum_i \pm x_i = 1$), qui sont des $n - 1$ -simplexes. Ce polytope est

dual de γ_n en un sens naturel, et a donc même groupe d'isométries (le n -simplexe, lui, est autodual). Pour $n = 0, 1, 2, 3$ on trouve respectivement un point, un segment, un carré et un octaèdre régulier. Pour $n = 4$, c'est aussi le 16-cellules.

La relation d'équivalence que l'on met sur les polytopes est la relation de similitude euclidienne. Les seuls isomorphismes entre les polytopes ci-dessus sont manifestement $\alpha_1 \simeq \beta_1 \simeq \gamma_1$ et $\beta_2 \simeq \gamma_2$. On dispose enfin du résultat surprenant suivant, démontré par Schläfli ($\simeq 1850$) dans le cas $n \geq 4$ (et connu d'Euclide pour $n \leq 3$).

THÉORÈME 5.5. À similitude près les n -polytopes réguliers sont :

- (i) le point pour $n = 0$, le segment pour $n = 1$, les polygones réguliers pour $n = 2$, les solides de Platon pour $n = 3$,
- (ii) les trois polytopes $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ pour $n \geq 4$,

et trois polytopes supplémentaires pour $n = 4$:

(a) le 24-cellules, qui a 24 cellules octaèdres, 24 sommets et 96 arêtes et faces triangulaires,

(b) le 120-cellules, qui a 120 cellules dodécaèdres, 600 sommets, 1200 arêtes et 720 faces pentagonales,

(c) et le 600-cellules, dual du 120-cellules, qui a 600 cellules tétraèdres, 120 sommets, 720 arêtes et 1200 faces triangulaires.

Nous renvoyons à Berger ou Coxeter pour une démonstration de ce théorème. Une propriété mise en avant par Coxeter est que les groupes d'isométries des polytopes réguliers sont engendrés par des réflexions. Pour deux belles animations représentant le 120-cellules, nous renvoyons à aux chaînes youtube [Henri Paul de Saint-Gervais](#) et [DeltaSimplex](#).

EXEMPLE 5.6. (Le 24-cellules) Considérons le 4-polytope P de \mathbb{R}^4 défini par $|x_i \pm x_j| \leq 1$ pour tout $1 \leq i < j \leq 4$. Il n'est pas difficile de voir que, si $\{\epsilon_i\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^4 , l'ensemble des sommets de P est constitué des 24 points

$$(45) \quad \pm \epsilon_i \text{ et } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \pm \epsilon_i.$$

De même, on peut montrer que P a exactement 24 cellules, définies par l'une des 24 équations $\pm x_i \pm x_j = 1$ avec $i \neq j$. Ce sont des octaèdres réguliers. Par exemple, les sommets de la face C de P définie par $x_1 + x_2 = 1$ sont, posant $o = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$,

$$o + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad o - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \text{ et les } o + \frac{1}{2}(\pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4),$$

et donc C est un octaèdre régulier de centre o . Le groupe $\text{Iso}(P)$ des isométries de P contient le sous-groupe G d'ordre $2^4 4!$ constitué des permutations et changements de signes des 4 coordonnées. Ce dernier, ainsi donc que $\text{Iso}(P)$, permute transitivement les 24 cellules de P . Le stabilisateur $\text{Iso}(P)_C$ de C dans $\text{Iso}(P)$ s'identifie à un sous-groupe de $\text{Iso}(C) \simeq S_4 \times \{\pm 1\}$. Ainsi, $|\text{Iso}(P)|$ est un multiple de $|G| = 2^4 4! = 384$, et divise $2 \cdot 24^2 = 1152 = 3 \cdot 384$. Mais on observe que la symétrie orthogonale exceptionnelle de vecteur $\epsilon_1 - \frac{1}{2} \sum_i \epsilon_i$ préserve les sommets de P (Liste (45)); c'est donc un élément de $\text{Iso}(P) \setminus G$. On a donc $|\text{Iso}(P)| = 2 \cdot 24^2$ et $\text{Iso}(P)_C \simeq \text{Iso}(C)$. En particulier, le polytope P est régulier. \square

Contrairement au cas des polyèdres réguliers, il paraît impossible de classifier les sous-groupes finis de $O(n)$ quand n grandit. En effet, S_n se plonge dans $O(n)$ (permutations des coordonnées), et donc tous les groupes d'ordre n se plongent aussi dans $O(n)$ par Cayley. Dans le même esprit, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 5.7. *Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(V)$. Il existe une structure d'espace euclidien sur V telle que l'on a $G \subset O(V)$. En particulier, tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O(n)$.*

DÉMONSTRATION — Soit $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire sur V . Pour $x, y \in V$ on pose $x \cdot y = \sum_{g \in G} f(gx, gy)$. L'application $(x, y) \mapsto x \cdot y, V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, est manifestement \mathbb{R} -bilinéaire symétrique. Elle est définie positive car on a $x \cdot x = \sum_{g \in G} f(gx, gx) \geq f(x, x)$ et f est défini. Pour $h \in H$ on a $hx \cdot hy = x \cdot y$ par simple changement de variable $g \mapsto gh^{-1}$ dans G . Ainsi, V est euclidien pour la norme

$$(x \cdot x)^{1/2} = \left(\sum_{g \in G} \|g(x)\|^2 \right)^{1/2},$$

et pour cette norme on a $G \subset O(V)$. Pour la seconde assertion, on a montré que si $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fini, il existe un produit scalaire sur $V = \mathbb{R}^n$ pour lequel G est constitué d'isométries. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n pour ce produit scalaire et P une matrice de passage entre e et la base canonique de \mathbb{R}^n . On a alors $\text{Mat}_e(g) = PgP^{-1}$ (formule de changement de base) et $\text{Mat}_e(g) \in O(n)$, donc $PGP^{-1} \subset O(n)$. \square

Un dernier résultat amusant est que tout sous-groupe fini de $O(n)$ est le groupe d'isométries d'un polytope bien choisi de \mathbb{R}^n (bien entendu, non régulier en général!). Il s'agit d'un énoncé du folklore discuté par exemple dans ce [post mathoverflow](#). Nous en donnons ci-dessous une démonstration très inspirée de l'article *Linear groups as stabilizers of sets*¹⁸ de M. Isaacs, que nous avons élaborée lors de discussions avec S. Bronstein.

