5. Complément : Preuve du lemme de Zorn et le théorème de Zermelo

Notre but dans ce complément est de démontrer le lemme de Zorn. Un concept crucial pour cela est la notion d'ensemble *bien ordonné.*

DÉFINITION 5.1. *Soit $(X,\leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\leq$ est un bon ordre sur X, ou que $(X,\leq)$ est bien ordonné, si toute partie non vide de X admet un plus petit élément.*

Un bon ordre est total (considérer $\min\{x,y\}$), mais la réciproque est bien sûr fausse. Par exemple, l'usuel $(\mathbb{N},\leq)$ est bien ordonné (Peano), mais pas $(\mathbb{Q}_{\geq 0},\leq)$.

Un *segment initial* d'un ensemble ordonné $(X,\leq)$ est une partie $S\subset X$ telle que pour tout $s\in S$, et tout $x\in X\smallsetminus S$, on a $s<x$. On parle de segment initial *strict* si en outre $S\neq X$. Si S_1 et S_2 sont deux parties de X, on notera $S_1\preceq S_2$ si S_1 est un segment initial de S_2 : c'est manifestement une relation d'ordre sur $\mathrm{P}(X)$.

LEMME 5.2. *Soit $(X,\leq)$ un ensemble ordonné.*

(i) Si $B\subset X$ est bien ordonné, et si $x\in X$ est un majorant strict de B, alors $B'=B\cup\{x\}$ est encore bien ordonné. De plus, les segments initiaux stricts de B' sont les segments initiaux de B.

(ii) On suppose que $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles bien ordonnés de X telle que pour tout $i,j\in I$, on a $B_i\preceq B_j$ ou $B_j\preceq B_i$. Alors, $B=\cup_{i\in I}B_i$ est un sous-ensemble bien ordonné de X, et on a $B_i\preceq B$ pour tout $i\in I$.

Une manière équivalente de formuler le (ii) est la suivante : si $\mathrm{B}(X)$ désigne l'ensemble des parties bien ordonnées de X, alors $(\mathrm{B}(X),\prec)$ est inductif ; mieux, toute collection totalement ordonnée d'éléments de $\mathrm{B}(X)$ admet un plus petit majorant ("*borne supérieure*"), à savoir leur réunion.

DÉMONSTRATION — Montrons le (i). Si $S\subset B'$ on a soit $S=\{x\}$, auquel cas $x=\min S$, soit $\min S\cap B=\min S$. Pour la seconde assertion, on a par définition $B\prec B'$. Si S est un segment initial de B', alors soit $x\in S$ et $S=B'$, soit $S\prec B$.

Montrons le (ii). Soient $S\subset\cup_{i\in I}B_i$ et i tel que $S\cap B_i\neq\emptyset$. Soit $m:=\min S\cap B_i$. Montrons $m=\min S$. Soit $s\in S\smallsetminus B_i$; il existe $j\in I$ tel que $s\in B_j$. Si $B_j\preceq B_i$ on a évidemment $B_j\subset B_i$ et donc $m\leq s$. Sinon, on a $B_i\preceq B_j$ par hypothèse, et $s\in B_j\smallsetminus B_i$, et donc encore $s\geq m$. Pour la dernière assertion, il suffit d'observer que pour $b\in B_i$, et $x\in B_j\smallsetminus B_i$ alors on a $b<x$ car B_i est un segment initial de B_j. □

DÉMONSTRATION — (du Lemme de Zorn) Supposons par l'absurde que X n'a pas d'élément maximal. Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties bien ordonnées de X. Pour $B\in\mathscr{B}$ on note $\mathrm{M}(B)=\{x\in X\,|\,b<x,\ \forall\, b\in B\}$ l'ensemble de ses majorants stricts. On a $\mathrm{M}(B)\neq\emptyset$. En effet, on peut trouver par hypothèse un majorant x de B dans X, car B est totalement ordonnée. Comme x n'est pas maximal dans X, il existe $y\in X$ vérifiant $x<y$, et on a alors $y\in\mathrm{M}(B)$. Par AC, le produit $\prod_{B\in\mathscr{B}}\mathrm{M}(B)$ est donc non vide. On en choisit un élément $m=(m(B))_{B\in\mathscr{B}}$.