PROPOSITION 5.8. *Soient E un espace euclidien et $G \subset O(E)$ un sous-groupe fini. Il existe un polytope $P \subset E$ avec $G = \text{Iso}(P)$.*

DÉMONSTRATION — Choisissons d'abord une partie finie $Y \subset E$ qui est stable par G , qui engendre E , et qui vérifie $\|y\| = 1$ pour tout $y \in Y$. Par exemple, si $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ est une base orthonormée de E , on peut prendre pour Y l'ensemble des $g(\epsilon_i)$ pour $g \in G$ et $i = 1, \dots, n$. Comme Y engendre E , l'action naturelle du groupe $\text{Iso}(Y)$ sur Y est fidèle, et donc $\text{Iso}(Y)$ est fini (d'ordre $\leq |Y|!$).

Pour chaque $\gamma \in \text{Iso}(Y) \setminus \{1\}$, le sous-espace $E_\gamma \subset E$ des points fixes de γ est strict, et donc la réunion finie $\cup_{\gamma \in \text{Iso}(Y) \setminus \{1\}} E_\gamma$ est de complémentaire infini dans E (car \mathbb{R} est infini!). On peut donc choisir $v \in E$ de norme 1, non dans Y , et fixé par aucun élément non trivial de $\text{Iso}(Y)$. Notons X l'orbite de v sous l'action de G . Vérifions que l'on a :

$$(46) \quad \text{Iso}(X) \cap \text{Iso}(Y) = G.$$

En effet, l'inclusion $G \subset \text{Iso}(X) \cap \text{Iso}(Y)$ est évidente. Dans l'autre sens, si on a $\gamma \in \text{Iso}(X) \cap \text{Iso}(Y)$, alors on a $\gamma(v) \in X$, et donc $\gamma(v) = g(v)$ pour un certain

18. Proc. Amer. Math. Soc. 62, 28–30 (1976).

$g \in G$, puis $g^{-1}\gamma \in \text{Iso}(Y)$ fixe v , et donc $g^{-1}\gamma = 1$ et $\gamma = g \in G$. Pour $n \geq 2$ entier considérons maintenant le sous-ensemble fini G -stable de E

$$X_n := Y \cup \left(1 - \frac{1}{n}\right)X.$$

Comme tous les éléments de Y sont de norme 1, et que ceux de $(1 - \frac{1}{n})X$ sont de norme $1 - \frac{1}{n} \in [1/2, 1[$, on a $\text{Iso}(X_n) = \text{Iso}(Y) \cap \text{Iso}(X)$, puis $G = \text{Iso}(X_n)$ par l'Égalité (46). On considère enfin le polytope

$$P_n = \text{Conv}(X_n).$$

Notons S_n l'ensemble des sommets (ou points extrémaux) de P_n . On a les inclusions évidentes $G = \text{Iso}(X_n) \subset \text{Iso}(P_n) \subset \text{Iso}(S_n)$. Il suffit donc pour conclure de démontrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $S_n = X_n$.

Mais on a $S_n \subset X_n$ par le Lemme 5.2 (i). On a $\|x\| \leq 1$ pour tout $x \in X_n$, $\|y\| = 1$ pour $y \in Y$ et aussi $v \notin Y$. Une norme euclidienne étant strictement convexe,¹⁹ on en déduit d'une part $Y \subset S_n$, et d'autre part $v \notin \text{Conv}(Y)$. Comme $\text{Conv}(Y)$ est compact, on en déduit $(1 - 1/n)v \notin \text{Conv}(Y)$ pour un n assez grand, puis $Y \subsetneq S_n$. Mais comme S_n est G -stable et inclus dans X_n , et que $(1 - 1/n)X$ est une G -orbite, on en déduit $X_n = S_n$ pour n assez grand. \square

REMARQUE 5.9. Si $G \subset \text{O}(E)$ est irréductible (*i.e.* ne préserve aucun sous-espace strict), n'importe quelle orbite non nulle Y de G dans E engendre E , de sorte que l'on peut choisir pour Y une seule G -orbite dans la preuve ci-dessus, puis un polytope P dont les sommets forment deux orbites sous G . En général, on ne peut pas trouver de polytope P tel que $G = \text{Iso}(P)$ et dont les sommets ne forment qu'une seule G -orbite, comme le montre le cas de la dimension 2 et d'un sous-groupe fini non diédral (voir l'Exercice 5.5). Un argument assez simple et donné par Isaacs *loc. cit.* montre que c'est toutefois possible si G agit irréductiblement sur le complexifié de E .²⁰

6. Complément II : Frises et papiers peints (culturel)

On considère dans ce complément le groupe $\text{Iso}(2)$ de toutes les isométries du plan euclidien $P = \mathbb{R}^2$. Soit g une telle isométrie. Notons $F \subset P$ le sous-ensemble des points fixes de g (le vide, ou un sous-espace affine). On montre aisément qu'il y a exactement 5 cas possibles (exclusifs) :

(Identité) $\dim F = 2$ et $g = \text{id}_P$,

(Symétrie) $\dim F = 1$ et g est la symétrie s_F par rapport à la droite affine F ,

(Rotation) $\dim F = 0$ et g est une rotation non triviale de centre F ,

(Translation) $F = \emptyset$ et g est une translation non triviale,

(Symétrie glissée) $F = \emptyset$ et il existe une droite affine D telle que g est la composée de la symétrie s_D et d'une translation non triviale préservant D .

19. Si on a $x, y \in E$ distincts et $\lambda \in [0, 1]$ vérifiant $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ et $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| = 1$, alors on a $\|x\| = \|y\| = 1$ et soit $\lambda = 0$, soit $\lambda = 1$ (cas d'égalité triangulaire). En particulier, pour toute partie finie $S \subset E$ avec $\|s\| \leq 1$ pour tout $s \in S$, les éléments de norme 1 de S sont parmi les sommets de $\text{Conv}(S)$.

20. Voir aussi l'article de László Babai, *Symmetry groups of vertex-transitive polytopes*, Geometriae Dedicata 6, 331–337 (1977), pour d'autres résultats.

Les deux types de symétries ci-dessus sont *indirectes* (*i.e.* envoient un repère direct sur un repère indirect), et les autres sont *directes* (on parle aussi de *déplacements*). Toute isométrie est produit d'au plus 3 symétries. On a une suite exacte

$$1 \rightarrow T(2) \longrightarrow \text{Iso}(2) \xrightarrow{g \mapsto \vec{g}} O(2) \rightarrow 1,$$

où $T(2)$ désigne le sous-groupe des translations de \mathbb{R}^2 , naturellement isomorphe à \mathbb{R}^2 . Le sous-groupe $O(2) \subset \text{Iso}(2)$ est d'ailleurs un complément de $T(2)$ dans $\text{Iso}(2)$. Les isométries directes de $\text{Iso}(2)$ forment un sous-groupe d'indice 2, à savoir

$$\text{Iso}^+(2) = \{g \in \text{Iso}(2) \mid \det \vec{g} = 1\}.$$

On va s'intéresser aux sous-groupes (éventuellement infinis) *discrets* de $\text{Iso}(2)$, c'est-à-dire qui ne contiennent pas de translation de vecteur arbitrairement petit, ou encore de rotation d'angle arbitrairement petit. Comme nous le verrons, ce sont les groupes d'isométries de certains *motifs* réguliers du plan. Fixons $G \subset \text{Iso}(2)$ un sous-groupe discret. On pose $G^+ = G \cap \text{Iso}^+(2)$ (un sous-groupe de G d'indice 1 ou 2). Par définition, $G \cap T(2)$ est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^2 , il y a donc exactement trois possibilités pour ce sous-groupe : il est soit $\{0\}$, soit isomorphe à \mathbb{Z} , soit à \mathbb{Z}^2 .

Cas (a) $G \cap T(2) \simeq \{0\}$: il n'y a pas de translation dans G . Dans ce cas, G est fini et conjugué à un sous-groupe fini de $O(2)$. En effet, tout élément non trivial de G^+ est alors une rotation, et il suffit de voir que toutes ces rotations ont même centre. Mais la suite exacte ci-dessus, et la commutativité de $SO(2)$, montrent que pour $a, b \in \text{Iso}^+(2)$ le commutateur $[a, b]$ est dans $T(2)$. Ainsi, G^+ est commutatif, et on conclut car deux rotations qui commutent ont même centre.

Cas (b) $G \cap T(2) \simeq \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on dit que G est un *groupe de frise*. Il n'est pas très difficile de montrer qu'à conjugaison près dans $\text{Iso}(2)$, il y en a exactement 7, à savoir les groupes d'isométries des 7 *frises* de la Figure 5 ci-après. Noter que



FIGURE 5. Les 7 types de frises

$G \cap T(2) = \mathbb{Z}v$ engendre une droite privilégiée dans \mathbb{R}^2 , appelée *direction de la frise*, disons D . L'axe d'une symétrie $s \in G$ est donc soit parallèle à D (cas $svs^{-1} = v$, dit *horizontale*) soit perpendiculaire à D (cas $svs^{-1} = -v$, dit *verticale*). Comme dans cette intéressante [video](#) de M. Launay, notons H, V, R et G respectivement, la propriété pour une frise de posséder une réflexion horizontale, verticale, une rotation (nécessairement d'angle π) ou une symétrie glissée. Une inspection, résumée dans la première ligne du tableau ci-après, montre que ces propriétés distinguent les 7 frises ci-dessus. Leurs groupes d'isométries sont donc non conjugués dans $\text{Iso}(2)$. Nous invitons le lecteur à vérifier que la classe d'isomorphisme des 7 groupes de frise ci-dessus est bien celle indiquée dans le tableau. On a noté $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le produit semi-direct défini par l'involution $x \mapsto -x$ de \mathbb{Z} .

frise	rose	beige	verte	bleue	turquoise	jaune	rouge
propriétés		V	HG	G	R	VRG	HVRG
G	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
G^+	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	$2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

TABLE 1. Les groupes d'isométries des 7 types de frises.

Cas (c) $G \cap T(2) \simeq \mathbb{Z}^2$. Dans ce cas, on dit que G est un *groupe de papier peint*. Ce cas est plus complexe. Feodorov et Polya ont montré indépendamment qu'à conjugaison près dans $\text{Iso}(2)$, il y en a exactement 17, représentés en Figure 6 ci-dessous (voir aussi cette intéressante [video](#)).

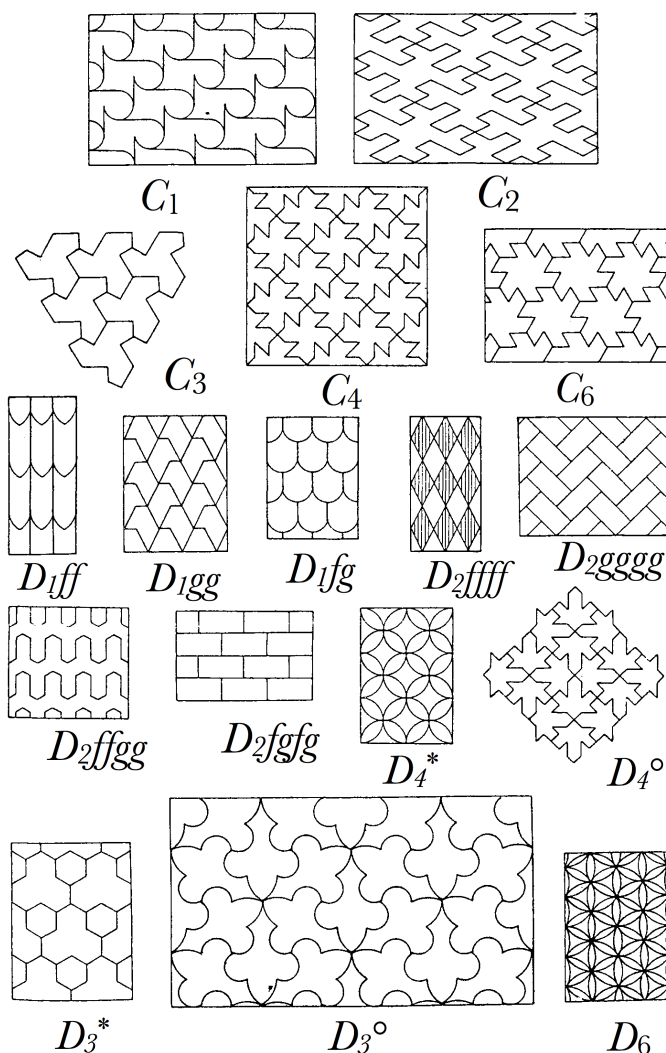


FIGURE 6. Pölya, *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene* (1924)