Appelons *m-ordinal* un sous-ensemble bien ordonné $B \subset X$ tel que pour tout segment initial strict S de B on a $\min(B \setminus S) = m(S)$. On note $\mathscr{B}_m \subset \mathscr{B}$ le sous-ensemble des m-ordinaux. Par exemple, $\emptyset$ est un m-ordinal, et le seul singleton m-ordinal est $\{x_0\}$ avec $x_0 := m(\emptyset)$. Nous allons voir que les m-ordinaux sont emboités les uns dans les autres de manière très rigide (et infinie) :

LEMME : (O1) *Si B est un m-ordinal, alors $B^+ := B \coprod \{m(B)\}$ est un m-ordinal.*

(O2) *Si A et B sont deux m-ordinaux, on a $A \preceq B$ ou $B \preceq A$.*

DÉMONSTRATION — (du Lemme) En effet, (O1) est conséquence directe du Lemme 5.2 (i). Montrons (O2). Soit T la réunion de tous les sous-ensembles de X qui sont des segments initiaux de A et de B. Comme une union de segments initiaux est trivialement un segment initial, T est encore un segment initial de A et de B, et c'est donc le plus grand segment initial à la fois de A et de B. Si T est strictement inclus dans A et dans B, alors $m(T) = \min A \setminus T = \min B \setminus T$ est dans $A \cap B$. Mézalor $T^+ = T \cup \{m(T)\}$ est un segment initial de A et de B : c'est l'ensemble de leurs éléments $\leq m(T)$. On a donc $T^+ \subset T$, puis $m(T) \in T$: une contradiction ! On a montré $T = A$ ou $T = B$, QED. □

Terminons la démonstration du théorème. On considère la réunion $U = \cup_{B \in \mathscr{B}_m} B$ de tous les m-ordinaux. Alors U est bien ordonné par le Lemme 5.2 (ii), qui s'applique par (O2). Vérifions qu'il est m-ordonné. Soit S un segment initial strict de U. Posons $u = \min U \setminus S$, de sorte que l'on a $S = \{x \in U \,|\, x < u\}$. On a aussi $u \in B$ pour un certain $B \in \mathscr{B}_m$. Mais comme B est un segment initial de U par la deuxième assertion du Lemme 5.2 (ii), B contient S, et on a donc $u = \min U \setminus S = \min B \setminus S = m(S)$, *i.e.* $U \in \mathscr{B}_m$. Mézalor on a aussi $U^+ \in \mathscr{B}_m$ par (O1), et donc $U^+ \subset U$ par définition de U, *i.e.* $\mathrm{m}(U) \in U$: une contradiction. □

Terminons par une conséquence surprenante du Lemme de Zorn.

THÉORÈME 5.3. (Zermelo) *Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.*

DÉMONSTRATION — Soit X un ensemble. On note E l'ensemble des couples (B, R) avec $B \subset X$ et $R \subset B \times B$ une relation de bon ordre sur X. On munit E d'une relation d'ordre en posant $(B, R) \leq (B', R') \Leftrightarrow B \subset B'$, $R = R' \cap (B \times B)$ (de sorte que B est une partie de B' et R l'ordre induit par R' sur cette partie), et si en outre B est un segment initial de B'. On va montrer que $(E, \leq)$ est inductif.

Soit $\{(B_i, R_i) \,|\, i \in I\}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de E, *i.e.* I est totalement ordonné et on a $(B_i, R_i) \leq (B_j, R_j)$ pour $i \leq j$. On pose $B = \cup_{i \in I} B_i$. Soient $x, y \in B$. Il existe $i, j \in I$ tels que $x \in B_i$ et $y \in B_j$. Alors $x \, R \, y := x \, R_k \, y$ est indépendant du choix de $k \geq \max\{i, j\}$, et définit manifestement une relation d'ordre sur B induisant R_i sur B_i. D'après le Lemme 5.2 (ii), (B, R) est dans E et c'est un majorant de $\{(B_i, R_i) \mid i \in I\}$. Ainsi, $(E, \leq)$ est inductif.

D'après le lemme de Zorn, E admet donc un élément maximal (B, R). Supposons $B \neq E$. On choisit $x \in E - B$ arbitrairement et l'on considère l'unique relation d'ordre R' sur $B' = B \cup \{x\}$ induisant R sur B et pour laquelle x est un majorant strict de B dans B'. On a alors $(B, R) < (B', R')$ par le Lemme 5.2 (i), en contradiction avec la maximalité de (B, R). Cela montre $B = E$, et R convient. □

Remarquons que le théorème de Zermelo implique trivialement AC : si X est bien ordonné, alors $S \mapsto \min S$ est une fonction de choix sur X. Au final, nous avons montré (dans ZF), l'équivalence entre AC, le lemme de Zorn et le théorème de Zermelo (en montrant précisément AC $\Rightarrow$ Zorn $\Rightarrow$ Zermelo $\Rightarrow$ AC).