7. Complément III : Groupes unitaires et un théorème de Jordan

Ce complément a pour but²¹ d'introduire la géométrie hermitienne, analogue complexe naturel de la géométrie euclidienne, ainsi que le groupe de symétries naturellement associé : *le groupe unitaire*. Le groupe unitaire de l'espace hermitien standard \mathbb{C}^n peut être simplement défini comme étant le sous-groupe suivant

$$U(n) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g}g = 1_n\}$$

de $GL_n(\mathbb{C})$. À bien des égards il est plus simple à étudier que le groupe orthogonal, essentiellement car tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel admet une droite propre. Par exemple, il est toujours connexe et il se comporte de la même manière en dimensions paires et impaires. En guise d'illustration, nous en donnerons une application à la démonstration d'un théorème classique de Jordan.

7.1. Normes hermitiennes. Comme on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout \mathbb{C} -espace vectoriel espace vectoriel V peut-être vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel ("de dimension double") par restriction des scalaires. Pour des raisons de clarté, on notera V^b ce \mathbb{R} -espace vectoriel sous-jacent, même si bien sûr on a $V^b = V$ en tant qu'ensembles. On note $|\cdot|$ la valeur absolue usuelle sur \mathbb{C} .

DÉFINITION 7.1. *Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Une norme hermitienne sur V est une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur V^b vérifiant $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in V$. Un espace hermitien est un \mathbb{C} -espace vectoriel V de dimension finie muni d'une norme hermitienne.*

L'exemple fondamental de norme hermitienne est la valeur absolue sur \mathbb{C} (vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1). En effet, on a $|x + iy|^2 = x^2 + y^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $|\lambda \lambda'| = |\lambda| |\lambda'|$ pour $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$. Plus généralement :

EXEMPLE 7.2. *L'espace hermitien standard de dimension n est l'espace $V = \mathbb{C}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|(z_1, \dots, z_n)\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$. En effet, si $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ est la \mathbb{C} -base canonique de \mathbb{C}^n , alors $\epsilon_1, i\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, i\epsilon_n$ est une \mathbb{R} -base de $(\mathbb{C}^n)^b$ et on a pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ on a $\|\sum_{j=1}^n (x_j \epsilon_j + y_j i \epsilon_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + y_j^2$ qui est une norme euclidienne, et on a $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in V$.*

Si V est un espace hermitien pour $\|\cdot\|$, alors V^b est par définition un espace euclidien. Si $x.y$ désigne le produit scalaire sur V^b vérifiant $x.x = \|x\|^2$ pour tout $x \in V$, la propriété $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in V$ implique que pour tout $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\lambda x \cdot \lambda y = |\lambda|^2 x.y$ par polarisation. En particulier, si $W \subset V$ est un sous \mathbb{C} -espace vectoriel, son orthogonal W^\perp dans V^b est encore un sous \mathbb{C} -espace vectoriel, vérifiant $W \perp W^\perp = V^b$. Nous reviendrons plus en détail sur l'algèbre bilinéaire derrière ces considérations un peu plus loin. Utilisons déjà ces remarques pour voir que les normes hermitiennes admettent une caractérisation similaire à celle des normes euclidiennes.

PROPOSITION 7.3. *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un \mathbb{C} -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$. Il y a équivalence entre :*

²¹. Le contenu de ce complément a pendant longtemps fait partie du programme de mathématique spéciale, mais n'a pas survécu aux derniers changements de programme. Le point de vue adopté suppose le lecteur familier avec la géométrie euclidienne.

(i) $\|\cdot\|$ est une norme hermitienne sur V ,

(ii) il existe une \mathbb{C} -base e_1, \dots, e_n de V telle que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ on ait

$$(47) \quad \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2.$$

Une base e_1, \dots, e_n de V comme au (ii) est appelée base orthonormée de $(V, \|\cdot\|)$.

DÉMONSTRATION — Le fait que (ii) entraîne (i) est immédiat par l'Exemple 7.2. Supposons (i) et montrons (ii) par récurrence sur n . La restriction de la norme hermitienne de V à tout sous-espace W de V est encore une norme hermitienne sur W par définition. Choisissons pour W un hyperplan. Par les remarques ci-dessus, on a $V^b = W \perp W^\perp$ et W^\perp est un sous \mathbb{C} -espace vectoriel de W , nécessairement une droite. Pour tout $w \in W$ et $w' \in W^\perp$ on a $\|w + w'\|^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2$ par définition. Ainsi, si e_1, \dots, e_{n-1} est une base orthonormée de W choisie par récurrence, et si $e_n \in W^\perp$ est un vecteur de norme 1, alors e_1, \dots, e_n est une base orthonormée de V . \square

REMARQUE 7.4. Par définition, une \mathbb{C} -base e_1, \dots, e_n de l'espace hermitien V est orthonormée si, et seulement si, la \mathbb{R} -base $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ est orthonormée dans l'espace euclidien V^b .

7.2. Groupe unitaire d'un espace hermitien. Le groupe $\text{GL}(V)$ des bijections \mathbb{C} -linéaires d'un \mathbb{C} -espace vectoriel V est un sous-groupe du groupe $\text{GL}(V^b)$ des bijections \mathbb{R} -linéaires de V .

DÉFINITION 7.5. Si V un espace hermitien, le groupe unitaire de V est le sous-groupe des isométries \mathbb{C} -linéaires de l'espace euclidien V^b ; on le note $\text{U}(V)$. Autrement, on a $\text{U}(V) = \text{GL}(V) \cap \text{O}(V^b)$ dans $\text{GL}(V^b)$. On pose aussi $\text{SU}(V) = \{g \in \text{U}(V) \mid \det g = 1\}$ (groupe spécial unitaire de V).

Par exemple, si \mathbb{C} est vu comme espace hermitien de dimension 1 comme ci-dessus, alors $\text{U}(\mathbb{C})$ est le groupe des homothéties de rapport $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ avec $|\lambda| = 1$. Il est donc isomorphe à S^1 . En guise de première application de cette notion donnons une variante complexe de la Proposition 5.7 parfois appelée *astuce unitaire de Weyl*.

PROPOSITION 7.6. Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $G \subset \text{GL}(V)$ un sous-groupe fini. Il existe une norme hermitienne sur V pour laquelle on a $G \subset \text{U}(V)$.

DÉMONSTRATION — Soit $\|\cdot\|$ une norme hermitienne quelconque sur V (définie par exemple par la Formule (47) dans une base e_1, \dots, e_n arbitraire de V). La démonstration de la Proposition 5.7 montre que $N(x) = (\sum_{g \in G} \|g(x)\|^2)^{1/2}$ est une norme euclidienne sur V^b vérifiant $G \subset \text{O}(V^b)$. Comme on a $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, on a aussi $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$. \square

Comme dans le cas du groupe orthogonal, on a la caractérisation suivante :

PROPOSITION 7.7. Soient V un espace hermitien, e_1, \dots, e_n une base orthonormée de V , et $g \in \text{GL}(V)$. On a $g \in \text{U}(V)$ si, et seulement si, $g(e_1), \dots, g(e_n)$ est une base orthonormée de V .

DÉMONSTRATION — Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. On a $g(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j g(e_j)$. Pour $g \in U(V)$, on a $\|g(v)\|^2 = \|v\|^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2$, et donc $g(e) := (g(e_1), \dots, g(e_n))$ est orthonormée. Réciproquement, si $g(e)$ est orthonormée on a $\|g(v)\|^2 = \|v\|^2$ pour tout $v \in V$ et donc $g \in U(V)$. \square

La proposition suivante fait que la structure du groupe unitaire à tendance à être plus simple que celle du groupe orthogonal.

PROPOSITION 7.8. *Soient V un espace hermitien et $g \in U(V)$. Alors g est diagonalisable dans une base orthonormée de V .*

DÉMONSTRATION — Observons d'abord que si $W \subset V$ est un sous \mathbb{C} -espace vectoriel vérifiant $g(W) = W$, alors son orthogonal W^\perp (un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de V en somme directe avec W dans V) vérifie $g(W^\perp) = W^\perp$, car on a $U(V) \subset O(V^b)$.

Ceci étant dit, comme V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie alors g admet un vecteur propre e_1 . On a $e_1 \neq 0$ donc $\|e_1\| \neq 0$, et quitte à remplacer e_1 par $e_1/\|e_1\|$ on peut supposer $\|e_1\| = 1$. Posons $D = \mathbb{C}e_1$ et $H = D^\perp$, de sorte que l'on a une décomposition $V = D \perp H$. Munissant l'hyperplan H de la norme hermitienne induite par celle de V , on a clairement $g|_H \in U(H)$, et donc une base orthonormée e_2, \dots, e_n dans laquelle g est diagonalisable par récurrence sur $n = \dim V$. La base e_1, \dots, e_n de V est manifestement orthonormée, et diagonalise g . \square

Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace hermitien V , on note T_e le sous-groupe des éléments $g \in U(V)$ préservant chacune des droites $\mathbb{C}e_i$. On a donc $g(e_i) = \lambda_i(g)e_i$ avec $\lambda_i(g) \in \mathbb{C}^\times$ de module 1, et l'application

$$T_e \rightarrow (S^1)^n, g \mapsto (\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g))$$

est un isomorphisme de groupes.

COROLLAIRE 7.9. *On a $U(V) = \cup_e T_e$, la réunion portant sur les bases orthonormées e de V . En particulier, $U(V)$ est une partie connexe par arcs de $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$.*

DÉMONSTRATION — Le premier point est une traduction de la Proposition 7.8. Pour le second, il suffit de voir que chaque T_e est connexe par arcs car on a $1 \in T_e \cap T_f$ pour tout e, f . Mais dans la base e , T_e s'identifie au sous-groupe des matrices diagonales à coefficients dans S^1 , qui est bien connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{C})$. \square

REMARQUE 7.10. (Tores maximaux) Un sous-groupe de $U(V)$ de la forme T_e est appelé *tore maximal*, de sorte que $U(V)$ est réunion de ses tores maximaux. Noter que si f est une autre base orthonormée de e , on a $f = g(e)$ pour un unique $g \in U(V)$ par la Proposition 7.7, puis $T_f = gT_e g^{-1}$ par le principe de conjugaison : deux tores maximaux sont conjugués. Ces éléments de structure de $U(V)$ s'étendent aux groupes orthogonaux : voir les Exercices 5.25 et 5.26.

7.3. Produits scalaires hermitiens et écritures matricielles. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Comme on l'a déjà dit, se donner une norme hermitienne sur V est la même chose que se donner un produit scalaire $x.y$ sur V^b vérifiant $\lambda x.\lambda y = |\lambda|^2 x.y$. Le concept de *forme hermitienne* est une linéarisation plus souple de cette condition. Il permettra notamment d'écrire simplement les équations définissant $U(V)$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

Une forme *sesquilinéaire*²² sur un \mathbb{C} -espace vectoriel V est une application \mathbb{R} -bilineaire $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x, y \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \text{ et } f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y).$$

Soient f une telle forme et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une \mathbb{C} -base de V . On appelle *matrice de Gram de f dans la base e* la matrice $\text{Gram}_e f := (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. Soient $X = (x_i)$ et $Y = (y_j)$ dans \mathbb{C}^n (vecteurs colonnes) et $M = \text{Gram}_e f$, on a alors

$$(48) \quad f\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i \bar{y}_j f(e_i, e_j) = {}^t X M \bar{Y}.$$

Réciproquement, tout $M \in M_n(\mathbb{C})$ définit par cette même formule une unique forme sesquilinéaire f sur V avec $\text{Gram}_e f = M$. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ est dite *hermitienne*, ou *auto-adjointe*, si on a ${}^t \bar{M} = M$.

PROPOSITION-DÉFINITION 7.11. *Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n et f une forme sesquilinéaire sur V . Il y a équivalence entre :*

- (i) $f(x, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in V$,
- (ii) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ pour tout $x, y \in V$,
- (iii) il existe une base e de V telle que $\text{Gram}_e f$ est hermitienne,
- (iv) pour toute base e de V , $\text{Gram}_e f$ est hermitienne.

Sous ces hypothèses on dit que f est hermitienne.

DÉMONSTRATION — Les implications (ii) \implies (iv) \implies (iii) sont triviales, et (iii) \implies (ii) découle de l'identité (48). De plus, l'implication (ii) \implies (i) est claire. Supposons (i). Appliquée à x, y et $x + y$ on trouve $f(x, y) + f(y, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x, y \in V$, puis $\Im f(y, x) = -\Im f(x, y)$. Remplaçant x par ix on en déduit $\Re f(y, x) = \Re f(x, y)$, puis (ii). \square

DÉFINITION 7.12. *Un produit scalaire hermitien sur V est une forme sesquilinéaire hermitienne f qui est positive, i.e. avec $f(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in V$, et définie i.e vérifiant $f(x, x) = 0 \implies x = 0$.*

L'exemple fondamental de produit scalaire hermitien, dans lequel on a $V = \mathbb{C}$ (\mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1), est $f(x, y) = x\bar{y}$. Plus généralement :

EXEMPLE 7.13. Le produit scalaire hermitien standard sur \mathbb{C}^n est $f(x, y) = \sum_j x_j \bar{y}_j$. Sa matrice dans la base canonique $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ est I_n .

Si f est un produit scalaire hermitien sur le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie V , alors $g := \Re f$ est un produit scalaire euclidien sur V^b . De plus, on a $f(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 f(x, x)$ et $f(x, x) = g(x, x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $x \in V$. Ainsi, l'application $N_f : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto f(x, x)^{1/2}$, est une norme hermitienne sur V .

22. Comprendre *linéaire* (d'un côté) et *semi-linéaire* (de l'autre).

PROPOSITION 7.14. *Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. L'application $f \mapsto N_f$ est une bijection entre produits scalaires hermitiens sur V et normes hermitiennes sur V .*

DÉMONSTRATION — On vient de voir que si f est un produit scalaire hermitien sur V alors $N_f(x) = f(x, x)^{1/2}$ est une norme hermitienne sur V . Notons que le produit scalaire euclidien $x.y$ sur V^b associé à N_f vérifie nécessairement

$$x.y := \frac{1}{2}(N_f(x+y)^2 - N_f(x)^2 - N_f(y)^2) = \frac{1}{2}(f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y)) = \Re f(x, y).$$

On a donc aussi $\Im f(x, y) = \Re f(x, iy) = x.iy$, puis pour tout $x, y \in V$,

$$f(x, y) = x.y + i x.iy.$$

ce qui montre que $f \mapsto N_f$ est injective. Réciproquement, si N est une norme hermitienne sur V , notons $x.y = \frac{1}{2}(N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2)$ le produit scalaire euclidien associé sur V^b . On pose $f(x, y) = x.y + i x.iy$. C'est une application \mathbb{R} -bilinéaire $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. Pour tout $x, y, v \in V$, on a $N(iv) = N(v)$ et donc

$$i x.iy = x.y \text{ et } x.iy = -i x.y = -y.ix.$$

Cela montre $f(ix, y) = i f(x, y)$, $f(x, iy) = -i f(x, y)$ et $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$: la forme f est sesquilinéaire hermitienne. On a $f(x, x) = x.x$ car $x.ix = -x.ix = 0$, elle est donc définie positive et vérifie $N_f = N$. \square

Soit V un espace hermitien de norme hermitienne N . Ainsi, de manière analogue au cas euclidien, on parlera de *la forme hermitienne f associée à N* , ou encore de *la forme hermitienne de V* . Comme on l'a vu, f et N se déduisent l'une de l'autre par les formules

$$N(x)^2 = f(x, x), \quad 2\Re f(x, y) = N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2, \quad \Im f(x, y) = \Re f(x, iy),$$

celle du milieu étant appelée *identité de polarisation*. Posons $x.y = \Re f(x, y)$. On prendra garde que la relation $x.y = 0$ n'implique pas nécessairement $f(x, y) = 0$, mais seulement $f(x, y) \in i\mathbb{R}$. Toutefois, on a le résultat suivant :

LEMME 7.15. *Soit V un espace hermitien de norme N , de forme hermitienne f , et de produit scalaire euclidien associé $x.y = \Re f(x, y)$. Soit $W \subset V$ un sous \mathbb{C} -espace vectoriel, et $W^\perp := \{v \in V \mid v.w = 0, \forall w \in W\}$ son orthogonal. On a*

$$W^\perp = \{v \in V \mid f(v, w) = 0, \forall w \in W\} = \{v \in V \mid f(w, v) = 0, \forall w \in W\},$$

et W^\perp est un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de V .

DÉMONSTRATION — En effet, on a $iW \subset W$ et $\underline{f(v, w)} = 0$ si et seulement si $v.w = 0$ et $v.iw = 0$. De plus, la relation $f(v, w) = \underline{f(w, v)}$ montre $f(v, w) = 0 \iff f(w, v) = 0$. \square

La propriété pour une \mathbb{C} -base de V d'être orthonormée s'exprime aussi de manière très naturelle en terme de la forme hermitienne :

PROPOSITION 7.16. *Soient V un espace hermitien de dimension n , de forme hermitienne f , et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une \mathbb{C} -base de V . Alors e est orthonormée si, et seulement si, on a $\text{Gram}_e f = I_n$.*

DÉMONSTRATION — Par la Remarque 7.4, e est orthonormée si, et seulement si, pour tout $1 \leq k, l \leq n$ on a $e_k \cdot e_l = \delta_{k,l}$ et $e_k \cdot i e_l = 0$. C'est équivalent à $f(e_k, e_l) = \delta_{k,l}$ pour tout $1 \leq k, l \leq n$, i.e à $\text{Gram}_e f = I_n$. \square

Terminons par décrire le *groupe unitaire standard de rang n* . On pose

$$U(n) = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} g = I_n\}.$$

L'application $g \mapsto {}^t \bar{g}^{-1}$ étant un automorphisme du groupe $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, on constate que $U(n)$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ (le sous-groupe des points fixes).

PROPOSITION 7.17. *Soient V un espace hermitien de forme hermitienne f , et e une base orthonormée de V .*

- (i) *Pour $g \in \text{GL}(V)$ on a $g \in U(V) \iff f(g(x), g(y)) = f(x, y), \forall x, y \in V$.*
- (ii) *L'application $g \mapsto \text{Mat}_e g$ est un isomorphisme de groupes entre $U(V)$ et $U(n)$.*

DÉMONSTRATION — Montrons le (i). Si on a $f(g(x), g(y)) = f(x, y), \forall x, y \in V$ alors on a bien $g \in U(V)$ en prenant $x = y$. Réciproquement, si on suppose $g \in U(V)$, et si on note $x \cdot y$ le produit scalaire euclidien de V^b , on a $g x \cdot g y = x \cdot y$ pour tout $x, y \in V$, puis $f(g x, g y) = g x \cdot g y + i g x \cdot i g y = f(x, y)$ car on a $g(i y) = i g(y)$.

Quelque soit la base e , on sait que l'application $g \mapsto \text{Mat}_e g$ est un isomorphisme $\text{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Vérifions qu'elle identifie $U(V)$ à $U(n)$. Notons $X(v) \in \mathbb{C}^n$ le vecteur colonne des coordonnées de $v \in V$ dans la base e . Fixons $g \in \text{GL}(V)$ et posons $P = \text{Mat}_e g$. Le calcul matriciel affirme $X(gv) = P X(v)$. Ainsi, la relation $f(g(x), f(g(y))) = f(x, y)$ pour tout $x, y \in V$ s'écrit matriciellement

$${}^t X \bar{Y} = {}^t (P X) \overline{P Y} = {}^t X ({}^t P \bar{P}) \bar{Y}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n.$$

Mais cela équivaut à ${}^t P \bar{P} = I_n$, i.e. $P \in U(n)$. \square

Ainsi, le groupe $U(n)$ s'identifie naturellement au groupe unitaire $U(\mathbb{C}^n)$ de l'espace hermitien standard \mathbb{C}^n , dont la base canonique est orthonormée. On pose aussi

$$\text{SU}(n) = \{g \in U(n) \mid \det g = 1\}.$$

Le choix d'une base orthonormée de V identifie bien entendu $\text{SU}(V)$ à $\text{SU}(n)$, avec $n = \dim V$. On a $\text{SU}(1) = \{1\}$. Montrons pour finir

$$\text{SU}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} = \text{Sp}(1).$$

En effet, l'égalité de droite a déjà été vue (Remarque 2.3). Pour celle de gauche, considérons $g = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$. On a $g^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, puis ${}^t g^{-1} = \bar{g}$ si, et seulement si, $\delta = \bar{\alpha}$ et $\gamma = -\bar{\beta}$. La relation $\det g = 1$ s'écrit alors $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

COROLLAIRE 7.18. *Tout sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $U(n)$.*

DÉMONSTRATION — Soit $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini. D'après la Proposition 7.6, G est inclus dans le groupe unitaire d'une norme hermitienne N bien choisie sur \mathbb{C}^n . D'après la Proposition 7.3, il existe une base e de \mathbb{C}^n orthonormée pour N . Si P est

une matrice de passage entre e et la base canonique de \mathbb{C}^n , la Proposition 7.17 (ii) implique $PGP^{-1} \subset U(n)$. \square

7.4. Une application à un théorème de Jordan. C'est le théorème suivant :

THÉORÈME 7.19. *Soit $n \geq 1$ un entier. Il existe une constante $c(n)$ telle que pour tout sous-groupe fini $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un sous-groupe abélien distingué $A \subset G$ avec $|G/A| \leq c(n)$.*

REMARQUE 7.20. (i) Il existe des sous-groupes finis arbitrairement grands dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par exemple pour tout $m \geq 1$ on a le sous-groupe $G_{m,n}$, de cardinal $m^n n!$, des matrices ayant un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, et appartenant à μ_m . Le sous-groupe $\simeq \mu_m^n$ des matrices diagonales de $G_{m,n}$ est abélien, distingué et d'indice $n!$ (qui ne dépend que de n).

(ii) Le théorème implique aussi qu'un sous-groupe fini simple non abélien de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est de cardinal $\leq c(n)$. En particulier, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne contient qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de sous-groupes simples finis non abéliens.

La démonstration que nous donnons ci-dessous du théorème de Jordan est très inspirée de l'exposition de T. Tao dans [cette entrée de son blog](#). D'après le Corollaire 7.18, on peut supposer $G \subset U(n)$ dans l'énoncé du théorème. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace hermitien. On munit $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ de la norme triple

$$\|u\| = \mathrm{Sup}_{\{v \in V, \|v\|=1\}} \|u(v)\|$$

subordonnée à $\|\cdot\|$. Pour $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ et $g \in U(V)$ on a $\|gu\| = \|ug\| = \|u\|$. Si $G \subset U(V)$ est un sous-groupe, et pour $\epsilon > 0$ un réel, on note G_ϵ le sous-groupe de G engendré par les $g \in G$ avec $\|g - 1\| < \epsilon$.

LEMME 7.21. *Soient V un espace hermitien de dimension n , $G \subset U(V)$ un sous-groupe, et ϵ un réel > 0 . Alors G_ϵ est un sous-groupe distingué de G et on a*

$$|G/G_\epsilon| \leq (1 + 2/\epsilon)^{2n^2}.$$

DÉMONSTRATION — Le sous-groupe G_ϵ est engendré par les $g \in G$ avec $\|g - 1\| < \epsilon$. Pour voir que G_ϵ est distingué dans G , il suffit donc de montrer que pour $g, h \in G$ avec $\|g - 1\| < \epsilon$ on a $\|hgh^{-1} - 1\| < \epsilon$. Mais c'est évident par les égalités $\|hgh^{-1} - 1\| = \|hg - h\| = \|g - 1\|$.

Pour majorer le cardinal de $|G/G_\epsilon|$ on utilise un argument de volume. Considérons une partie finie $X \subset G$ vérifiant $\|x - y\| \geq \epsilon$ pour tout $x, y \in X$ distincts; une telle partie sera dite ϵ -séparée.²³ Soit $B_r \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ la boule ouverte de centre 0 de rayon $r > 0$ pour $\|\cdot\|$. Fixant une mesure de Lebesgue vol sur $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, on a

$$\mathrm{vol} B_r = c r^{2n^2} \quad \text{pour tout } r > 0,$$

où c est une certaine constante > 0 . Par l'inégalité triangulaire, les $|X|$ parties de la forme $x + B_{\epsilon/2} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ avec $x \in X$ sont disjointes. Elles ont le même volume $\mathrm{vol} B_{\epsilon/2}$, et on a $x + B_{\epsilon/2} \subset B_{1+\epsilon/2}$ car $\|x\| = 1$ pour tout $x \in X$. On en déduit

$$|X| \leq \mathrm{vol}(B_{1+\epsilon/2})/\mathrm{vol}(B_{\epsilon/2}) = \frac{(1 + \epsilon/2)^{2n^2}}{(\epsilon/2)^{2n^2}} = (1 + 2/\epsilon)^{2n^2}.$$

²³. Voir l'Exercice 1.6 Chap. 1 pour des considérations élémentaires sur cette notion.

Choisissons maintenant une partie $X \subset G$ qui est ϵ -séparée et de cardinal maximal : c'est possible par l'inégalité ci-dessus. Soit $g \in G$. Il existe $x \in X$ avec $\|g - x\| < \epsilon$, sinon $X \cup \{g\} \subset G$ serait ϵ -séparée et de cardinal $> |X|$. On a donc $\|x^{-1}g - 1\| < \epsilon$, puis $x^{-1}g \in G_\epsilon$, i.e. $g \in xG_\epsilon$. On a montré que l'application $X \rightarrow G/G_\epsilon$, $x \mapsto xG_\epsilon$, est surjective, puis $|G/G_\epsilon| \leq |X| \leq (1 + 2/\epsilon)^{2n^2}$. \square

Le deuxième ingrédient clé est le *lemme de rapprochement des commutateurs* ci-dessous, souvent attribué à Schur.

LEMME 7.22. *Soient V un espace hermitien et $g, h \in U(V)$. On a*

$$\|ghg^{-1}h^{-1} - 1\| \leq 2\|g - 1\|\|h - 1\|.$$

DÉMONSTRATION — On a $\|ghg^{-1}h^{-1} - 1\| = \|gh - hg\|$ car $g, h \in U(V)$. On a aussi $gh - hg = (g - 1)(h - 1) - (h - 1)(g - 1)$, et donc $\|gh - hg\| \leq 2\|g - 1\|\|h - 1\|$ en utilisant l'inégalité $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$ pour $u, v \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant, qui implique le Théorème 7.19 par le Lemme 7.21. On pose $\epsilon_n = \frac{1}{4}|e^{2i\pi/n} - 1|$ pour $n > 1$, et aussi $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$. On a $\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 0$.

LEMME 7.23. *Soient V un espace hermitien de dimension $n \geq 1$ et $G \subset U(V)$ un sous-groupe fini. Alors G_ϵ est un sous-groupe abélien de G pour $\epsilon \leq \epsilon_n$.*

DÉMONSTRATION — On procède par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant évident car $U(1)$ est commutatif. On a clairement $(G_\epsilon)_\epsilon = G_\epsilon$, on peut donc supposer $G = G_\epsilon$. Si G est constitué d'homothéties (par exemple pour $n = 1$), alors G est abélien et il n'y a rien à démontrer. Sinon, le groupe G étant fini, il existe $z \in G$ non homothétie et avec $\|z - 1\|$ minimal. Fixons $g \in G$ avec $\|g - 1\| < \epsilon$. On a

$$(49) \quad \|gzg^{-1}z^{-1} - 1\| < 2\epsilon\|z - 1\| \leq \|z - 1\|,$$

par le Lemme 7.22. Par minimalité, l'élément $gzg^{-1}z^{-1}$ de G (Lemme 7.21) est donc une homothétie. On a donc $gzg^{-1}z^{-1} = \lambda 1$ pour un certain $\lambda \in S^1$, puis $\lambda \in \mu_n$ en prenant le déterminant. Mais on a aussi $\|z - 1\| \leq \|z\| + 1 = 2$ et donc

$$|\lambda - 1| = \|gzg^{-1}z^{-1} - 1\| < 4\epsilon \leq 4\epsilon_n$$

par l'inégalité (49). Mais pour $\zeta \in \mu_n \setminus \{1\}$ on a $|\zeta - 1| \geq |e^{2i\pi/n} - 1|$. On en déduit $\lambda = 1$, et donc que z commute à g . Comme G est engendré par les $g \in G$ avec $\|g - 1\| < \epsilon$, on en déduit que z est dans le centre de G .

Mais z est diagonalisable par la Proposition 7.8. On a donc une décomposition orthogonale $V = \perp_i V_i$ en somme directe de sous-espaces propres V_i pour z , avec $\{0\} \subsetneq V_i \subsetneq V$ car z n'est pas une homothétie. Pour tout $g \in G$ on a donc $g(V_i) = V_i$ car g commute à z . On a donc un morphisme bien défini $r_i : G \rightarrow U(V_i)$, $g \mapsto g|_{V_i}$. L'inégalité évidente $\|r_i(g) - 1\| \leq \|g - 1\|$, et l'hypothèse $G = G_\epsilon$, entraînent donc $r_i(G) = r_i(G)_\epsilon$. L'entier $n_i = \dim V_i$ vérifie $1 \leq n_i < n$, et on a $\epsilon \leq \epsilon_n \leq \epsilon_{n_i}$. Le groupe fini $r_i(G)$ est donc abélien par récurrence sur n . Le morphisme naturel $G \rightarrow \prod_i r_i(G)$, $g \mapsto (g|_{V_i})$, étant injectif, on en déduit que G est abélien. \square